

У наставку се налази остатак теоријског садржаја који се састоји од 7 наставних јединица (нумерисаних у тексту). Комплетан текст преузет је из уџбеника „Дискретне структуре 2“, за који смо рекли да у потпуности покрива теоријски садржај курса. Споменуте јединице су:

1. Партиције бројева и скупова
2. Фибоначијеви, Лукасови и Каталанови бројеви
3. Основни појмови теорије графова
4. Стабла; означена стабла
5. Минимална разапињућа стабла
6. Ојлерови, Хамилтонови и планарни графови
7. Спаривања у графовима и бојења графова

Поред ових јединица постоје и два алгорита (Дајкстрин и Флојдов) који се не излажу на предавањима, али се раде на вежбама и налазе се у материјалима за вежбе.

Црвена линија поред текста означава оно што је садржај курса! Другим речима, оно поред чега се не налази таква линија није део предавања и, наравно, не тражи се ни на којем делу испита. Најчешће, то су изостављени докази, изостављене теореме, задаци и слично.

Изузев Примера 2.5.1, 2.5.2, 2.5.4, 3.9.7 и 3.9.8, сви остали се не морају интерпретирати на испиту (али су корисни за разумевање градива). Исто важи и за Напомене и уводне делове текста који немају математичког садржаја (нпр. увод у причу о Фибоначијевим бројевима, текст у Глави 3 који се налази испред Пододељка 3.1.1, прича о кенингсбершким мостовима и слично). На испиту се не мора одговарати „тачно онако како је у овом материјалу или књизи“. Свако може направити свој концепт излагања, понудити алтернативну дефиницију, другачији доказ и слично.

Испитна питања налазе се на крају овог фајла.

К2: Први члан низа T уписати на почетак низа P . Уклонити тај и све чланове дељиве са њим из низа T .

К3: Уколико је низ T празан прећи на К4, у супротном прећи на К2.

К4: Крај.

Имплементирати овај алгоритам у неком програмском језику. Пронаћи могућа побољшања алгоритма. (Новији алгоритам за одређивање простих бројева скупа \mathbb{N}_n је такозвано *Еџкиново*¹⁵ *сиџо*. Постоје и (пробабилистички) алгоритми који генеришу велике просте бројеве.)

2. Доказати да је скуп простих бројева бесконачан. (Претпоставити супротно и потом размотрити производ свих простих бројева увећан за један.)

3. *Голдбахова*¹⁶ *хиџоџеза* каже да сваки паран број већи од 2 може бити репрезентован у виду суме два проста броја. Ова хипотеза постављена је 1742. године и још увек није решена, стога „доказати или оповргнути Голдбахову хипотезу“ не би био прикладан задатак, али рецимо може: саставити алгоритам који ову хипотезу проверава на неком коначном скупу.

4. *Леви факџоријел* природног броја дефинишемо као $n! = \sum_{i=0}^{n-1} i!$. *Куреџина*¹⁷ *хиџоџеза* каже да за сваки природан број већи од 1 важи $D(n!, n) = 2$. Саставити алгоритам који ову хипотезу проверава на неком коначном скупу.

5. Одредити најмањи природан број који при дељењу са 8 даје остатак 1, при дељењу са 7 даје остатак 2, при дељењу са 5 даје остатак 4 и при дељењу са 3 даје остатак 0. (Бројни системи у којим се бројеви репрезентују помоћу остатака при дељењу са задатим узајамно простим бројевима (модулима) називају се *резидуумски бројни системи*. У широкој литератури такозвани претпостављени резидуумски бројни систем је систем са модулима 8, 7, 5 и 3.)

1

2.2 Партиције бројева

У овом одељку бавићемо се композицијама и партицијама бројева. Изложићемо резултате који су примерени онима којима је ова књига првенствено намењена, а више детаља може се пронаћи у [2, 19].

¹⁵Артур Оливер Лонсдејл Еткин (Arthur Oliver Lonsdale Atkin, 1925–2008) – енглески математичар.

¹⁶Кристијан Голдбах (Christian Goldbach, 1690–1764) – немачки математичар.

¹⁷Ђурађ (Ђуро) Курепа (1907–1993) – српски математичар.

Поред основних својстава композиција и партиција бројева, навешће-мо један погодан начин за представљање партиција и доказати неке идентитете.

2.2.1 Композиције и партиције

Композиција природног броја n на k сабирака је уређена k -торка (a_1, a_2, \dots, a_k) природних бројева таква да важи $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Бројеве a_1, a_2, \dots, a_k називамо сабирцима композиције.

Пример 2.2.1. За $k = 2$ добијамо следеће композиције броја 4: $(1, 3)$, $(3, 1)$ и $(2, 2)$. Надаље ћемо користити интуитивнији запис композиције у виду разлагања броја на сабирке. У складу са тим, све композиције броја 4 су:

$$k = 1 : 4,$$

$$k = 2 : 1 + 3, 3 + 1, 2 + 2,$$

$$k = 3 : 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1,$$

$$k = 4 : 1 + 1 + 1 + 1.$$

Укупно их је 8.

За композиције се у литератури користе и термини уређене партиције или уређена разлагања природног броја. Наредна два тврђења дају број композиција природног броја.

Теорема 2.2.2. Број композиција природног броја n на k сабирака једнак је

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Доказ. Послужимо се следећом комбинаторном схемом:

$$n = 1_1_ \dots _1.$$

Број цртица је $n - 1$. Да бисмо добили k сабирака, потребно је да на цртице распоредимо $k - 1$ знакова $+$, а то можемо учинити на $\binom{n-1}{k-1}$ начина. (Неуређени избор елемената: бирамо $k - 1$ цртица из скупа од $n - 1$ цртица.)

Након распоређивања плусева, узастопне јединице (које се налазе на почетку, између два плуса или на крају) дају један сабирак. Другим речима, број композиција једнак је броју избора цртица на које распоређујемо плусеве, односно једнак је биномном коефицијенту из формулације теореме. ■

Теорема 2.2.3. Број композиција природног броја n једнак је 2^{n-1} .

Доказ. Користећи биномну формулу дату у Теорему 1.3.5 (за $x = 1$ и $y = 1$, видети и Пример 1.3.6), добијамо

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1},$$

одакле следи тврђење. ■

Прелазимо сада на партиције бројева. *Партиција природног броја n на k сабирака* је мултискуп $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ природних бројева, такав да важи $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Бројеве a_1, a_2, \dots, a_k називамо *сабирцима партиције*.

Пример 2.2.4. Слично, за $k = 2$ добијамо следеће партиције броја 4: $[1, 3], [2, 2]$. Као код композиција, користимо запис у виду разлагања броја на сабирке. Дакле, све партиције броја 4 су:

$$\begin{aligned} k = 1 &: 4, \\ k = 2 &: 1 + 3, 2 + 2, \\ k = 3 &: 1 + 1 + 2, \\ k = 4 &: 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Укупно их је 5.

Број партиција броја n означавамо са $p(n)$, а број партиција броја n на k сабирака са $p_k(n)$. Партицију броја n можемо записати и на следећи начин:

$$[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}],$$

при чему ненегативни цели бројеви m_1, m_2, \dots, m_n означавају бројеве појављивања сабирака у мултискупу.

Из дефиниција је јасна разлика између композиције и партиције броја. Иако су композиције дефинисане као уређене k -торке, а партиције као мултискупови, јасно је да су суштински различите партиције броја истовремено и различите композиције истог броја. Са друге стране, више композиција може одговарати једној партицији. Једноставније, разлагања броја на сабирке која се разликују само у редоследу сабирака представљају различите композиције, а једну исту партицију.

Интересантно је да формула (која би представљала пандан Теорему 2.2.3) за број партиција произвољног природног броја не постоји. Број партиција може се одредити коришћењем рекурентних формула или функције генератрисе низа $(p(n))$, а за мале вредности n број партиција можемо израчунати и директним рачуном.

Пример 2.2.5. Бројеви партиција првих 10 природних бројева дати су табелом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Следи једна рекурентна формула.

Теорема 2.2.6. *Важна једнакост*

$$p_k(n) = p_k(n - k) + p_{k-1}(n - k) + \dots + p_1(n - k).$$

Доказ. Нека је

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

једна партиција броја n на k сабирака. Ако од сваког сабирка у овој једнакости одуземо 1, добијамо једнакост

$$n - k = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_k - 1).$$

На овај начин смо од дате партиције броја n добили партицију броја $n - k$. Уочимо да неки од сабирака могу бити једнаки 0, уколико су пре одузимања били једнаки 1. Последња једнакост даје једну бијективну кореспонденцију између скупа партиција броја n на k сабирака и скупа партиција броја $n - k$ на највише k сабирака, одакле следи тврђење. ■

Ево сада и функције генератрисе.

Теорема 2.2.7. *Функција генератриса низа $(p(n))$ одређена је са*

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Ова теорема може се доказати разлагањем свих партиција броја n на оне које садрже један фиксирани сабирак и на оне које га не садрже, те потом одређивањем функција генератриса низова таквих партиција. Детаљи се могу пронаћи у [19, 31].

Пример 2.2.8. Одредити све партиције броја 12 чији сабирци припадају скупу $\{2, 5\}$.

Оваквим партицијама одговара следећа функција генератриса:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \\ &= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots). \end{aligned}$$

Тражени број партиција једнак је коефицијенту који се налази уз x^{12} , а будући да x^{12} добијамо из

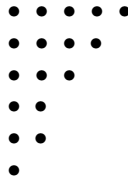
$$x^2 \cdot x^{10} + x^{12} \cdot 1 = 2x^{12},$$

закључујемо да је тражени број партиција једнак 2. (Није тешко закључити да су то партиције $[2^1, 5^2]$ и $[2^6, 5^0]$.)

2.2.2 Ферерсови дијаграми и неки идентитети

Партиције бројева погодна се могу представити коришћењем такозваних *Ферерсових*¹⁸ *дијаграма*. Партиција неког броја се Ферерсовим дијаграмом представља распоређивањем маркера у врсте и колоне дијаграма тако да свака врста одговара сабирку из дате партиције. Уз то, приликом оваквог представљања сабирци партиције уређени су у нерастући низ, што значи да број маркера опада од прве ка последњој врсти. Као илустрација послужиће следећи пример.

Пример 2.2.9. Ферерсов дијаграм партиције $17 = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1$ дат је са:



Слично, Ферерсов дијаграм партиције $7 = 4 + 1 + 1 + 1$ дат је са:

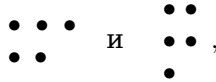


На први поглед, Ферерсов дијаграм не даје ништа ново, међутим ускоро ћемо се уверити да се разни идентитети могу елегантно доказати уколико се партиције представе преко оваквих дијаграма. Пре тога, још две дефиниције.

За две партиције броја n кажемо да су (међусобно) *конјуговане* уколико се Ферерсов дијаграм једне добија заменом места врста и колоне у Ферерсовом дијаграму друге. То јест, коришћењем матричне терминологије, уколико се Ферерсов дијаграм једне добија транспоновањем Ферерсовог дијаграма друге.

¹⁸Норман Меклеод Ферерс (Norman Macleod Ferrers, 1829-1903) – енглески математичар.

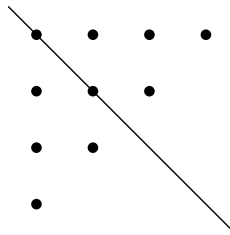
Пример 2.2.10. Ферерсови дијаграми партиција $5 = 3 + 2$ и $5 = 2 + 2 + 1$ редом су дати са



одакле следи да су оне конјуговане.

За партицију броја кажемо да је *самоконјугована* уколико је њен Ферерсов дијаграм инваријантан у односу на транспоновање. Рецимо, партиција броја 7 из Примера 2.2.9 је самоконјугована.

Напомена 2.2.11. Ферерсов дијаграм самоконјуговане партиције симетричан је као на Слици 2.1.



Слика 2.1: Симетричност Ферерсовог дијаграма самоконјуговане партиције.

За крај подедељка навешћемо неке идентитете.

Теорема 2.2.12. *Важе следећи идентитети.*

- (1) Број партиција броја n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја $n + k$ на k сабирака.
- (2) Број партиција броја n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја n на сабирке који припадају скупу \mathbb{N}_k .
- (3) Број партиција броја n на парне сабирке једнак је броју партиција броја n у којима се сваки сабирак појављује паран број пута.
- (4) Број самоконјугованих партиција броја n једнак је броју партиција броја n у којима су сабирци различити и непарни.

Доказ. Доказаћемо прва два идентитета. Друга два се доказују на сличан начин.

(1) Овај идентитет је последица Теореме 2.2.6, а оно што следи заправо је модификација доказа исте теореме. Нека је дата партиција броја $n + k$ на k сабирака. Прва колона одговарајућег Ферерсовог дијаграма садржи тачно k маркера, као у схематском приказу:

$$k \text{ врста } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right. \dots$$

Ако сада уклонимо прву колону из дијаграма, добијамо дијаграм неке партиције броја n који има највише k врста, а то управо значи да добијена партиција броја n има највише k сабирака. Овим је успостављена бијективна кореспонденција између скупа Ферерсових дијаграма који представљају партиције броја $n + k$ на k сабирака и скупа Ферерсових дијаграма који представљају партиције броја n на највише k сабирака, одакле следи идентитет.

(2) Довољно је уочити да је Ферерсов дијаграм који представља партицију броја n на највише k сабирака конјугован Ферерсовом дијаграму једне партиција броја n на сабирке који припадају скупу \mathbb{N}_k . Идентитет се добија успостављањем сличне бијективне кореспонденције. ■

Задаци

1. Колико има композиција природног броја n у којима су сви сабирци већи од 1?
2. Користећи Пример 2.2.5 и Теорему 2.2.6, израчунати вредности $p(11)$ и $p(12)$.
3. Одредити све самоконјуговане партиције броја 21.
4. Колико има троуглова код којих су дужине страница једнаке целим бројевима, а најдужа је једнака n ?
5. Доказати да је број партиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 2\}$ једнак броју партиција броја $n + 3$ које имају тачно два сабирка.
6. Доказати да је број партиција броја n код којих се сваки сабирак појављује мање од 3 пута једнак броју партиција истог броја на сабирке који нису дељиви са 3.

2.3.5 Примена у партицијама скупова

Овде ћемо размотрити једну примену рекурентних једначина у израчунавању броја партиција коначног скупа. Даље излагање односи се на скупове првих n природних бројева.

Партиција скупа \mathbb{N}_n на k подскупова је скуп његових непразних дисјунктних подскупова S_1, S_2, \dots, S_k таквих да важи

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k.$$

Сматраћемо да је једина партиција празног скупа празан скуп. Партиције ћемо надаље записивати као у претходној једнакости, дакле у облику уније подскупова, а не скупа истих подскупова.

Пример 2.3.19. Све партиције скупа \mathbb{N}_3 су:

$$k = 1 : \{1, 2, 3\},$$

$$k = 2 : \{1, 2\} \cup \{3\}, \{1, 3\} \cup \{2\}, \{2, 3\} \cup \{1\},$$

$$k = 3 : \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}.$$

Следеће дефиниције и пратећа тврђења говоре о броју партиција скупа. *Стирлингов број групе врсте*, у ознаци $S(n, k)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената на k подскупова. Из Примера 2.3.19 закључујемо да, рецимо, важи $S(3, 2) = 3$.

Напомена 2.3.20. Стирлингови бројеви прве врсте појављују се у контексту одређивања броја пермутација које задовољавају специфичне услове. Иако смо се пермутацијама бавили у оквиру Одељака 1.4 и 1.5, ове бројеве нисмо спомињали.

Белов¹⁹ број, у ознаци $B(n)$, једнак је броју партиција скупа од n елемената. Другим речима, важи једнакост

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k).$$

Доњи индекс суме једнак је нули јер смо укључили и празан скуп.

Пример 2.3.21. Белови бројеви $B(n)$, $n \leq 10$, дати су табелом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

¹⁹Ерик Темпл Бел (Eric Temple Bell, 1883-1960) – шкотски математичар и књижевник.

Низови Стирлингових бројева друге врсте и Белових бројева задовољавају одговарајуће рекурентне једначине. За почетак, важи следећа теорема.

Теорема 2.3.22. *Стирлингови бројеви друге врсте задовољавају следећу рекурентну једначину:*

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k).$$

Доказ. Све партиције скупа \mathbb{N}_{n+1} на k подскупова можемо добити од партиција скупа \mathbb{N}_n на $k-1$, односно k подскупова. Наиме, свака таква партиција скупа \mathbb{N}_{n+1} добија се или проширивањем партиције скупа \mathbb{N}_n на $k-1$ подскупова једночланим скупом $\{n+1\}$ (што даје први сабирак десне стране једнакости коју доказујемо) или додавањем елемента $n+1$ неком од подскупова који чине партицију скупа \mathbb{N}_n на k подскупова. Пошто се тај елемент може додати било којем од k подскупова, свака партиција скупа \mathbb{N}_n на k подскупова даје k нових партиција скупа \mathbb{N}_{n+1} на исти број подскупова (што даје други сабирак), одакле следи тврђење. ■

Подсетимо да је низ који задовољава неку рекурентну једначину једнозначно одређен тек када се задају и почетни услови. У складу са тим, будући да је низ Стирлингових бројева дводимензиони (зависи од два индекса, k и n), додавањем почетних услова $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ долазимо до рекурентне једначине

$$\begin{cases} S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k), \\ S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1. \end{cases}$$

која одређује ове бројеве.

Теорема 2.3.23. *Белови бројеви одређени су рекурентном једначином*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k),$$

и почетним условом $B(0) = 1$.

Доказ се може пронаћи у [2, 31]. У Одељцима 2.4–2.6 сретћемо се са још неким низовима бројева и рекурентним једначинама које их одређују.

Задаци

1. Формирати рекурентну једначину која (уз одговарајући почетни услов) једнозначно одређује геометријски низ $(8, -12, 18, -27, \dots)$. Израчунати потом 100. члан овог низа.

2

2.4 Фибоначијеви бројеви

Фибоначијеви²⁰ бројеви чине један од најпознатијих низова бројева, не само у математици већ и у осталим наукама. Читаоцу је вероватно познат појам златне поделе који се често спомиње у контексту пропорција у сликарству, другим уметностима и архитектури. У ономе што следи, даћемо неке одреднице Фибоначијевих бројева (на пример, одредићемо општи члан и функцију генератрису Фибоначијевог низа) и доказаћемо нека њихова својства. Размотрићемо и један низ бројева који су блиски Фибоначијевим.

2.4.1 Дефиниција Фибоначијевог низа

Фибоначи је до низа дошао бавећи се проблемом броја зечева (у некој литетатури, кунића) унутар једне колоније. Прецизније, уколико сваки пар зец-зечица (који су стари по барем 2 месеца) добију током следећег месеца пар младих, зеца и зечицу, и ако је у старту постојао само један пар, колико ће парова постојати након фиксираног броја месеци?

Нека је F_n број парова зец-зечица након n месеци. Према претпоставци важи $F_1 = 1, F_2 = 1$, док се F_n (за $n \geq 3$) добија када броју парова F_{n-1} из претходног месеца додамо новорођене парове који се добијају од F_{n-2} парова који су постојали пре два месеца. Другим речима, добијамо рекурентну једначину $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и почетне услове $F_1 = 1, F_2 = 1$. У духу досадашњих разматрања, укључићемо и члан $F_0 = 0$, то јест нулти месец. Овај детаљ нема суштинског утицаја, а са друге стране разматрани низ има нулти члан као и други пребројиви низови којима смо се до сада бавили. Дакле, важи:

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 0, F_1 = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Фибоначијев низ је низ бројева одређен једначином (2.16). У складу са тим, Фибоначијеви бројеви су чланови Фибоначијевог низа. Почетни чланови тог низа су:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

У наредним пододељцима рећи ћемо нешто више о Фибоначијевим и сродним бројевима. Много више на ту тему читалац може пронаћи у [33, 35].

²⁰Леонардо Боначи, познатији као Фибоначи (Leonardo Bonacci, Fibonacci, око 1175-око 1250) - италијански математичар.

2.4.2 Златна подела

Тема овог пододељка је константа која представља решење једноставног геометријског проблема, а која се појављује у разним математичким аспектима (са неким од њих ћемо се сусрести у ономе што следи).

Размотримо дуж подељену на два дела (d и k , уз услов $d > k$) тако да важи следећа пропорција:

$$\frac{d+k}{d} = \frac{d}{k}.$$

Другим речима, однос између дужине целе дужи и дужег дела једнак је односу између дужине дужег и краћег дела. Таква подела (дужи) позната је као *златна подела* (или *златни пресек*). Да бисмо одредили тражени однос, без губљења на општости, можемо претпоставити да је дужина краћег дела дужи једнака 1, то јест да важи $k = 1$. У том случају добијамо

$$\frac{d+1}{d} = d,$$

односно добијамо једначину

$$d^2 - d - 1 = 0, \quad (2.17)$$

чија су решења

$$d_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Пошто дужина дужи мора бити позитивна, закључујемо да важи

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

На први поглед Фибоначијеви бројеви немају везе са овим ирационалним бројем, међутим у наредном пододељку уверићемо се да није тако.

2.4.3 Неке одреднице и својства

Фибоначијеви бројеви имају изузетно велики број интересантних својстава до мере да постоје научне конференције које су посвећене само њима. Овде ћемо навести нека од њих, а више се може пронаћи у раније наведеној литератури.

Пошто Фибоначијев низ задовољава линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима која је, заједно са почетним условима, дата са (2.16), користећи метод за решавање оваквих једначина описан у Пододељку 2.3.2, можемо одредити општи члан тог низа.

Теорема 2.4.1. *Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (2.18)$$

Доказ. Карактеристична једначина која одговара рекурентној једначини (2.16) је једначина (2.17) коју смо решили у претходном пододелу. Стога је опште решење разматране рекурентне једначине одређено са

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Константе c_1 и c_2 одређујемо на основу почетних услова:

$$\begin{aligned} F_0 = 0 &= c_1 + c_2, \\ F_1 = 1 &= c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Отуда следи

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

што даје

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

одакле следи једнакост (2.18). ■

Општи члан можемо одредити и на другачији начин.

Теорема 2.4.2. *Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са*

$$F_n = \left\lfloor \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor, \quad (2.19)$$

при чему је $\lfloor x \rfloor$ ознака за заокруживање на најближи цео број.

Доказ. Оценимо разлику између F_n и $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$. Једноставним рачуном, уз коришћење претходне теореме, добијамо

$$\left| F_n - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right|$$

$$= \left| \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Пошто је апсолутна вредност разлике реалних бројева F_n и $\frac{(1+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$ мања од $\frac{1}{2}$, закључујемо да важи једнакост (2.19). ■

Једнакост (2.19) практичнија је за коришћење од једнакост (2.18), јер захтева краћи рачун. Одредимо сада и функцију генератрису Фибоначијевог низа.

Теорема 2.4.3. *Функција генератрису Фибоначијевог низа одређена је са*

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Доказ. Рекурентној једначини (2.16) одговара следећа једначина (упоредити Примере 2.3.17 и 2.3.18):

$$\frac{F(x) - F_1x - F_0}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x).$$

Заменом $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$, добијамо

$$F(x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x},$$

одакле следи једнакост из формулације теореме. ■

Приметимо да се златна подела појављује у обе форме општег члана Фибоначијевог низа. Наредна теорема нам каже да количник два узастопна Фибоначијева броја тежи управо златној подели када $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.4.4. *Важе следеће једнакости:*

$$(1) \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}_n, \text{ за } n \geq 1, \text{ и}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Доказ. (1) За $n = 1$ добијамо $\frac{F_2}{F_1} = 1$, односно, идентитет $1 = 1$. Претпоставимо да једнакост важи за $n - 1$. Најпре ћемо члан F_{n+1} представити у облику збира претходна два члана (на основу једначине (2.16)), а затим након трансформисања добијеног израза применити индуктивну хипотезу у четвртој једнакости и тиме закључити доказ:

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \\ &= 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} \end{aligned}$$

(2) Приметимо да важи

$$1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2.$$

На основу овога следи да је низ $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ ограничен, а уз то његови непарни чланови монотono расту, а парни монотono опадају (што није тешко доказати). У складу са тим, оба подниза конвергирају некој вредности $x \in (1, 2)$. Другим речима, у случају оба подниза постоји лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ који је, на основу прве једнакости из ове теореме, једнак решењу једначине

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ово је једначина (2.17), што значи да је њено решење које припада интервалу $(1, 2)$ дато са

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

чиме је доказ завршен. ■

Доказаћемо још два идентитета.

Теорема 2.4.5. *Важи једнакост*

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

Доказ. У рачуну који следи користимо једнакост $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$, скраћујемо чланове у узастопним сабирцима и на крају користимо једнакост $F_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_i &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= F_{n+2} - F_2 \\ &= F_{n+2} - 1.\end{aligned}$$

Теорема 2.4.6. *За $n \geq 1$ важи једнакост*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Доказ. За $n = 1$ добијамо $F_2F_0 - F_1^2 = -1$, односно идентитет $-1 = -1$. Претпоставимо да за $n \geq 2$ важи једнакост $F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$. Најпре ћемо члан F_{n+1} представити у облику збира претходна два члана, а затим након трансформисања добијеног израза применити индуктивну хипотезу у четвртој једнакости и тиме закључити доказ:

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n^2 \\ &= F_n(F_{n-1} - F_n) + F_{n-1}^2 \\ &= -F_nF_{n-2} + F_{n-1}^2 \\ &= -(-1)^{n-1} \\ &= (-1)^n.\end{aligned}$$

2.4.4 Лукасови бројеви

Лукасов²¹ низ одређен је следећом рекурентном једначином

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \\ L_0 = 2, L_1 = 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Дакле, Лукасови бројеви припадају низу чији су почетни чланови:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

Према неким изворима, управо је Лукас Фибоначијевим бројевима дао тај назив. Приметимо да Лукасов и Фибоначијев низ задовољавају исту рекурентну једначину, уз различите почетне услове.

²¹Франсоа Едуар Анатол Лукас (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891) – француски математичар. У складу са француским изговором, Лика, али се код нас чешће среће Лукас.

Као у случају Фибоначијевих бројева, одредимо општи члан и функцију генератрису Лукасовог низа.

Теорема 2.4.7. *Општи члан Лукасовог низа одређен је са*

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2.21)$$

Доказ. Карактеристична једначина је иста као код Фибоначијевог низа, одакле следи да су и нуле исте. Дакле, у складу са Теоремом 2.4.1, опште решење је

$$L_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Даље добијамо

$$\begin{aligned} L_0 = 2 &= c_1 + c_2, \\ L_1 = 1 &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \end{aligned}$$

односно

$$c_1 = 1, c_2 = 1,$$

одакле закључујемо да је општи члан дат са (2.21). ■

Теорема 2.4.8. *Функција генератрису Лукасовог низа одређена је са*

$$L(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}. \quad (2.22)$$

Доказ. Рекурентној једначини Лукасовог низа одговара следећа једначина

$$\frac{L(x) - L_1x - L_0}{x^2} = \frac{L(x) - L_0}{x} + L(x),$$

одакле, слично као у Теорему 2.4.3, добијамо једнакост (2.22). ■

Важи следећа релација између Фибоначијевих и Лукасових бројева.

Теорема 2.4.9. *Ако су (F_n) и (L_n) редом Фибоначијев и Лукасов низ, онда за $n \geq 1$ важи*

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

Доказ. За $n = 1$ добијамо $L_1 = F_2 + F_0$, односно, идентитет $1 = 1$. Претпоставимо да за $n \geq 2$ важи једнакост $L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$. Користећи рекурентну једначину (2.20), члан L_n можемо представити у облику збира претходна два. Применом индуктивне хипотезе на оба сабирка, па затим прегруписавањем и коришћењем рекурентне једначине (2.16), добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\ &= (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1}. \end{aligned}$$

■

Задаци

1. Доказати следеће идентитете са Фибоначијевим бројевима:

- $F_{k+n} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}$, за $k \geq 1$, $n \geq 0$,
- $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$, за $n \geq 1$,
- $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$, за $n \geq 1$ и
- $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, за $n \geq 0$.

2. Доказати следећа тврђења.

- Свака два узастопна Фибоначијева броја су узајамно прости.
- Фибоначијев број F_n дели Фибоначијев број F_{kn} , $k \geq 0$.
- Ако је p прост број већи од 5, онда је тачан тачно један од исказа

$$p|F_{p+1} \text{ и } p|F_{p-1}.$$

3. Доказати да је највећи заједнички делилац $D(F_k, F_n)$ Фибоначијевих бројева F_k и F_n једнак Фибоначијевом броју $F_{D(k,n)}$.

4. Доказати да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{k+n}}{F_n} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

5. Трибоначијев низ одређен је рекурентном једначином којом се члан низа изражава преко претходна три:

$$\begin{cases} T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \\ T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 1. \end{cases}$$

Назив овог низа настао је комбиновањем речи „три“ и „Фибоначи“. Израчунавањем почетних чланова добијамо низ:

$$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \dots$$

Одредити општи члан и функцију генератрису овог низа.

6. Доказати да је за $n \geq 2$ општи члан Лукасовог низа одређен са

$$L_n = \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

7. Доказати следеће идентитете са Лукасовим бројевима:

- $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$, за $n \geq 1$,
- $L_{n+2}L_{n-1} = L_{n+1}^2 - L_n^2$, за $n \geq 1$,
- $L_{2n}^2 = L_{4n} + 2$, за $n \geq 0$ и
- $L_k L_n - L_{kn} = (-1)^k L_{n-k}$, за $k \leq n$.

8. Доказати следеће релације између Фибоначијевих и Лукасових бројева:

- $F_{2n} = F_n L_n$, за $n \geq 0$,
- $5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$, за $n \geq 0$,
- $F_{n+1}L_n - F_{2n+1} = (-1)^n$, за $n \geq 0$ и
- $2L_{k+n} = L_k L_n + 5F_k F_n$, за $k, n \geq 0$.

2.5 Каталанови бројеви

Каталанов²² низ одређен је следећом рекурентном једначином:

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1}, \\ C_0 = 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

²²Јужин Шарл Каталан (Eugène Charles Catalan, 1814-1894) – белгијски математичар.

Отуда су почетни чланови Каталановог низа дати са:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

Рекурентна једначина (2.23) је нелинеарна, али се може решити што овде нећемо радити (поступак се може пронаћи у [31]). Општи члан одговарајућег низа је

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Размотримо сада следећи проблем. Нека је дат неки рачунски израз који се, рецимо, састоји од низа основних математичких операција над било којим бројевима или променљивим и (малих) заграда. Уколико сада уклонимо све осим заграда, добићемо један коректан низ заграда. На пример, израз

$$2x + \left(\frac{1}{4}(x^2 - 1)y + 3 \right) - 2(x - y)$$

даје низ заграда $((())())$.

Значење термина „коректан” интуитивно је јасно. На пример, претходни низ је коректан јер се заграде заиста могу распоредити на такав начин, док рецимо низови $((())$ (и $)()()$ то нису.

Колико има коректних низова n парова заграда? Најпре један пример.

Пример 2.5.1. Колико има коректних низова 3 пара заграда?

Разликујемо три случаја:

- када низ почиње са три отворене заграде,
- када низ почиње са тачно две отворене заграде и
- када низ почиње тачно једном отвореном заградом.

Најпре, први случај даје тачно један коректан распоред. Након три отворене заграде морају уследити три затворене, то јест $((()))$.

Други случај даје следећа два распореда до којих није тешко доћи: $((())$ и $(())()$.

Напослетку, трећи случај даје још два распореда: $()(())$ и $()()()$.

Закључујемо да укупно имамо 5 коректних низова 3 пара заграда.

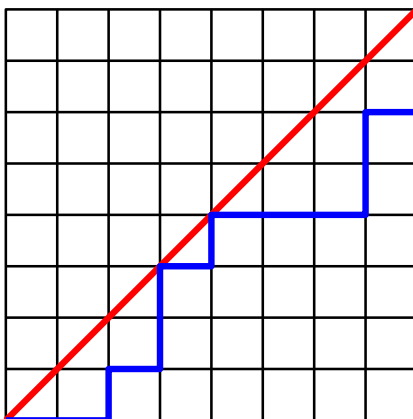
Размотримо сада општи случај, то јест нека је дат коректан низ n парова заграда. Јасно је да такав низ мора почети отвореном заградом

коју некада касније морамо затворити, те га стога можемо записати у облику

$$(Z_1)Z_2,$$

при чему су Z_1 и Z_2 (могуће и празни) коректни поднизови заграда. Ово нас доводи до рекурентне једначине (2.23), при чему је C_i број коректних распореда заграда који одговара низу Z_1 , а C_{n-i-1} број коректних распореда заграда који одговара низу Z_2 . Дакле, можда неочекивано, али број коректних распореда n парова заграда једнак је Каталановом броју C_n .

Пример 2.5.2. Нека је дата квадратна табла формата $n \times n$ (која се за $n = 8$ своди на шаховску таблу).



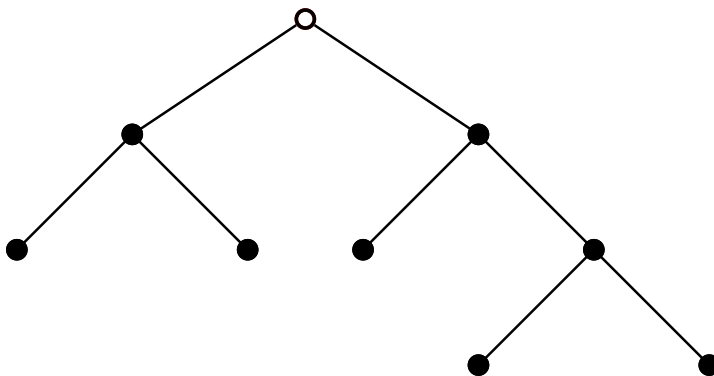
Пут који полази из доњег левог угла табле, завршава у горњем десном, а креће се по ивицама поља без пресецања дијагонале (између та два угла) и без кретања улево и наниже, називамо монотони пут (видети слику).

Оно што је интересантно је да је број монотоних путева на описаној табли формата $n \times n$ једнак двострукој вредности Каталановог броја C_n . Да бисмо се уверили у то, најпре приметимо да је број путева који се налазе испод дијагонале једнак броју путева који се налазе изнад (симетрични су у односу на дијагонали). Сада је довољно приметити да кретање удесно дуж ивице једног поља у путу испод дијагонале одговара једној левој загради у коректном распореду, док кретање навише (такође, дуж ивице једног поља) одговара десној загради. На пример, илустровани пут даје распоред $((\))((\))((\))((\))$.

Дефиницију стабла и, посебно, коренског стабла даћемо касније у Пододељцима 3.2.1 и 3.2.2. У наредном примеру ограничићемо се на потпуна коренска бинарна стабла која се могу рекурзивно дефинисати на следећи начин. Нека је дат коначан скуп објеката које називамо чворови и релација поретка *наследник* дефинисана на том скупу. Тада се *позиционо позиционо коренско бинарно стабло* састоји од

- једног чвора (који називамо *корен*) или
- два потпуна коренска бинарна стабла и једног додатног чвора таквих да су по дефиницији оба корена два стабла наследници новог чвора (који тиме постаје јединствени корен, док два стабла постају подстабла новог стабла).

У складу са дефиницијом, свако коренско бинарно стабло има јединствени корен. Чворове таквог стабла који немају наследнике називамо *лиштови*. Пример једног потпуног коренског бинарног стабла илустрован је на Слици 2.2.



Слика 2.2: Потпуно коренског бинарно стабло. Корен је илустрован другачије од осталих чворова.

Приметимо да сваки чвор који није лист има тачно два наследника, те у складу са тим наследнике сваког таквог чвора можемо уредити (на произвољан начин) тако што ћемо једног назвати левим наследником, а другог десним. Потпуно коренско бинарно стабло са таквим уређењем називамо *позиционо позиционо коренско бинарно стабло*. У том случају, можемо говорити и о левом и десном (позиционом) потпуном коренском бинарном подстаблу.

Напомена 2.5.3. Дефиниција потпуног коренског бинарног стабла може се уопштити на произвољно потпуно k -арно стабло (у случају бинарног, важи $k = 2$). Такође, термин „потпуно” у истој дефиницији

сугерише да сваки чвор који није лист има два наследника. У Пододељку 3.2.2 вратићемо се овим стаблима и том приликом дати општију дефиницију у складу са којом у коренском бинарном стаблу сваки чвор који није лист има највише два наследника. Таква коренска бинарна стабла некада се називају непотпуним, док се у таквој ситуацији у претходној дефиницији термин „потпуно“ изоставља.

Ево најзад и примера.

Пример 2.5.4. Оно што је интересантно је да је, за $n \geq 0$, број позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији број листова износи $n+1$ једнак Каталановом броју C_n . Заиста, коректне низове заграда такође можемо дефинисати рекурзивно:

- празан низ заграда је коректан и
- ако су Z_1 и Z_2 коректни низови заграда онда је и низ $(Z_1)Z_2$ такође коректан.

Рекурзивна дефиниција коректног низа заграда и дефиниција позиционог потпуног коренског бинарног стабла јасно сугеришу бијективну кореспонденцију између скупа који садржи све коректне распореде n парова заграда и скупа који садржи сва таква стабла чији је број листова једнак $n + 1$:

- празан низ заграда пресликава се у стабло које се састоји од једног чвора и
- ако се коректни низови заграда Z_1 и Z_2 пресликавају у стабла T_1 и T_2 , онда се низ $(Z_1)Z_2$ пресликава у стабло које се добија увођењем новог чвора (корена) чији су леви и десни наследник редом корени стабала T_1 и T_2 .

Задаци

1. Одредити све коректне распореде 6 парова заграда који почињу са тачно две отворене заграде.
2. Конструисати позиционо потпуно коренско бинарно стабло које одговара низу заграда $((())())(())$.
3. Конструисати сва позициона потпуна коренска бинарна стабла која имају 6 листова.

Теорија графова

Теорија графова је релативно нова математичка област. Иако се са нечим што називамо графом можемо сусрести и у ранијим резултатима (видети почетак Одељка 3.5), значајнији развој теорије јавља се у другој половини XIX века. За ову теорију карактеристична је широка примена у рачунарским, физичким, хемијским, биолошким, техничким, економским, организационим, социјалним и другим наукама. Више детаља може се пронаћи у [16, 17, 22], а неке примене навешћемо и у оквиру овог дела књиге.

У ономе што следи бавићемо се делом теорије графова који се ослања и надовезује на неке од садржаја Дела 1. Излагање ћемо започети основним појмовима, а затим ћемо се упознати са неким типовима графова. Након тога постепено ћемо се упознавати са многим предметима изучавања ове теорије. Посебну пажњу посветићемо алгоритмима и њиховим применама.

3.1 Основни појмови

У оквиру овог одељка упознаћемо се са свим типовима графова које ћемо касније изучавати. Објаснићемо када за графове кажемо да су изоморфни и дефинисати инваријанте графа. Навешћемо низ других дефиниција и примера, а излагање ћемо закључити матричним репрезентацијама графова.

Претпостављамо да читалац има неку представу о графовима (то јест, да му је познато да се ради о неким дискретним структурама које се састоје од чворова повезаних гранама). У применама, чворови репрезентују неке објекте (који могу бити географске локације, једи-

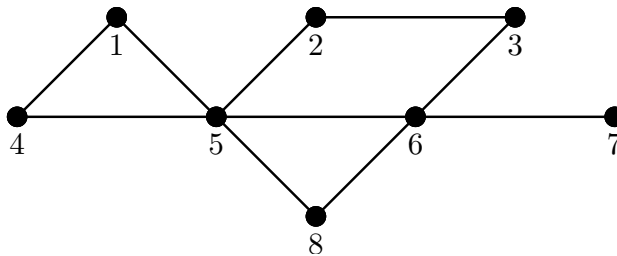
нице организационог система, делови хемијског једињења, особе или групе особа, и слично), а гране релације између тих објеката при чему постојање релације зависно од ситуације може представљати географску повезаност, комуникациони канал, могућност трансфера робе, и слично.

Посебно, многи проблеми са којима се сусрећемо у рачунарству могу се моделирати графовима. Неки од њих су конструкција рачунарских мрежа, организација и заштита података, развој вештачке интелигенције, проток информација, анализа слика и препознавање облика, сложеност алгоритама, кодирања и израчунавања. На пример, структура целокупне интернет мреже може бити представљена графом тако да је свака појединачна локација представљена нечим што називамо чвор графа, а уколико су локације повезане хиперлинковима тада су одговарајући чворови графа повезани гранама. У складу овим примером, јасно је да алгоритми који се разматрају у оквиру теорије графова представљају значајну целину теорије алгоритама. Следе формалне дефиниције и нотација.

3.1.1 Типови графова

Прост *џраф* или само *џраф* је уређени пар $G = (V, E)$ који се састоји од скупа V чије елементе називамо *чворови* и скупа E који чине двочлани подскупови скупа чворова, а чије елементе називамо *џране*. Уколико је потребно назначити о којем графу се ради, скуп чворова и скуп грана означаваћемо и са $V(G)$, односно $E(G)$.

Сматраћемо да је скуп чворова графа непразан и коначан. У таквој ситуацији број чворова графа означавамо са n ($n \in \mathbb{N}$), док број грана означавамо са m ($m \in \mathbb{N}^*$).



Слика 3.1: Пример (простог) графа.

Дакле, граф је једна релациона математичка структура чији се чворови u и v налазе у релацији уколико скуп E садржи елемент $\{u, v\}$. У раду са графовима ретко када се користи скуповна терминологија из претходне дефиниције и одговарајућа нотација, а граф се најчешће

представља графички (отуда му и назив). На Слици 3.1 илустрован је граф $G = (V, E)$, при чему су скупови V и E дати са

$$V = \mathbb{N}_8 \text{ и}$$

$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}\}.$$

У складу са оваквим приступом, кажемо да грана *сјаја* два чвора којима је одређена, док за такве чворове кажемо да су *суседни*. За грану која спаја два чвора кажемо да је *инцидентна* са сваким од њих, а те чворове називамо *крајевима* гране. За гране инцидентне са истим чвором кажемо да су *суседне*.

Чворове графа ћемо, у зависности од контекста, означавати неким од ознака

$$u, v, w, \dots, v_1, v_2, v_3, \dots, 1, 2, 3, \dots,$$

а гране неким од ознака

$$e, f, g, \dots, e_1, e_2, e_3, \dots, uv, uw, vw, \dots, 1, 2, 3, \dots, 12, 13, 23, \dots$$

Стејен чвора u , у ознаци d_u , једнак је броју грана инцидентних са тим чвором. *Околином чвора* u , у ознаци $N(u)$, називамо скуп свих чворова суседних том чвору. *Минимални стејен чвора* у графу означавамо са δ , а *максимални стејен чвора* са Δ .

У наставку ћемо користити следеће ознаке. Уколико је u произвољан чвор, а e произвољна грана графа G , онда са $G - u$ означавамо граф који се добија уклањањем чвора u (и свих грана инцидентних са њим) из G и, слично, са $G - e$ означавамо граф који се добија уклањањем гране e . Исто тако, уколико e није грана графа G , тада $G + e$ означава неки граф који се добија њеним додавањем графу G .

Поред простих графова постоје још неки типови графова. Уместо формалних дефиниција даћемо њихове описе и један пример.

Граф са њељма допушта постојање грана чија су оба краја један исти чвор.

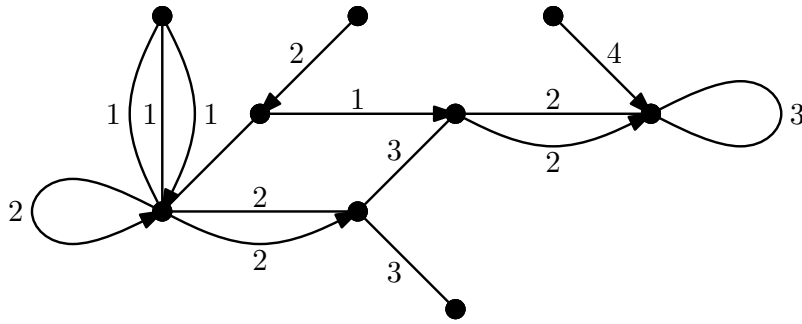
Мултиграф је граф у којем је допуштено постојање више грана између два чвора. (У некој литератури мултиграфови обухватају и графове са петљама.)

Тежински граф је граф чијој је свакој грани придружена нека нумеричка вредност. Ту нумеричку вредност називамо *тежина* гране. Прост граф може бити разматран као специјалан случај тежинског графа чије све гране имају тежину 1.

Усмерени граф (у некој литератури, *оријентисани* граф или *диграф*) је тип графа чија свака грана може поседовати усмерење од једног чвора са којим је инцидентна ка другом таквом чвору. Улога усмерења зависи од контекста. Најчешће, чвор од којег иде усмерење је у релацији са чвором ка којем иде, али не и обратно. У таквом контексту,

грана без усмерења је (подразумевано) двосмерна. Грану усмереног графа која је усмерена од чвора u ка чвору v разматраћемо као уређени пар (u, v) .

Пример 3.1.1. Наравно, могуће су и комбинације споменутих типова графова, па тако на пример можемо говорити о усмереном тежинском мултиграфу са петљама. На слици је илустрован један такав граф.



Напомена 3.1.2. У наставку текста, када год кажемо „граф” имаћемо у виду прост граф дефинисан на почетку пододељка. У складу са тим, све дефиниције и тврђења односе се на (просте) графове, изузев ако није другачије наглашено! Многа тврђења могу се уопштити и на остале типове графова или већ важе за неке од њих.

Следе два једноставна тврђења.

Теорема 3.1.3. Сума степена чворова графа једнака је двоструком броју грана, што јесте важи једнакост

$$\sum_{i=1}^n d_{u_i} = 2m.$$

Доказ. Приликом сумирања ових сабирака, сваку грану бројимо тачно два пута, те отуда следи тражена једнакост. ■

Теорема 3.1.4. Број чворова нејарној степена графа није нејаран.

Доказ. На основу претходне теореме, сума степена свих чворова није непарна. Пошто исто важи и за суму парних степена, закључујемо да и сума непарних степена такође није непарна. ■

Претходне две теореме важе за све типове графова изузев оних који садрже петље. Наиме, у складу са дефиницијом степена чвора, петља увећава степен чвора са којим је инцидентна (а тиме и суму степена свих чворова) за 1, док грана која није петља исту суму увећава за 2.

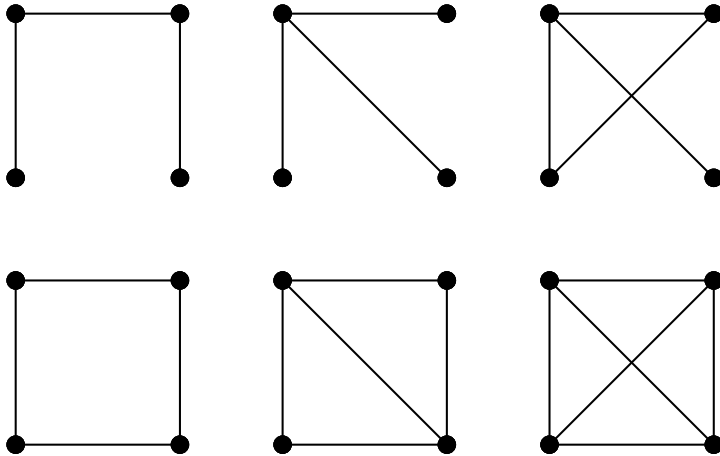
3.1.2 Изоморфизми графова и инваријанте

За графове G и H кажемо да су *изоморфни* уколико постоји бијективно пресликавање скупа чворова једног на скуп чворова другог које чува суседства између чворова. Практично, графови су изоморфни уколико се разликују само у означавању чворова.

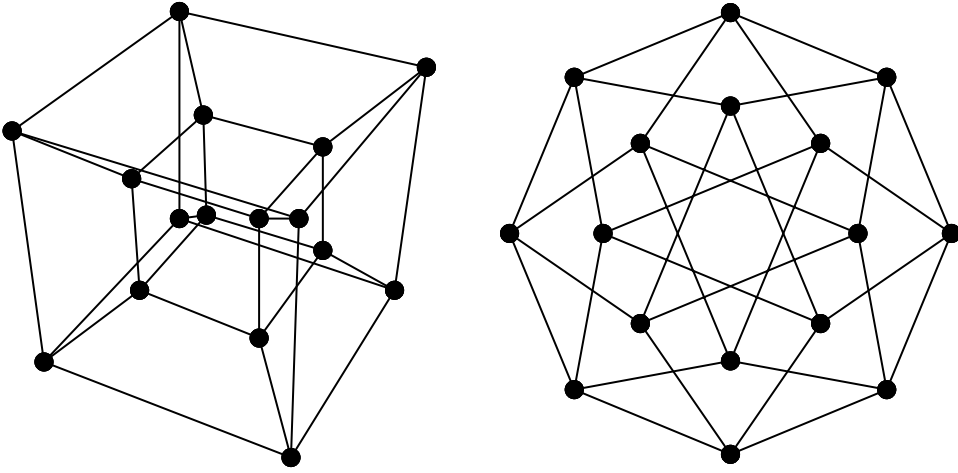
Напомена 3.1.5. У некој литератури заступљен је нешто другачији приступ у складу са којим су изоморфни графови идентификовани (то јест, изоморфни графови разматају се као један исти граф). Јасно је да између два приступа нема крупних разлика и да се оне свде на разлике у терминологији.

Пример 3.1.6. Дефиниција повезаног графа дата је у наставку, прецизније на страни 132. У овом тренутку рећи ћемо да је граф повезан уколико се од сваког чвора може доћи до било којег другог чвора „крећући“ се по гранама тог графа. У супротном, граф је неповезан.

Сви неизоморфни повезани графови са 4 чвора илустровани су на слици.



Графове из претходног примера одредили смо водећи се једноставном логиком, док у општем случају испитивање изоморфности два графа није једноставно. На Слици 3.2 илустрована су два изоморфна графа чији је заједнички назив *четвородимензиона коцка*. Општије, граф чији се скуп чворова састоји од свих уређених бинарних k -торки и чија су чворови суседни ако и само ако се одговарајуће k -торке разликују тачно у једној координати називамо *k -димензиона коцка*.



Слика 3.2: Четвородимензиона коцка (преузето из [30]).

Са порастом броја чворова број неизоморфних графова брзо расте. У следећој табели дат је број неизоморфних повезаних графова са највише 10 чворова:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#	1	1	2	6	21	112	853	11 117	261 080	11 716 571

Инваријанца графа је функција дефинисана на скупу графова која има исту вредност за све изоморфне графове. Инваријанте графова предмет су широких истраживања, а до сада смо се већ сусрели са неким од њих. На пример, то су број чворова n , број грана m , минимални степен чвора δ или максимални степен чвора Δ . У ономе што следи сретaćемо се са многим другим инваријантама.

Подграф графа $G = (V, E)$ је граф $G' = (V', E')$ чији је скуп чворова подскуп скупа чворова графа G , а скуп грана подскуп скупа грана истог графа, то јест важи

$$V' \subseteq V, E' \subseteq E.$$

Неформално, кажемо да граф G садржи граф G' и да се G' налази у G .

Индуковани подграф графа $G = (V, E)$ добија се уклањањем произвољног скупа чворова графа G (тима и грана инцидентних са њима). Сваки индуковани подграф истовремено је и подграф, док обратно не важи.

Комплемент графа $G = (V, E)$ је граф $G = (V, \bar{E})$ који има исти скуп чворова V и у којем су чворови суседни ако и само ако нису суседни у графу G . За граф кажемо да је *самокомплементарни* уколико је изоморфан свом комплементу. Читалац се може уверити да је у Примеру 3.1.6 наведен један самокомплементарни граф.

3.1.3 Шетње, стазе и путеви

Шетња у графу је низ облика $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k)$ чији су чланови наизменично чворови и гране тог графа такви да је грана e_i инцидентна са чворовима v_i и v_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$). Кажемо да шетња повезује (или спаја) чворове v_1 и v_k . Шетња је *затворена* ако важи $v_1 = v_k$, а у супротном је *отворена*. *Дужина шетње* једнака је броју грана које садржи. Неформално, кажемо да шетња пролази чворовима и гранама које садржи. Приметимо да шетња истим чвором или истом граном може проћи више пута.

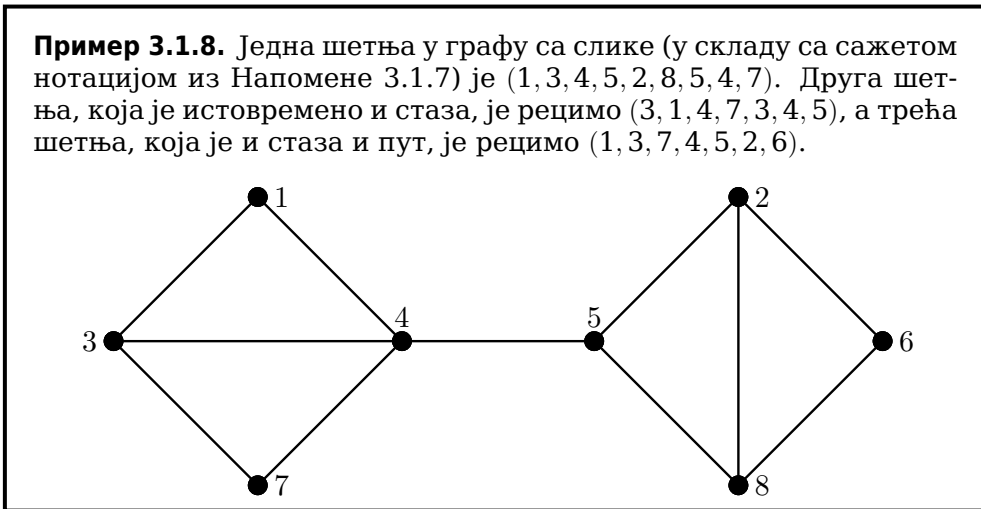
Напомена 3.1.7. Шетњу у графу најчешће ћемо означавати онако како смо то учинили у претходној дефиницији, дакле навођењем чворова и грана. Уколико гране шетње не играју улогу у контексту у којем се она разматра, користимо и сажету нотацију облика (v_1, v_2, \dots, v_k) , при чему се подразумева да су чворови који су суседни у низу суседни и у разматраном графу.

Стаза у графу је шетња која сваком граном пролази највише једанпут (произвољним чвором може проћи и више пута).

Пуџ у графу је шетња која сваким чвором (тимае, и сваком граном) пролази највише једанпут.

Слично, *џуџ* у *усмереном графу* (или *усмерени џуџ*) одређен је низом различитих чворова (v_1, v_2, \dots, v_k) таквим да тај усмерени граф садржи гране (v_i, v_{i+1}) , за $1 \leq i \leq k-1$. Са путевима у усмереним графовима нећемо се сретати пре Одељка 3.10.

Пример 3.1.8. Једна шетња у графу са слике (у складу са сажетом нотацијом из Напомене 3.1.7) је $(1, 3, 4, 5, 2, 8, 5, 4, 7)$. Друга шетња, која је истовремено и стаза, је рецимо $(3, 1, 4, 7, 3, 4, 5)$, а трећа шетња, која је и стаза и пут, је рецимо $(1, 3, 7, 4, 5, 2, 6)$.



Повезаност графа неформално смо увели у Примеру 3.1.6. Формална дефиниција не разликује се много. Дакле, за два чвора графа

кажемо да су *повезани* уколико постоји пут који их повезује. У супротном, чворови су *неповезани*. За граф кажемо да је *повезан* уколико су сви чворови тог графа међусобно повезани. У супротном, граф је *неповезан*.

Приметимо да је повезаност чворова једна релација еквиваленције дефинисана на графу. Класе еквиваленције у односу на ту релације називамо *компоненте повезаности графа*. Следе још неке дефиниције.

Везивни чвор графа је чвор чијим се уклањањем број компонената повезаности увећава. *Мост* (или *везивна грана*) графа је грана уклањањем које се број компонената повезаности увећава (за 1). Посебно, везивни чвор и мост повезаног графа су редом чвор и грана чијим уклањањем граф постаје неповезан. Такав чвор и грана не морају да постоје.

Распојање између два чвора u и v графа G , у ознаци $\text{dist}(u, v)$, једнако је дужини најкраћег пута који их повезује. Сматраћемо да је растојање између два чвора који нису повезани бесконачно.

Ексцентрицитет чвора u , у ознаци $\text{ecc}(u)$, једнак је растојању између тог чвора и чвора који се налази на максималном растојању од њега, то јест

$$\text{ecc}(u) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid v \in V\}.$$

Радијус графа G , у ознаци $r(G)$, једнак је минималном ексцентрицитету чвора тог графа, то јест

$$r(G) = \min\{\text{ecc}(u) \mid u \in V\}.$$

Центар графа чине сви чворови чији је ексцентрицитет једнак радијусу графа.

Дијаметар графа G , у ознаци $\text{diam}(G)$, једнак је максималном ексцентрицитету у том графу, то јест

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{ecc}(u) \mid u \in V\}.$$

Повезаност, радијус и дијаметар су инваријанте графа.

3.1.4 Неки графови

Празан граф је граф који нема грана. Такав граф који се састоји само од једног чвора називамо *тривијалан граф*.

Комплетан (или *попуњен*) *граф* је граф чија су свака два чвора спојена граном. Комплетан граф који има n чворова означавамо са K_n .

Регуларан граф је граф чији чворови имају једнаке степене. Рецимо, празни и комплетни графови су регуларни. Регуларни графови предмет су многих истраживања. Имају широку примену у теорији кодова, конструкцији комплексних мрежа, електротехници и хемији. На основу Примера 3.1.6, закључујемо да постоје тачно два неизоморфна повезана регуларна графа која имају 4 чвора. Познат је број таквих

графова и у случају већег броја чворова. Рецимо, повезаних регуларних графова са 10 чворова има 167, а са 16 чворова 1 698 517 036 411.

Бипартићан граф је тривијалан граф или граф чији се скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа (дакле, у складу са дефиницијом партиције скупа која је дата на страни 102), тако да свака грана тог графа спаја чвор из једног подскупа са чвором из другог подскупа. Приметимо да је сваки празан граф истовремено и бипартићан; будући да нема грана, његови чворови могу се, на произвољан начин, распоредити у два дисјунктна скупа.

Комплетан бипартићан граф је бипартићан граф код којег је сваки чвор из једног скупа партиције суседан свим чворовима из другог скупа. Степен сваког чвора из једног скупа једнак је броју чворова другог скупа. Комплетан бипартићан граф означавамо са K_{n_1, n_2} , при чему n_1 и n_2 означавају кардиналности скупова партиције.

Звезда је комплетан бипартићан граф за који важи $n_1 = 1$.

Циклус је повезан граф код којег је степен сваког чвора једнак 2. Циклус који има n чворова означавамо са C_n .

Пућ је граф дефинисан на следећи начин:

- за $n \leq 2$ то је једини повезан граф са n чворова, а
- за $n \geq 3$ то је граф који се добија уклањањем једне гране циклуса C_n .

Пут који има n чворова означавамо са P_n .

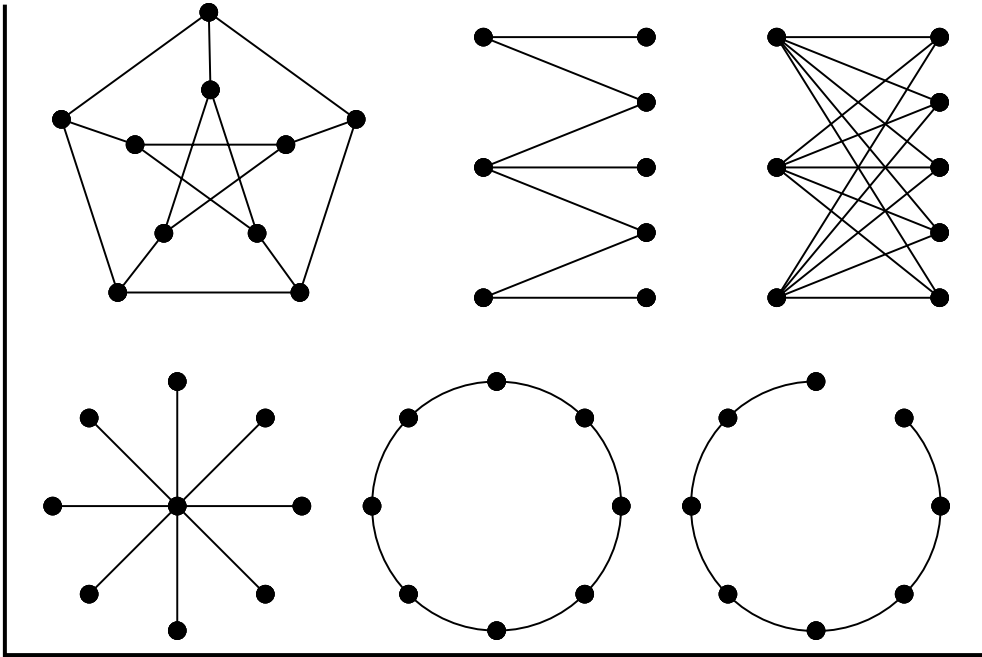
Дужина циклуса и *дужина пућа* једнаке су броју грана у сваком од њих.

Приметимо да пут у графу (у смислу раније дефиниције пута као специјалног случаја шетње у графу дате на страни 131) одређује индуковани подграф који је пут (у смислу претходне дефиниције).

Јасно је да за $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један празан граф, комплетан граф, циклус и пут са n чворова (у случају циклуса, мора важити $n \geq 3$). Слично, за $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један комплетан бипартићан граф K_{n_1, n_2} .

Пример 3.1.9. На слици се редом налазе један регуларан граф чији су сви чворови степена 3 (овај граф познат је као *Пејерсенов*²⁵ *граф*), пример бипартићног графа, комплетан бипартићан граф $K_{3,5}$, звезда $K_{1,8}$, циклус C_8 и пут P_8 .

²⁵Јулијус Петер Кристијан Петерсен (Julius Peter Christian Petersen, 1839–1910) – дански математичар.



Пододелањак ћемо закључити једном одредницом бипартитних графова.

Теорема 3.1.10. *Граф је бипартитан ако и само ако не садржи циклус непарне дужине (као подграф).*

Доказ. Ако би бипартитан граф садржао циклус непарне дужине, онда би свака два суседна чвора тог циклуса припадала различитим скуповима партиције чворова, међутим то није могуће будући да циклус садржи непаран број чворова.

Претпоставимо сада да је граф повезан и да не садржи циклус непарне дужине. Извршићемо разврставање чворова графа у два скупа тако да чворови који припадају истом скупу нису суседни. Најпре произвољан чвор, рецимо u , додајемо у први скуп. Затим све чворове који су на непарном растојању од чвора u додајемо у други скуп, а све оне који су на парном растојању у први. Уколико, након завршетка ове процедуре, међу чворовима истог скупа нема суседних, граф је бипартитан.

У супротном, догодиће се да су два чвора, која су или оба на непарном или оба на парном растојању од u , суседни. У том случају, комбиновањем најкраћих путева од чвора u до сваког од тих чворова и гране која их спаја, добијамо циклус непарне дужине, што је у супротности са претпоставком.

Ако је граф неповезан, онда претходну процедуру треба применити на сваку од компонената повезаности. ■

3.1.5 Матричне репрезентације графова

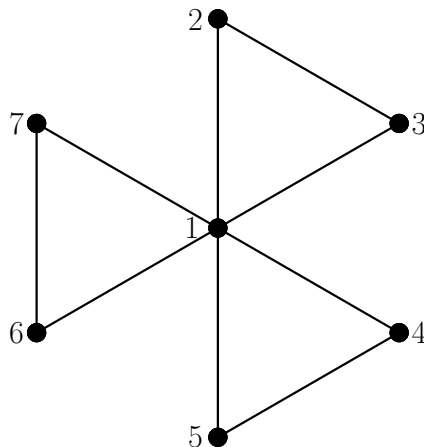
Има више начина записивања графова у рачунарским системима, а скоро сви су засновани на различитим навођењима суседстава између чворова. Један такав запис јесте матрични запис. Нека су надаље v_1, v_2, \dots, v_n чворови, а e_1, e_2, \dots, e_m гране, графа G .

Матрица суседства графа G , у ознаци $A(G)$, је матрица формата $n \times n$ у којој је елемент на позицији (i, j) једнак 1 уколико су чворови v_i и v_j суседни, а у супротном 0. Матрица суседства је очигледно симетрична. Приметимо да матрица суседства није инваријантна графа. Ипак, матрице суседства изоморфних графова су сличне (што није тешко доказати).

Матрица инциденције графа G , у ознаци $R(G)$, је матрица формата $n \times m$ у којој је елемент на позицији (i, j) једнак 1 уколико је чвор v_i инцидентан са граном e_j , а у супротном 0. Свака колона матрице инциденције садржи тачно две јединице.

Пример 3.1.11. Матрица суседства графа са слике чија i -та врста и колона одговарају чвору нумерисаном са i ($1 \leq i \leq 7$) и једна матрица инциденције истог графа одређена на сличан начин редом су дате са

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



На почетку пододељка рекли смо да се дефинисане матрице користе за запис графова у рачунарским системима. То је тачно, иако можемо приметити да оне дају више информација него што је потребно. На пример, граф можемо одредити само на основу, рецимо, горњег троугла матрице суседства. Ипак, овакви записи имају и неке предности. Наиме, придружена матрица садржи низ информација о структури и инваријантима графа. Такође, неке трансформације графа могуће је дефинисати операцијама над одговарајућим матрицама. Постоји читава област теорије графова која се назива спектрална теорија и која се бави изучавањем матрица суседства (или неких других квадратних матрица које су придружене графовима) и реалних бројева који су одређени њима. Такви бројеви називају се сопствене вредности и чине мултискуп који се назива *спектар графа*. На спектралној теорији графова се нећемо задржавати, а више о њој може се пронаћи у [11], а о њеним применама у рачунарству у [10]. (Интересантно је, рецимо, да је интернет претраживач Гугл заснован на резултатима ове теорије.)

Задаци

1. Доказати да не постоји регуларан граф са непарним бројем чворова и непарним степеном чвора.
2. Доказати да за сваки повезан граф важи $m \geq n - 1$. Навести пример графа за који се достиже једнакост. Колико грана има комплетан граф K_n , а колико комплетан бипартитан граф $K_{n_1 n_2}$?
3. На коктељу се налази n брачних парова. Ако се свако од присутних руковао са свима осим са својим супружником, колико је укупно руковања било? Формирати одговарајући граф чији су чворови суседни ако и само ако су се одговарајуће особе руковале. (Овакав граф називамо *кокшелски граф*.)
4. Навести пример повезаног регуларног графа који има 100 чворова степена 4.
5. Доказати да за сваки комплетан бипартитан регуларан граф K_{n_1, n_2} који није празан граф важи једнакост $n_1 = n_2$.
6. Доказати да је k -димензиона коцка један бипартитан регуларан граф степена k који има 2^k чворова и $k2^{k-1}$ грана.
7. Доказати да не постоји граф чији су сви чворови различитог степена. Конструисати повезан граф са 8 чворова чији су степени редом 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6 и 7.

8. Навести пример повезаног бипартитног графа у којем сви чворови у сваком од скупова партиције имају различит степен. Извести општи закључак.

9. Одредити све неизоморфне повезане графове са 5 чворова код којих је минимални степен чвора већи од 1.

10. Одредити све неизоморфне повезане регуларне графове са 8 чворова.

11. Доказати да је најмање један од графова G, \bar{G} повезан.

12. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један коктелски граф (дефинисан у задатку 3) који има $2n$ чворова.

13. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један повезан граф чији су степени чворова редом дати са

$$1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n - 2, n - 1$$

(упоредити задатак 7).

14. Доказати да за свако $k \geq 2$, k -димензиона коцка садржи индуковани подграф изоморфан $(k - 1)$ -димензионој коцки.

15. Доказати да број чворова регуларног самокомплементарног графа једнак $4k + 1$, за $k \geq 0$. Доказати да је циклус C_5 , до на изоморфизам, једини такав граф са 5 чворова и одредити све такве графове са 9 чворова.

16. Доказати да регуларан граф степена 3 садржи везивни чвор ако и само ако садржи мост.

17. Доказати да дијаметар самокомплементарног графа није већи од 3.

18. Израчунати ексцентрицитет сваког чвора, радијус и дијаметар Петерсеновог графа и k -димензионе коцке.

19. Доказати да за сваки граф важи идентитет

$$RR^T = A + D,$$

при чему је R матрица инциденције, R^T њен транспонат, A матрица суседства, а D одговарајућа дијагонална матрица са степенима чворова на главној дијагонали.

20. Доказати да је елемент који се налази на позицији (i, j) у матрици A^k (при чему је A матрица суседства графа) једнак броју шетњи дужине k које полазе из чвора v_i , а завршавају у чвору v_j тог графа.

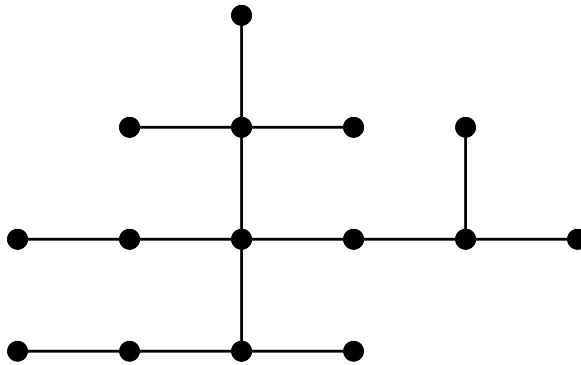
4

3.2 Стабла

У овом одељку упознаћемо се са графовима које називамо стаблима. Посебно ћемо размотрити коренска и разаципућа стабла и навешћемо два алгоритма за претраге графова. Излагање које следи представља теоријску основу за алгоритме које ћемо презентовати у наредна два одељка.

3.2.1 Дефиниција и основна својства

Стабло је повезан граф који не садржи подграф изоморфан циклусу. Пример једног стабла дат је на Слици 3.3.



Слика 3.3: Пример стабла.

Број неизоморфних стабала са највише 14 чворова дат је у следећој табели:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
#	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551	1301	3159

Неповезан граф чија је свака компонента повезаности стабло називамо *шума*. Следе нека својства стабала.

Теорема 3.2.1. *Следећа шврђења су еквивалентна.*

- (1) T је стабло.
- (2) T је повезан граф код којег је број ирана за 1 мањи од броја чворова, што јесте важи

$$m = n - 1.$$

- (3) T је максимални граф без циклуса (у смислу да додавањем било које иране настаје циклус).

(4) T је минимални повезан граф (у смислу да уклањањем било које иране постојаје неповезан).

(5) За свака два чвора графа T постоји тачно један пут који их повезује.

Доказ. (1) \Rightarrow (2) Претпоставимо да импликација важи за сва стабла са највише n чворова и нека је број чворова стабла T једнак $n + 1$. У њему постоје два чвора која се налазе на максималном растојању и ти чворови морају бити степена 1. (У супротном, или нису на максималном растојању или у графу постоји циклус.) Уклањањем било којег од та два чвора добијамо стабло са n чворова и (по претпоставци) $n - 1$ грана. Будући да смо уклањањем чвора уклонили и тачно једну грану инцидентну са њим, стабло T има n грана.

(2) \Rightarrow (3) Најпре, разматрани граф нема циклуса, иначе бисмо уклањањем гране која припада неком циклусу добили повезан граф са истим бројем чворова, али са једном граном мање, што није могуће будући да граф са тим бројем грана не може бити повезан. (Ово је једноставан индуктивни закључак. Видети и задатак 2 из претходног одељка.) Будући да је T повезан граф, за свака два чвора постоји пут који их повезује. Уколико додамо једну грану, на пример између чворова u и v , тада она заједно са путем који их повезује чини циклус.

(3) \Rightarrow (4) Ако је T максимални граф без циклуса, онда он мора бити повезан. (У супротном, могли бисмо додати грану између чворова који се налазе у различитим компонентама и на тај начин формирати граф са већим бројем грана који такође нема циклуса.) Ако сада уклонимо једну грану из графа T , онда он не може остати повезан јер би у том случају постојао пут који повезује чворове између којих је управо уклоњена грана, па би тај пут и та грана чинили циклус у полазном графу.

(4) \Rightarrow (5) Претпоставимо да за нека два чвора постоје два пута која их повезују. У том случају (пошто су ти путеви различити), постоји грана која припада првом од њих, а не припада другом. Уклањањем те гране добијамо граф са мањим бројем грана који је такође повезан (наиме, и даље за свака два чвора постоји пут који их повезује захваљујући постојању два пута између разматраних чворова), што противуречи претпоставци (4).

(5) \Rightarrow (1) Граф за који важи претпоставка (5) по дефиницији је повезан. Уколико би такав граф садржао циклус, тада би за свака два чвора која припадају циклусу постојала два пута који их повезују (оба пута се налазе у том циклусу), што није у складу са претпоставком (5). ■

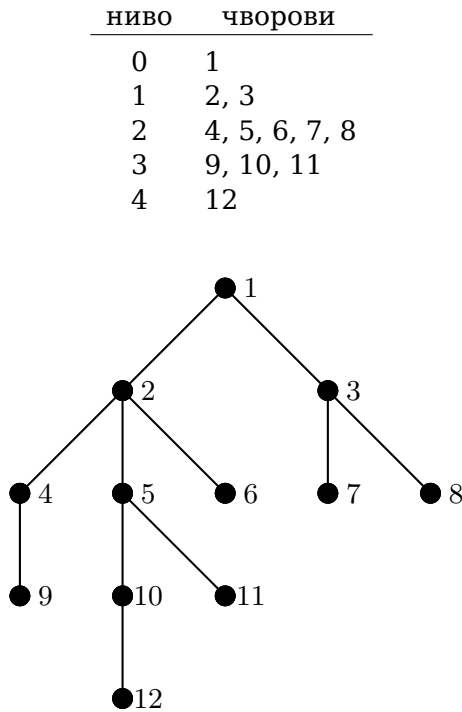
У наставку ћемо размотрити две врсте стабала: коренска и разаципиња.

3.2.2 Коренска и разapiњућа стабла

Коренско сiабло је стабло чији је један чвор издвојен од осталих. Тај чвор називамо *корен*.

Међу чворовима коренског стабла постоји одређена хијерархија и пратећа терминологија. Нека је T коренско стабло чији је корен чвор r . За чвор u , за који важи $\text{dist}(u, r) = i$, кажемо да припада i -том нивоу стабла T . Ако чвор u припада i -том нивоу, а чвор v припада $(i + 1)$ -ом нивоу и ако су та два чвора суседни, онда чвор u називамо *преiходником* чвора v , а чвор v називамо *наследником* чвора u . Чвор који нема наследника називамо *лист*. Чвор који није ни корен ни лист називамо *унушрашњи чвор*.

Пример 3.2.2. На слици је илустровано једно коренско стабло са распоредом чворова по нивоима.



Јасно, чвор 1 је корен, чворови 6, 7, 8, 9, 11 и 12 су листови, а остали чворови су унутрашњи.

Коренско k -арно сiабло је коренско стабло чији сваки чвор има највише k наследника. *Поiшyно коренско k -арно сiабло* је коренско стабло чији сваки чвор који није лист има тачно k наследника. Са ова-

квим стаблима већ смо се сусрели у Одељку 2.5. У том тренутку још увек нисмо имали дефиницију графа нити својства стабла дата у Теорему 3.2.1, па смо применили другачији приступ. Тамошња рекурзивна дефиниција потпуног коренског k -арног стабла (видети Напомену 2.5.3) еквивалентна је овој.

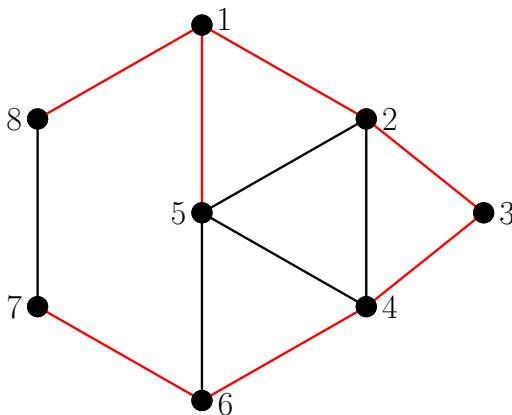
Прелазимо сада на стабла из другог дела наслова пододељка. Најпре ћемо дати општију дефиницију разапињућег графа.

Разапињући граф графа G је граф који има исти скуп чворова као G и чији је скуп грана подскуп скупа грана графа G . Очигледно је сваки разапињући граф један подграф графа G .

У складу са претходном дефиницијом, *разапињуће стабло* повезаног графа је разапињући граф који је стабло. Слично, *разапињућа шума* неповезаног графа је разапињући подграф који се састоји од разапињућих стабала компонената повезаности датог графа. Разапињућа стабла спадају међу подграфике који се највише изучавају, будући да у многим применама подграфови који су повезани и уз то имају минимални број грана играју значајну улогу. Јасно је да сваки повезан граф има разапињуће стабло (које не мора бити јединствено). У наставку ћемо искористити разапињућа стабла за дефиницију елементарних циклуса графа и цикломатичког броја графа.

Ако је T разапињуће стабло повезаног графа G , онда се додавањем произвољне гране стаблу T , при чему она припада остатку графа G , добија тачно један циклус у новонасталом графу. Тај циклус називамо *елементарни циклус* графа G у односу на разапињуће стабло T . Исто важи и уколико је T разапињућа шума неповезаног графа.

Пример 3.2.3. На слици је илустрован граф и једно његово разапињуће стабло (гране стабла илустроване су црвеном бојом). Додавањем гране 78 стаблу добијамо елементарни циклус који ћемо означити са 1234678.



Није тешко закључити да број елементарних циклуса повезаног графа не зависи од избора разапињућег стабла. Заиста, број грана сваког разапињућег стабла једнак је $n - 1$, а по дефиницији свака грана која припада графу, али не и фиксираном разапињућем стаблу, одређује један елементарни циклус. Према томе, у случају повезаног графа број елементарних циклуса једнак је $m - n + 1$. Важи и следећи, нешто општији, резултат који се рецимо може доказати индукцијом по броју компонената повезаности.

Теорема 3.2.4. *Број елементарних циклуса графа једнак је $m - n + p$, где је m број грана, n број чворова, а p број компонената повезаности графа.*

Цикломатички број графа, у ознаци ν , једнак је броју елементарних циклуса графа. Јасно, цикломатички број је једна инваријанта графа.

Пример 3.2.5. Одредити цикломатички број и све елементарне циклусе графа из Примера 3.2.3 у односу на назначено разапињуће стабло.

Применом Теореме 3.2.4, добијамо једнакост $\nu = m - n + p = 12 - 8 + 1 = 5$. Уз нотацију из претходног примера, елементарни циклуси су:

- 234, добијен додавањем гране 24,
- 125, добијен додавањем гране 25,
- 12345, добијен додавањем гране 45,
- 123465, добијен додавањем гране 56, и
- (већ споменути) 1234678, добијен додавањем гране 78.

3.2.3 Претраге графова

Претрага графа састоји се од селектовања једног по једног чвора графа тако да сваки буде селектован тачно једанпут, а у складу са неким правилом којим је одређен редослед селектовања. Уместо термина „селектовање чворова“, у складу распрострањеним приступом, користићемо термин „обилажење чворова“. Проблем претраге графа блиско је повезан са применама, наиме довољно је чворове схватити као репрезентације објеката које из неког разлога треба обићи. У ономе што следи ограничићемо се на повезане графове.

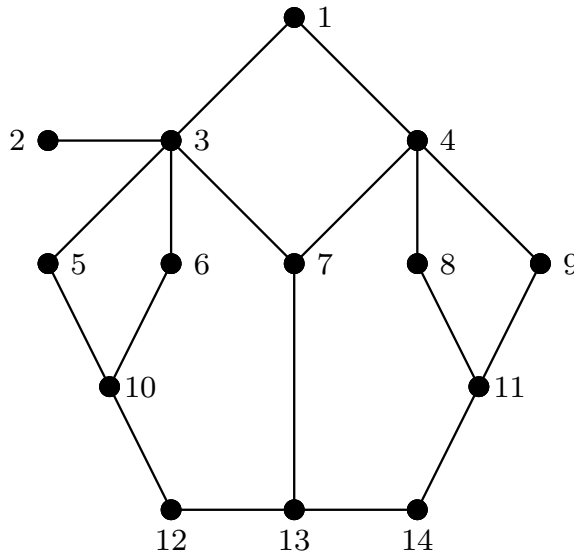
Код (вероватно) свих претрага, наредни чвор у обиласку суседни је неком чвору који је већ обиђен (тај чвор не мора бити последњи обиђени). У таквој ситуацији, граф чији су чворови чворови графа

који је предмет претраге, а чије су гране одређене претрагом, је једно разапинуће (усмерено) стабло датог графа. (Ускоро ћемо размотрити два примера након којих ће ово бити јасније.) Такво стабло називамо *стабло претраге*.

Објаснићемо две претраге, такозвану претрагу по дубини и претрагу по ширини графа. Обе претраге полазе од произвољног чвора, а одговарајуће алгоритме укратко ћемо описати.

Код *претраге по дубини* (енгл. depth first search, DFS), наредни чвор који обилазимо суседни је оном који је претходно обиђен, уколико је то могуће. Ако није, онда је суседни претходном од претходно обиђеног, и тако редом. Претрага у општем случају није јединствена, то јест пружа могућност избора која се углавном решава иницијалном нумерацијом чворова тако да, у случају више могућности, обилазимо чвор нумерисан најмањим бројем. Једна оваква претрага илустрована је следећим примером.

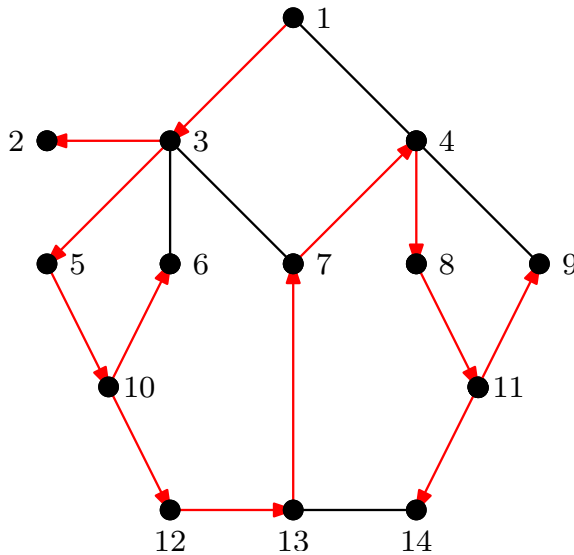
Пример 3.2.6. Извршићемо претрагу по дубини графа са слике. Да би претрага била јединствена, чворове графа нумерисали смо на произвољан начин, а претрагу ћемо започети од чвора нумерисаног са 1.



На следећој слици илустрован је резултат претраге. У складу са овом претрагом, други чвор који обилазимо је сусед чвора 1 који је нумерисан најмањим бројем, дакле 3. Према томе, назначили смо и грану која спаја чворове 1 и 3 и доделили јој усмерење

од чвора 1 ка чвору 3. На исти начин, наредни чвор је 2 (до којег смо стигли од чвора 3). Сада, будући да чвор 2 нема ниједног суседа који није обиђен, наредни чвор који обилазимо је сусед чвора који претходи чвору 2 (а то је 3) и уз то је нумерисан најмањим бројем, дакле то је чвор 5, и тако редом. Напослетку, сви чворови обиђени су у следећем редоследу:

1, 3, 2, 5, 10, 6, 12, 13, 7, 4, 8, 11, 9, 14.

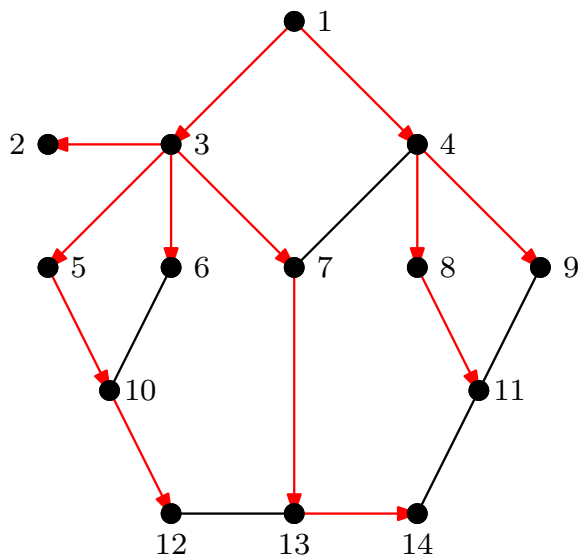


Код *претраге по ширини* (енгл. breadth first search, BFS), најпре обилазимо све суседе првог чвора, потом све (необиђене) суседе другог чвора (дакле, оног који је био други у редоследу обилажења), потом све (необиђене) суседе трећег чвора, и тако редом. Ни ова претрага у општем случају није јединствена што се може решити на већ описани начин.

Пример 3.2.7. На слици је илустрована једна претрага по ширини графа из Примера 3.2.6. Користили смо исту нумерацију чворова и поново започели претрагу од чвора нумерисаног са 1. Затим смо обишли све његове суседе, дакле редом чворове 3 и 4, потом необиђене суседе чвора 3, дакле редом чворове 2, 5, 6 и 7, и тако редом. Слично као у претходном примеру, редослед обилажења чворова је:

1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 11, 12, 14.

Стабло претраге назначено је на исти начин.



Задаци

1. Одредити сва неизоморфна стабла која имају 7 чворова.
2. Доказати да свако стабло садржи најмање два чвора степена 1.
3. Ако су d_1, d_2, \dots, d_n степени чворова неког стабла, доказати да важи једнакост

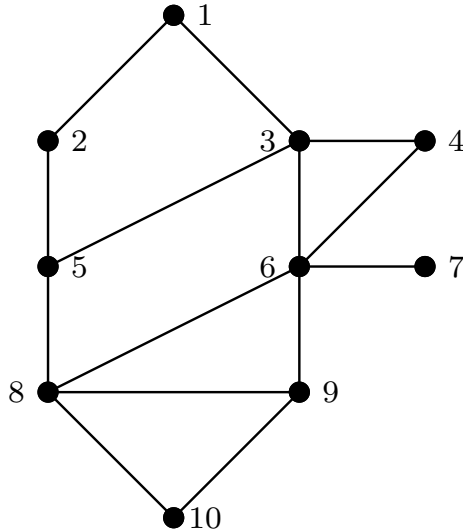
$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1).$$

4. Доказати Теорему 3.2.4.
5. Доказати да за цикломатички број ν повезаног графа који има n чворова важе неједнакости

$$0 \leq \nu \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

6. Одредити сва неизоморфна разапињућа стабла Петерсеновог графа. Израчунати цикломатички број тог графа?
7. Израчунати цикломатички број регуларног графа (који има n чворова) чији је степен чвора једнак r .

8. Претражити граф са слике обема претрагама (по дубини и по ширини), ако је почетни чвор нумерисан са 1.



9. Да ли постоји претрага по дубини графа из претходног задатка која резултује разапињућим стаблом које је изоморфно путу P_{10} ? Образложити.

3.3 Означена стабла

Раније смо рекли да су графови изоморфни уколико се разликују само у означавању чворова. У складу са тим, уколико означавање чворова у нашим разматрањима не игра никакву улогу, тада изоморфни графови практично представљају један исти граф.

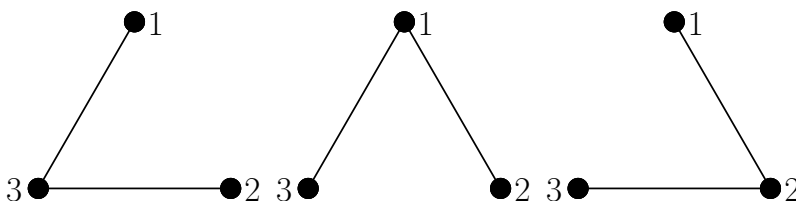
У овом одељку бавићемо се графовима, а највише стаблима, код којих означавање чворова игра есенцијалну улогу. Да бисмо то нагласили, такве графове назваћемо *означени графови*. Напомињемо да изоморфни графови остају изоморфни и уколико их разматрамо као означене, али се такви графови разликују уколико њихови чворови нису означени на исти начин.

У ономе што следи размотрићемо проблем пребројавања означених стабала и навести алгоритме за кодирање и декодирање таквих стабала.

3.3.1 Пребројавање означених стабала

Чворове означеног графа означаваћемо природним бројевима. У складу са тим, граф из Примера 3.2.6 и 3.2.7 може бити разматран као означени граф уколико тамошњу нумерацију чворова схватимо као њихово означавање.

Пример 3.3.1. Од раније знамо да, до на изоморфизам, постоји тачно једно стабло са 3 чвора. Са друге стране, број означених стабала са 3 чвора једнак је 3. Сва три стабла су изоморфна и илустрована су на слици.



Након краћег пребројавања, што овде нећемо радити, може се закључити да означених стабала са 4 чвора има 16.

У теорији графова не постоји ефективни начин за израчунавање броја неизоморфних графова са датим бројем чворова. Исто важи и за број неизоморфних стабала. У таквим пребројавањима користе се сложеније технике које резултују разним асимптотским оценама на којима се овде нећемо задржавати. Са друге стране, број означених стабала која имају једнак број чворова даје Кејлијева²⁶ теорема. Први доказ теореме дао је Прифер.²⁷ Ми ћемо је навести без доказа, а рецимо у књизи [31] дата су четири доказа ове теореме.

Теорема 3.3.2 (Кејлијева теорема). Број означених стабала са n чворова једнак је n^{n-2} .

Није тешко закључити да је број разапињућих стабала означеног комплетног графа K_n једнак броју означених стабала која имају n чворова, то јест једнак је n^{n-2} .

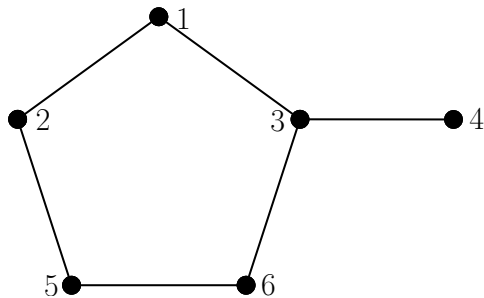
У наставку ћемо дати једну рекурентну формулу за израчунавање броја разапињућих стабала произвољног означеног графа. Пре тога, размотримо још неке означене графове чији број разапињућих стабала можемо израчунати и без коришћења најављене формуле.

²⁶ Артур Кејли (Arthur Cayley, 1821-1895) – енглески математичар.

²⁷ Ернст Пол Хајнц Прифер (Ernst Paul Heinz Prüfer, 1896-1934) – немачки математичар.

Пример 3.3.3. Повезане графове који, попут графа са слике, садрже тачно један елементарни циклус називамо *уницикличким*.

Постоји тачно 5 разапињућих стабала разматраног означеног графа, будући да јединствени циклус има толико грана. (Уклањањем било које гране циклуса добијамо једно разапињуће стабло.) Нека од тих разапињућих стабала су изоморфна.

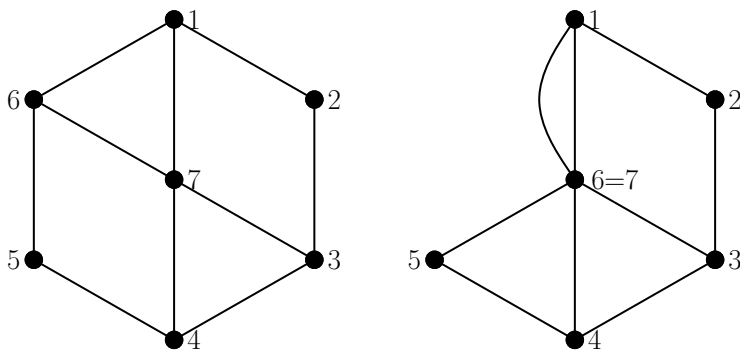


Наравно, важи и општи закључак да је број разапињућих стабала сваког означеног уницикличког графа једнак дужини јединственог циклуса тог графа.

Читалац може покушати да израчуна број разапињућих стабала означеног графа који садржи тачно 2 елементарна циклуса, па потом 3, и тако редом (рачун постаје све компликованији).

Нека је e грана мултиграфа G (који може садржати и петље). *Контракција мултиграфа G* у односу на грану e , у ознаци $G \cdot e$, је мултиграф који се добија од мултиграфа $G - e$ идентификовањем чворова са којима је грана e била инцидентна.

Пример 3.3.4. На слици је илустрован граф и његова контракција у односу на грану 67.



Означимо надаље број разапињућих стабала означеног графа G са $t(G)$ и напомнимо да се разапињуће стабло повезаног мултиграфа са n чворова дефинише на исти начин као у случају простог графа, то јест то је стабло (а не мултистабло) чији је скуп чворова једнак скупу чворова мултиграфа.

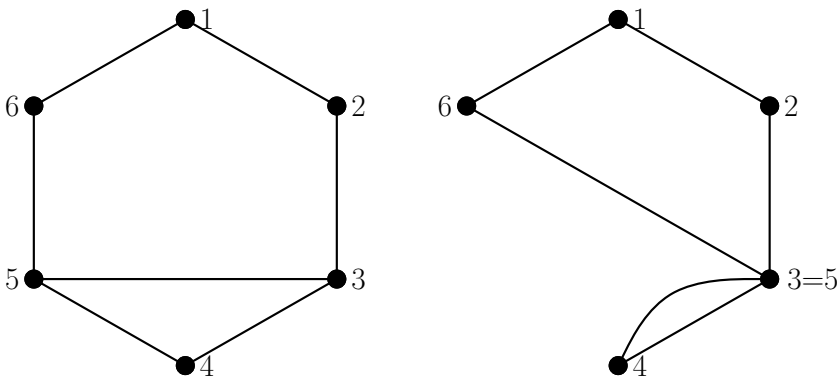
Теорема 3.3.5. *За сваки означени мултиграф G важи једнакост*

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e),$$

при чему се мултиграф $G - e$ добија уклањањем иране e , а мултиграф $G \cdot e$ контракцијом мултиграфа G у односу на ирану e .

Доказ. Свако разапињуће стабло мултиграфа G које не садржи грану e једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G - e$ и обратно, што даје први сабирак са десне стране једнакости из формулације теореме. Слично, свако разапињуће стабло мултиграфа G које садржи грану e једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G \cdot e$ и обратно, што даје други сабирак. ■

Пример 3.3.6. Израчунати број разапињућих стабала првог означеног графа са слике.



Означимо разматрани граф са G и нека је $e = 35$ грана у односу на коју ћемо применити теорему. Уклањањем гране e из графа G добијамо циклус C_6 који, у складу са закључком из Примера 3.3.3, има 6 разапињућих стабала.

Мултиграф $G \cdot e$ илустрован је на истој слици. Приметимо да се свако разапињуће стабло овог мултиграфа добија уклањањем једне од две дупле гране и још једне од преосталих грана. Према принципу производа, број начина на које можемо добити разапињуће стабло једнак је $2 \cdot 4 = 8$, то јест важи $t(G \cdot e) = 8$.

Коначно, применом Теореме 3.3.5 добијамо резултат

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e) = 6 + 8 = 14.$$

3.3.2 Кодирање и декодирање означених стабала

Кодирање и декодирање означених стабала користе се приликом записа таквих стабала у рачунарским системима. Као што ћемо видети, свако означено стабло са n ($n \geq 2$) чворова може бити кодирано низом од $n - 2$ природна броја.

За $n \geq 2$, Приферов низ, у ознаци $s_{(n)} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2})$, је било који низ који се састоји од $n - 2$ (не нужно различита) броја скупа \mathbb{N}_n .

Теорема 3.3.7. Приферов низ $s_{(n)}$ одређује једно означено стабло које има n чворова и обраћно.

Упознаћемо се са два алгоритма – за одређивање Приферовог низа на основу задатог означеног стабла (кодирање) и за одређивање означеног стабла на основу задатог Приферовог низа (декодирање). Ови алгоритми истовремено представљају и доказ претходне теореме.

Алгоритам 5 (Приферово кодирање). Алгоритам прихвата нетривијално означено стабло, а враћа јединствени код тог стабла.

BEGIN

INPUT $T = \{\{1, 2, \dots, n\}, E\}$ // стабло T

$s = ()$ // иницијализација;

WHILE $|V(T)| > 2$

u – чвор степена 1 минималне ознаке;

v – сусед од u ;

$T := T - u$;

$s := s + v$ // дописати члан v на крај низа s ;

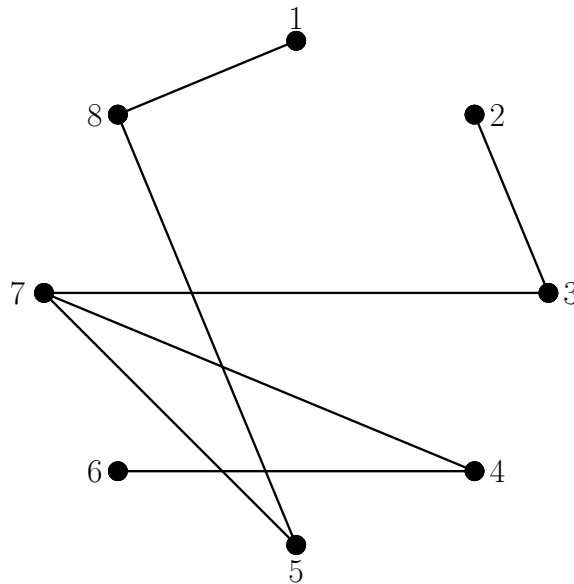
RETURN s

END

У складу са алгоритмом, јединствено означено стабло које има 2 чвора кодирно је празним низом. Три означена стабла из Приме-

ра 3.3.1 редом су кодирана једночланим низовима (3), (1) и (2). Следи нешто сложенији пример.

Пример 3.3.8. Одредити Приферов низ који кодира означено стабло са слике.



Ток алгоритма (са n смо означили број чворова текућег стабла):

- $s = ()$.
- $n = 8$: $s = (8)$.
- $n = 7$: $s = (8, 3)$.
- $n = 6$: $s = (8, 3, 7)$.
- $n = 5$: $s = (8, 3, 7, 4)$.
- $n = 4$: $s = (8, 3, 7, 4, 7)$.
- $n = 3$: $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Резултат је низ $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Размотримо сада и алгоритам за декодирање у којем користимо и један помоћни низ.

Алгоритам 6 (Приферово декодирање). Алгоритам прихвата код, а враћа јединствено означено стабло које је њиме одређено.

BEGIN

INPUT $s = (s(1), s(2), \dots, s(n-2))$ // Приферов низ

$T = (\{1, 2, \dots, n\}, \emptyset)$ // иницијализација;

$l = (1, 2, \dots, n)$ // помоћни низ;

WHILE $s \neq ()$

v – минимална вредност која припада l , а не припада s ;

$w = s(1)$;

$T := T + vw$;

$l := l - v$ // уклонити v из l ;

$s := s - s(1)$ // уклонити $s(1)$ из s , то јест померити низ s за једно место улево;

спојити граном два чвора која су одређена преосталим елементима низа l ;

RETURN T

END

Следи пример.

Пример 3.3.9. Одредити означено стабло које је кодирано Приферовим низом $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Ток алгоритма:

• $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

• $T = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \emptyset)$, $l = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.

• $i = 1$:

$v = 1$	$w = 8$	$T := T + 18$
$l = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$	$s = (3, 7, 4, 7, 5)$	

.

• $i = 2$:

$v = 2$	$w = 3$	$T := T + 23$
$l = (3, 4, 5, 6, 7, 8)$	$s = (7, 4, 7, 5)$	

.

$$\bullet i = 3: \begin{array}{|c|c|c|} \hline v = 3 & w = 7 & T := T + 37 \\ \hline l = (4, 5, 6, 7, 8) & & s = (4, 7, 5) \\ \hline \end{array} \cdot$$

$$\bullet i = 4: \begin{array}{|c|c|c|} \hline v = 6 & w = 4 & T := T + 64 \\ \hline l = (4, 5, 7, 8) & & s = (7, 5) \\ \hline \end{array} \cdot$$

$$\bullet i = 5: \begin{array}{|c|c|c|} \hline v = 4 & w = 7 & T := T + 47 \\ \hline l = (5, 7, 8) & & s = (5) \\ \hline \end{array} \cdot$$

$$\bullet i = 6: \begin{array}{|c|c|c|} \hline v = 7 & w = 5 & T := T + 75 \\ \hline l = (5, 8) & & s = () \\ \hline \end{array} \cdot$$

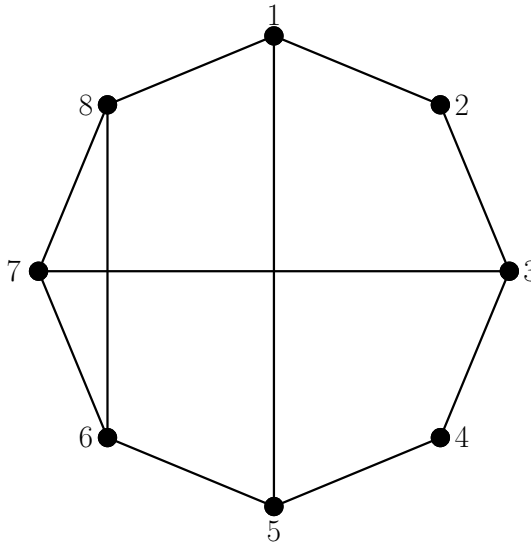
$$\bullet \boxed{T := T + 58} \cdot$$

Резултат је стабло из Примера 3.3.8.

Једноставном анализом оба алгоритма може се закључити да први одређује јединствени Приферов низ који одговара задатом означеном стаблу и да, слично, други одређује јединствено означено стабло које одговара задатом низу.

Задачи

- Одредити сва означена стабла са 5 чворова код којих максимални степен чвора није већи од 3.
- Користећи Кејлијеву теорему, доказати да је број разапињућих стабала означеног графа који се добија уклањањем једне гране нетривијалног комплетног графа једнак $(n - 2)n^{n-3}$.
- Израчунати број разапињућих стабала означеног комплетног бипартичног графа K_{n_1, n_2} .
- Одредити све повезане означене графове који немају више од 10 чворова и чији број разапињућих стабала није већи од 4.
- Израчунати број разапињућих стабала повезаног означеног графа чији је цикломатички број једнак 2. (У складу са дефиницијом цикломатичког броја, овакав граф садржи тачно два елементарна циклуса, али треба имати у виду да исти граф може садржати 2 или 3 подграфа изоморфна неком циклусу. Број разапињућих стабала зависи од броја грана које припадају циклусима.)
- Користећи Теорему 3.3.5, израчунати број разапињућих стабала означеног графа са слике.



7. Одредити Приферов код једног разапињућег стабла графа из претходног задатка.

8. Ако је чвор максималног степена звезде $K_{1,n-1}$ означен са 1, одредити одговарајући Приферов код (без формалног спровођења алгоритма за кодирање). Које стабло је кодирано низом (2, 3, 4, 5, 6, 7)?

9. Декодирати Приферове низове (2, 1, 3, 3, 4, 8), (5, 9, 4, 6, 6, 1, 4, 5) и (7, 6, 5, 2, 7, 6, 5, 1).

3.4 Минимална разапињућа стабла

У овом одељку разматраћемо само тежинске графове. Подсетимо, то су графови чијим су гранама придружене нумеричке вредности које називамо тежинама грана. Нека су надаље тежине свих грана позитивне. У општем случају, повезан (тежински) граф може имати више разапињућих стабала, а од посебног интереса су она код којих је тежина свих грана стабла минимална, а разлог за то опет лежи у применама. Довољно је тежине грана схватити као цене које треба платити (или дужине путева које треба прећи) крећући се од једног до другог чвора.

Тежину гране e означавамо са $w(e)$. Тежина тежинског графа G , у ознаци $w(G)$, једнака је суми тежина грана тог графа:

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e).$$

Минимално разапинуће стабло повезаног тежинског графа је разапинуће стабло минималне тежине (у скупу свих разапинућих стабала). Наравно, такво стабло постоји у случају сваког повезаног тежинског графа и не мора бити јединствено. Следе два алгоритма за одређивање минималног разапинућег стабла.

3.4.1 Краскалов алгоритам

Стратегија Краскаловог²⁸ алгоритма може се описати са „најпре грана најмање тежине“. Као такав, алгоритам се често наводи као пример похлепног алгоритма. Такви алгоритми увек бирају решење које је локално најповољније.

Алгоритам 7 (Краскалов алгоритам). Алгоритам прихвата повезан тежински граф G , а враћа једно минимално разапинуће стабло тог графа.

K1: Текући граф T је празан граф са истим скупом чворова као G .

K2: Уредити гране графа G у неоппадајући низ у складу са њиховим тежинама.

K3: Нека је e наредна грана низа (у првом проласку овим кораком то је прва грана низа). Ако таква грана не постоји, прећи на K5.

K4: Ако додавањем гране e текућем графу T настаје циклус, онда прећи на K3. Иначе, додати ту грану графу T и прећи на K3.

K5: Крај.

Постоје посебни алгоритми којима се одређује да ли додавањем гране у кораку K4 настаје циклус или не. На њима се овде нећемо задржавати. Докажимо коректност Краскаловог алгоритма.

Теорема 3.4.1. *Краскалов алгоритам резултује минималним разапинућим стаблом повезаног тежинског графа.*

Доказ. Најпре, алгоритам не може резултовати неповезаним графом, нити графом који садржи циклус (видети корак K4), што значи да такав граф мора бити стабло.

Нека је надаље T стабло добијено Краскаловим алгоритмом и нека су e_1, e_2, \dots, e_{n-1} гране тог стабла уређене у складу са редоследом додавања текућем графу. Претпоставимо супротно, то јест да тежина ста-

²⁸Џозеф Бернارد Краскал (Joseph Bernard Kruskal, 1928–2010) – амерички математичар и информатичар.

бла T није минимална. У том случају, постоје разапињућа стабла (најмање једно) минималне тежине која је мања од тежине стабла T . Нека је за свако такво стабло S дефинисана функција $f(S) = \min\{i \mid e_i \notin E(S)\}$.

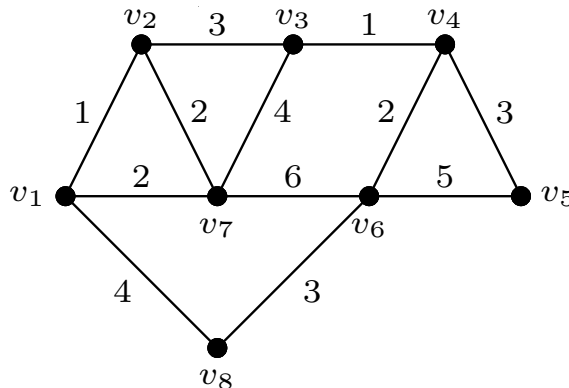
Означимо са S' стабло за које је вредност ове функције максимална. Ако важи $f(S') = k$, онда су гране e_1, e_2, \dots, e_{k-1} истовремено и гране стабла S' . У складу са Теоремом 3.2.1 (део (1) \Rightarrow (3)), граф који се добија додавањем гране e_k стаблу S' (дакле, $S' + e_k$) садржи циклус. Ако је e'_k грана тог циклуса која припада стаблу S' , а не припада T (таква грана постоји јер се стабла T и S' разликују), размотримо граф S'' који се добија уклањањем гране e'_k из S' и потом додавањем гране e_k . Број грана графа S'' такође је једнак $n - 1$, а граф је уз то и повезан (јер је грана e'_k припадала циклусу), дакле и он је (разапињуће) стабло.

Јасно је да важи једнакост

$$w(S'') = w(S') + w(e_k) - w(e'_k). \quad (3.1)$$

Приметимо сада да стабла T и S'' садрже гране e_1, e_2, \dots, e_k . Пошто је грана e_k следећа која је у складу са алгоритмом додата стаблу T , мора важити $w(e_k) \leq w(e'_k)$, што заједно са једнакошћу (3.1) даје неједнакост $w(S'') \leq w(S')$. Заправо важи једнакост, јер је S' стабло минималне тежине. Међутим, важи и неједнакост $f(S'') > k = f(S')$, што противуречи избору стабла S' . ■

Пример 3.4.2. Краскаловим алгоритмом одредити минимално разапињуће стабло графа са слике.



Ток алгоритма:

K1: T је празан граф са 8 чворова v_1, v_2, \dots, v_8 .

K2: Низ грана дат је следећом табелом:

v_1v_2	v_3v_4	v_1v_7	v_2v_7	v_4v_6	v_2v_3
1	1	2	2	2	3
v_4v_5	v_6v_8	v_1v_8	v_3v_7	v_5v_6	v_6v_7
3	3	4	4	5	6

К3: $e = v_1v_2$. К4: Не настаје циклус. Дакле, грану e додајемо текућем графу T (сажетије, $e \rightarrow T$).

К3: $e = v_3v_4$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_1v_7$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_2v_7$. К4: Настаје циклус. Дакле, грану e не додајемо текућем графу T (сажетије, $e \not\rightarrow T$).

К3: $e = v_4v_6$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_2v_3$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_4v_5$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_6v_8$. К4: $e \rightarrow T$.

К3: $e = v_1v_8$. К4: $e \not\rightarrow T$.

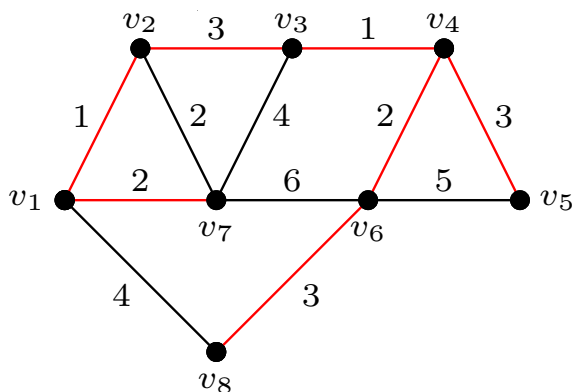
К3: $e = v_3v_7$. К4: $e \not\rightarrow T$.

К3: $e = v_5v_6$. К4: $e \not\rightarrow T$.

К3: $e = v_6v_7$. К4: $e \not\rightarrow T$.

К5: Крај.

Гране резултујућег стабла илустроване су црвеном бојом.



Приметимо да смо у претходном примеру алгоритам применили до-словце, то јест испитали смо све гране графа G . Будући да разапињуће стабло графа са 8 чворова (толико их има G) има 7 грана, алгоритам смо могли завршити оног тренутка када је седма грана додата стаблу (све после ње су одбачене). Дакле, могућа је модификација алгоритма увођењем бројача који би бројао додате гране.

3.4.2 Примов алгоритам

Основу за нешто ефикаснији алгоритам чини наредна теорема.

Теорема 3.4.3. *Нека је $G = (V, E)$ повезан тежински граф, $U \subset V$ и e грана минималне тежине која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$. Тада постоји минимално разапињуће стабло тежинског графа G које садржи грану e .*

Доказ. Нека је S минимално разапињуће стабло које не садржи грану e . Подграф $S + e$ садржи циклус. Поред гране e , том циклусу припада и нека грана e' која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$. Пошто важи $w(e) \leq w(e')$, уклањањем гране e' из графа $S + e$ добијамо (тражено) минимално разапињуће стабло. ■

Стратегија Примовог²⁹ алгоритма може се описати са „најпре најближи сусед“. Овај алгоритам може се користити и за одређивање минималне разапињуће шуме неповезаног тежинског графа (која се аналогно дефинише). У ту сврху се и Краскалов алгоритам може модификовати. У случају повезаног графа, процедура описана у првој реченици корака К2 Примовог алгоритма извршава се само једанпут.

Алгоритам 8 (Примов алгоритам). Алгоритам прихвата тежински граф G , а враћа једну минималну разапињућу шуму тог графа.

К1: Текући граф T је граф без чворова.

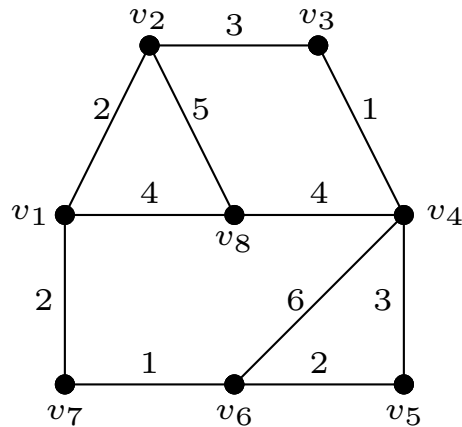
К2: Произвољан чвор графа G који не припада текућем графу додати текућем графу. Ако такав чвор не постоји, прећи на К4.

К3: Грану најмање тежине која спаја текући граф T са остатком графа G додати графу T (тима се и други чвор инцидентан са том граном такође додаје истом графу). Понављати К3 докле год је могуће и потом прећи на К2.

К4: Крај.

²⁹ Роберт Клеј Прим (Robert Clay Prim, 1921) – амерички математичар и информатичар.

Пример 3.4.4. Примовим алгоритмом одредити минимално разапинуће стабло графа са слике.



Ток алгоритма:

К1: $T = (\emptyset, \emptyset)$.

К2: Чвор v_1 додајемо текућем графу T .

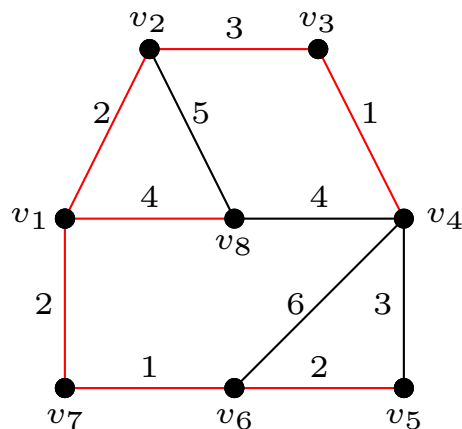
К3: Грану v_1v_2 додајемо текућем графу T (сажетије, $v_1v_2 \rightarrow T$).

К3: $v_1v_7 \rightarrow T$. К3: $v_7v_6 \rightarrow T$. К3: $v_6v_5 \rightarrow T$.

К3: $v_2v_3 \rightarrow T$. К3: $v_3v_4 \rightarrow T$. К3: $v_1v_8 \rightarrow T$.

К4: Крај.

Гране резултујућег стабла илустроване су црвеном бојом.



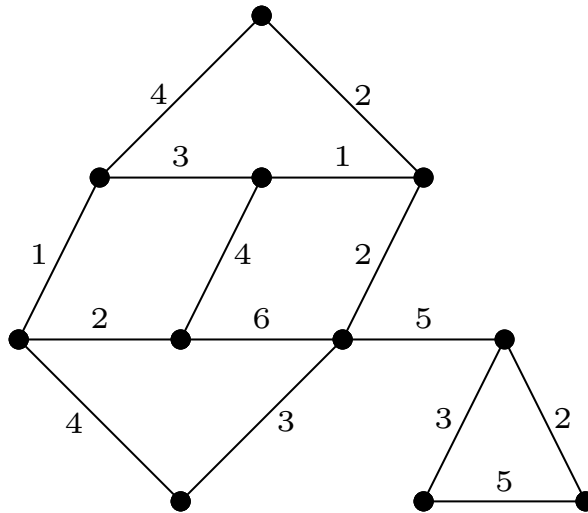
Задаци

1. Доказати да повезан тежински граф код којег су тежине грана међусобно различите садржи јединствено минимално разапињуће стабло.

2. Након Примера 3.4.2 констатовали смо да Краскалов алгоритам можемо модификовати тако да завршава рад након формирања разапињућег стабла (без обзира што постоје гране које нису испитане). Доказати примером да и такав алгоритам може дати резултат тек након испитивања свих грана. Извести општи закључак.

3. Модификовати Краскалов и Примов алгоритам тако да одређују и тежину добијеног стабла. Унапредити оба алгоритма у случају да је разматрани граф прост (тежина сваке гране једнака је 1), то јест елиминисати непотребне процедуре.

4. Краскаловим, а потом и Примовим, алгоритмом одредити минимално разапињуће стабло графа са слике. (Најпре на неки начин означити чворове.)



5. Имплементирати Краскалов и Примов алгоритам у неком програмском језику.

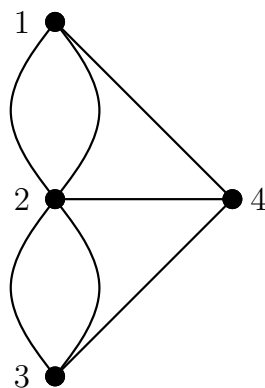
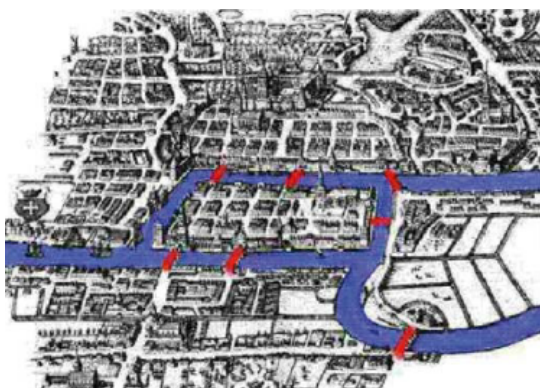
6. Модификовати Примов алгоритам тако да резултујуће разапињуће стабло (или општије, шума) буде минимално у скупу свих разапињућих стабала која садрже унапред изабрану грану.

6 3.5 Ојлерови мултиграфови

За мултиграф кажемо да је *Ојлеров* уколико садржи затворену стазу која сваком граном тог мултиграфа пролази једанпут. Такву стазу називамо *Ојлерова стаза*. Слично, за мултиграф кажемо да је *полуојлеров*, уколико садржи стазу која сваком граном пролази једанпут. Јасно, сваки Ојлеров мултиграф истовремено је и полуојлеров.

Неки од проблема у којима можемо сусрести Ојлере и полуојлере графове су повезивање ДНК фрагмената, такозвани колам дизајн и проблем кинеског поштарара. Прва два проблема нећемо описивати (за детаље видети [21]), а проблем кинеског поштарара изложићемо у Пододељку 3.5.1.

Године 1741. објављен је Ојлеров научни рад [14] о 7 кенингсбершких мостова који је, према неким изворима, први рад из теорије графова. Наиме, град који се некада звао Кенингсберг (а данас Калињинград, Русија) лежи на обалама реке Прегел, а у време када је Ојлер живео у том граду, постојало је 7 мостова распоређених као на Слици 3.4. Проблем којим се математичар бавио гласи: да ли је могуће прећи преко свих 7 мостова тако да се преко сваког моста пређе тачно једанпут? Овај проблем познат је као *проблем кенингсбершких мостова*. Ојлер је проблем решио тако што је конструисао припадни мултиграф чији чворови одговарају обалама реке и двама речним острвима, а гране мостовима. Два чвора мултиграфа спојена су са онолико грана колико мостова спаја одговарајуће делове града. Тај мултиграф илустрован је такође на Слици 3.4.



Слика 3.4: Мапа града Кенингсберга из прве половине XVIII века (преузето са интернета) и припадни мултиграф.

На овај начин проблем се своди на испитивање да ли је припадни мултиграф полуојлеров. Није тешко утврдити да он то није, те да тиме прелазак преко мостова на описани начин није могућ.

Напомена 3.5.1. Од Ојлеровог времена па до данас број мостова преко реке Прегел се мењао. На пример, два су срушена током Другог светског рата. Много више детаља, као и податак да је у данашњем Калињинграду могуће прећи преко сваког моста тачно једанпут, може се пронаћи у [25].

Ојлер је дао и решење у општем случају. Главни резултат формулисан је у наредној теорему, док проблему кенингсбершких мостова одговара последица која је дата у наставку.

Теорема 3.5.2 (Ојлерова теорема). *За нешривијалан повезан мултиграф важи да је Ојлеров ако и само ако су сви чворови шод мултиграфа парно шешена.*

Доказ. Означимо мултиграф из формулације теореме са G и претпоставимо најпре да G садржи Ојлерову (затворену) стазу. Уколико се крећемо дуж такве стазе, тада када год неком граном дођемо до неког чвора, морамо користити неку другу грану (коју још нисмо користили) да одемо од тог чвора. Пошто оваква стаза пролази свим гранама уз завршетак у полазном чвору, закључујемо да су степени свих чворова парни.

Претпоставимо сада да је степен сваког чвора мултиграфа G паран. Доказ ћемо извести методом математичке индукције по броју грана. Минимални број грана нетривијалног мултиграфа код којег је степен сваког чвора паран је 2. Такав мултиграф има 2 чвора и 2 гране које их спајају и за њега тврђење очигледно важи.

Претпоставимо да тврђење важи за све мултиграфове који имају мање од m грана и да G има m грана. Будући да су сви чворови парног степена, G не садржи ниједан чвор степена 1, па према томе G није стабло (што није тешко закључити, а читалац се може сетити и задатка 2 из Одељка 3.2). У том случају, G садржи циклус, рецимо C . (У случају мултиграфа циклус може имати и 2 чвора; такав је на пример циклус из индуктивне базе.) Ако уклонимо све гране које припадају циклусу C , добићемо мултиграф који не мора бити повезан, али који и даље не садржи чворове непарног степена.

Претпоставимо да новонастали мултиграф има k компонената повезаности и означимо их са G_1, G_2, \dots, G_k . Свака од компонената повезаности G_i , у складу са индуктивном хипотезом, садржи Ојлерову стазу, рецимо s_i .

Пошто је мултиграф G повезан, свака од стаза s_1, s_2, \dots, s_k има барем један заједнички чвор са циклусом C . Тражену Ојлерову стазу добијамо тако што крећући се дуж циклуса C када дођемо до првог чвора, рецимо u , који припада затвореној стази s_i коју нисмо обишли, изађемо из циклуса, обиђемо целу стазу s_i и вратимо се у чвор u . Кретање завршавамо када дођемо до чвора циклуса C од којег смо кренули. ■

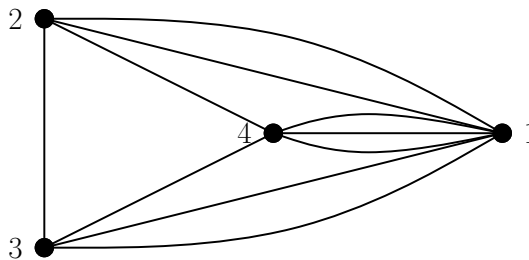
Теорема 3.5.3. *Непривуцан повезан мултиграф је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.*

Доказ. Резултат следи директно на основу дефиниције полуојлеровог мултиграфа и Ојлерове теореме. ■

Пример 3.5.4. Да ли је могуће повући непрекидну (кривудава) линију која сваки сегмент линија са доње слике пресеца тачно једанпут?



Ово је типичан задатак са којим се можемо сусрести у домену Ојлерових мултиграфа. Ако спољашњост великог правоугаоника означимо са 1, а три унутрашње области редом са 2, 3 и 4, можемо приметити да када год линија пресеца неки сегмент она прелази из једне од тих области у другу. То нас доводи до мултиграфа са 4 чвора који одговарају споменутим областима и 10 грана које су одређене сегментима линија који раздвајају области:



Пошто овај мултиграф има два чвора непарног степена, у складу са Теоремом 3.5.3, могуће је повући тражену кривудава линију. Приметимо да она мора кренути из области која одговара једном чвору непарног степена и завршити у области која одговара другом таквом чвору. Такође, на основу Ојлерове теореме, закључујемо да није могуће повући затворену линију која сваки сегмент пресеца тачно једанпут.

У случају Ојлерових мултиграфа са мањим бројем чворова, Ојле-

рова стаза може се одредити једноставним резоновањем. У општем случају постоје разни алгоритми који одређују такву стазу, а овде ћемо изложити такозвани Флеријев³⁰ алгоритам.

Алгоритам 9 (Флеријев алгоритам). Алгоритам прихвата Ојлеров мултиграф, а враћа једну Ојлерову стазу тог мултиграфа.

BEGIN

INPUT G // Ојлеров мултиграф;

v_0 – произвољан чвор;

$s = (v_0)$ // иницијализација стазе;

$H = G$ // помоћни мултиграф;

WHILE $|E(H)| > 0$

изабрати грану $e = uv \in E(H)$ такву да:

(1) u је последњи чвор стазе s и

(2) e није мост мултиграфа H , осим ако нема другог избора.

$s := s + e, v$ // стази додајемо грану e и чвор v ;

$H := H - e$;

RETURN s

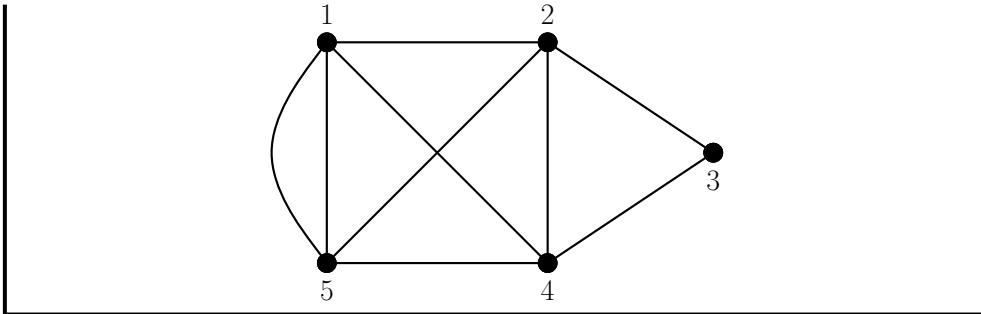
END

Доказ коректности Флеријевог алгоритма може се пронаћи у [6]. Следи једна демонстрација.

Пример 3.5.5. На слици је илустрован један Ојлеров мултиграф (сви чворови су парног степена).

Применом Флеријевог алгоритма (детаље ћемо прескочити) одређујемо Ојлерову стазу. Једно решење је стаза (1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 1). (У складу са Напоменом 3.1.7, користили смо нотацију која не укључује навођење грана стазе.) Приметимо да смо у више наврата бирали грану која је мост у помоћном мултиграфу, јер није било другачијег избора.

³⁰Флери (Fleury) – француски математичар из XIX века.



Ево још једног примера.

Пример 3.5.6. Уклањањем једне од грана које спајају чворове 1 и 5 мултиграфа из Примера 3.5.5, добијамо граф који садржи тачно два чвора непарног степена. У том случају, могуће је применити модификацију Флеријевог алгоритма којом се одређује (отворена) стаза која сваком граном пролази тачно једанпут и чији су крајњи чворови управо та два. Једна таква стаза је $(1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5)$.

У случају да мултиграф није ни полуојлеров, најпре се зависно од спецификације проблема разматра могућност додавања нових грана како би новонастали мултиграф добио тражено својство. Постоје и модификације Флеријевог алгоритма које допуштају вишеструке проласке истом граном.

3.5.1 Проблем кинеског поштар

Проблем кинеског поштар можемо описати на следећи начин. Поштар креће из поште, обилази улице у свом рејону разносећи пошилке и потом се враћа у пошту. Поштар треба да обиђе све улице свог рејона, а време ће трошити најрационалније уколико је дужина пређеног пута минимална.

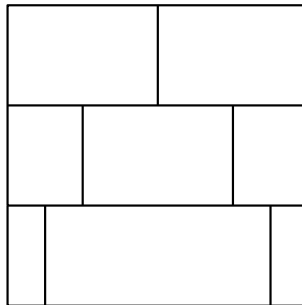
Ако претпоставимо да се на крајевима сваке улице налазе раскрснице, онда рејону можемо придружити један тежински мултиграф чији чворови одговарају раскрсницама, а гране деловима улица између раскрсница. Тежина сваке гране једнака је наравно дужини одговарајућег дела улице. У складу са тим, математичка формулација проблема кинеског поштар гласи: одредити затворену шетњу у тежинском мултиграфу (за који можемо претпоставити да је повезан) која садржи све гране мултиграфа и минималне је тежине. Јасно, сваким проласком неком граном тежина шетње увећава се за тежину те гране. Постоје разни алгоритми за решавање овог проблема. Приметимо да је, у случају да је придружени мултиграф Ојлеров, решење

проблема било која Ојлерова стаза у мултиграфу (која се, рецимо, може одредити Флеријевим алгоритмом), будући да у таквој ситуацији поштар може проћи сваком улицом тачно једанпут.

Назив овог проблема потиче од кинеског математичара Куана³¹ који га је први разматрао 1962. године.

Задаци

1. Под којим условима је комплемент Ојлеровог графа Ојлеров?
2. Да ли је могуће повући непрекидну (кривудау) линију која сваки сегмент линија са слике пресеца тачно једанпут? Образложити.



3. Да ли се фигура из Примера 3.5.4 и фигура из претходног задатка могу нацртати из једног потеза? Образложити.
4. Комплемент Петерсеновог графа је регуларан граф степена 6 па је, на основу Ојлерове теореме, тај граф Ојлеров. Применом Флеријевог алгоритма одредити Ојлерову стазу тог графа.
5. Имплементирати Флеријев алгоритам у неком програмском језику.

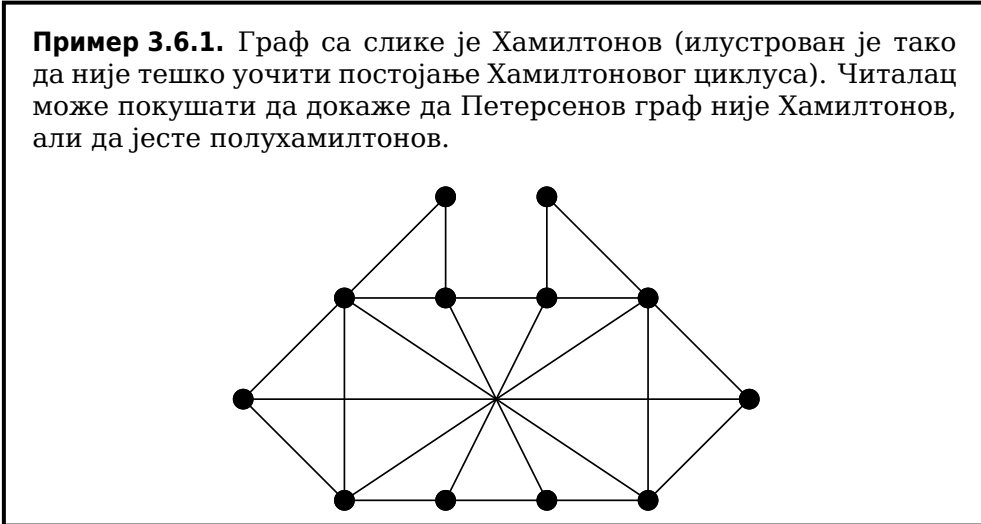
3.6 Хамилтонови графови

За граф кажемо да је *Хамилтонов*³² уколико садржи циклус који пролази сваким чвором тог графа. Такав циклус називамо *Хамилтонов циклус*. Слично, за граф кажемо да је *полухамилтонов* уколико садржи пут који пролази сваким чвором тог графа, а такав пут називамо *Хамилтонов џуџ*. Сваки Хамилтонов граф истовремено је и полухамилтонов.

³¹ Меи-Ку Куан (1934) – кинески математичар.

³² Вилијем Роуен Хамилтон (William Rowan Hamilton, 1805-1865) – ирски математичар и физичар.

Пример 3.6.1. Граф са слике је Хамилтонов (илустрован је тако да није тешко уочити постојање Хамилтоновог циклуса). Читалац може покушати да докаже да Петерсенов граф није Хамилтонов, али да јесте полухамилтонов.



Постоји очигледна аналогија између дефиниције Хамилтоновог графа и дефиниције Ојлеровог (мулти)графа. Питање да ли је неки граф Ојлеров у потпуности разрешава Ојлерова теорема. У случају Хамилтонових графова не постоји слично „ако и само ако“ тврђење. У наставку ћемо доказати неколико тврђења која дају довољне услове за хамилтоновост графа.

Теорема 3.6.2. Уколико граф G садржи два несуседна чвора, u и v , таква да њихови суседи задовољавају неједнакост

$$d_u + d_v \geq n,$$

онда важи да је граф G Хамилтонов ако и само ако је граф $G + uv$ Хамилтонов.

Доказ. Најпре, ако је граф G Хамилтонов, онда је и $G + uv$ такође Хамилтонов независно од претпоставке теореме.

Претпоставимо да је $G + uv$ Хамилтонов граф, а да G то није. У том случају, сваки Хамилтонов циклус првог графа мора пролазити граном uv . Другим речима, G садржи Хамилтонов пут који спаја чворове u и v . Нека је тај пут одређен низом чворова

$$u = v_1, v_2, \dots, v_n = v.$$

Приметимо да ако је чвор v_i суседни чвору v , онда чвор v_{i+1} није суседни чвору u . У супротном, постојао би Хамилтонов циклус одређен низом чворова

$$u, v_2, \dots, v_i, v, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}.$$

Дакле, уколико чвор v има d_v суседа, исто толико чворова не могу бити суседи чвора u , то јест важи неједнакост

$$d_u \leq n - 1 - d_v,$$

што противуречи претпоставци теореме. ■

Претходну теорему искористићемо за доказ наредне, Хваталове³³ теореме.

Теорема 3.6.3 (Хваталова теорема). *Претпоставимо да су чворови v_1, v_2, \dots, v_n , $n \geq 3$, графа G уређени према степенима, што јест да важи $d_{v_1} \leq d_{v_2} \leq \dots \leq d_{v_n}$. Ако важи импликација*

$$d_{v_k} \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{v_{n-k}} \geq n - k$$

онда је G Хамилтонов граф.

Доказ. Претпоставимо да граф G није Хамилтонов, али да је максимални у том смислу, то јест да додавањем било које гране постаје Хамилтонов. Нека је (v_k, v_l) уређени пар несуседних чворова (за који рецимо важи $k < l$) за које је вредност $k + l$ максимална.

Пошто је ова вредност максимална, закључујемо да је чвор v_k суседни свим чворовима $v_{l+1}, v_{l+2}, \dots, v_n$, односно да важи

$$d_{v_k} \geq n - l. \quad (3.2)$$

Слично, чвор v_l је суседни чворовима $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{l-1}, v_{l+1}, \dots, v_n$, односно важи и

$$d_{v_l} \geq n - k - 1. \quad (3.3)$$

На основу претходне теореме, имамо и неједнакост

$$d_{v_k} + d_{v_l} \leq n - 1, \quad (3.4)$$

која, заједно са неједнакошћу (3.3), даје

$$d_{v_k} \leq n - 1 - d_{v_l} \leq (n - 1) - (n - k - 1) = k.$$

Означимо степен чвора v_k са t , то јест $d_{v_k} = t$. Претходна неједнакост даје $t \leq k$, па стога важи и $d_{v_t} \leq t$. Из неједнакости (3.4) следи $t = d_{v_k} < \frac{n}{2}$. Користећи претпоставку теореме и поново неједнакост (3.4), добијамо следећи низ импликација:

$$d_{v_{n-t}} \geq n - t = n - d_{v_k} \geq d_{v_l} + 1 > d_{v_l} \Rightarrow n - d_{v_k} = n - t > l \Rightarrow d_{v_k} < n - l.$$

Међутим, последња неједнакост противуречи неједнакости (3.2). ■

³³Вацлав Хватал (Václav Chvátal, 1946) - чешки математичар.

Диракова³⁴ теорема, која је једноставна за примену, директна је последица претходне.

Теорема 3.6.4 (Диракова теорема). *Граф који има барем 3 чвора и чији минимални сшѐјен чвора задовољава неједнакост*

$$\delta \geq \frac{n}{2}$$

је Хамилтонов.

Доказ. Импликација из Хваталове теореме важи уколико важи неједнакост из ове теореме. ■

Размотримо сада један проблем из домена полухамилтонових графова.

Пример 3.6.5 (проблем коњичког скока). Нека је дата правоугаона табла формата $m \times n$ (која се за $m = 8, n = 8$ своди на шаховску таблу). Обићи сва поља табле скакачем (шаховска фигура) тако да скакач стане на свако поље тачно једанпут.

Релација са полухамилтоновим графовима јасно је уочљива. Свакој табли можемо придружити граф чији чворови одговарају пољима табле, при чему су чворови суседни ако и само ако скакач у једном потезу може прећи са једног од одговарајућих поља на друго.

На овај начин питање постојања решења проблема своди се на испитивање да ли је придружени граф полухамилтонов или није. Ако (рецимо, на основу неке теореме) закључимо да је граф полухамилтонов, онда у општем случају одређивање постојећег Хамилтоновог пута није једноставан задатак.

Занимљиво је напоменути да је познато да решење постоји за све табле формата $m \times n$, за $m, n \geq 3$, са изузецима табле формата $3 \times 3, 3 \times 5, 3 \times 6$ и 4×4 .

Један од начина да се дође до решења проблема коњичког скока у случају шаховске табле (дакле, формата 8×8) је да се табла подели на мање табле и да се проблем реши за сваку од њих. Коначно решење се потом добија тако што се најпре обиђе прва подтабла, па се једним потезом пређе на суседну, и тако редом. На пример, решења за табле формата 3×4 и 4×5 илустрована су на следећој слици.

³⁴Габор Ендре Дирак (Gábor Endre Dirac, 1925–1984) – мађарски математичар.

10	5	8
7	2	11
4	9	6
1	12	3

9	4	13	18
14	19	8	3
5	10	17	12
20	15	2	7
1	6	11	16

Користећи симетрије подтабли и чињеницу да једно решење обезбеђује још једно које се добија крећући се унатраг (од последњег ка првом пољу), комбиновањем две мање табле долазимо до једног решења проблема коњичког скока на шаховској табли (означили смо само релевантна поља).

13	32			

53	64		

	1	12

33	52			

3.6.1 Проблем трговачког путника

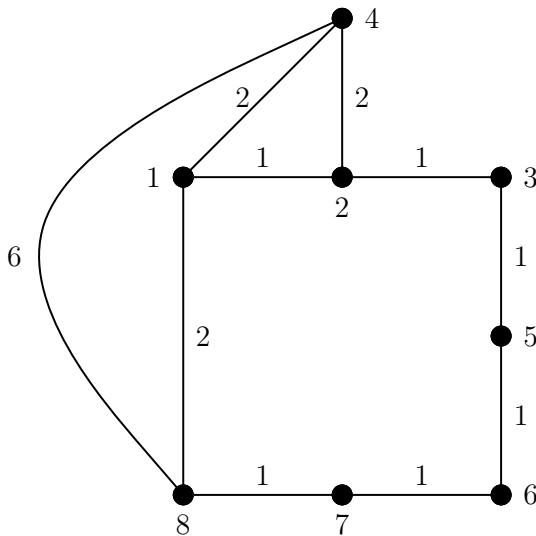
Проблем трговачког путника има пуно варијација од којих се неке могу пронаћи у [8, 18]. Овде ћемо се задржати на изворној формулацији. Нека је дат скуп градова од којих су неки повезани путем одређене дужине (на пример, изражене у километрима). Трговачки путник треба да обиђе сваки град тачно једанпут и врати се у онај из којег је кренуо, а да том приликом пређе најкраћи пут.

У овом контексту можемо размотрити тежински граф чији чворови репрезентују градове, гране путеве између њих, а тежине грана дужине путева. Неопходан услов да трговачки путник уопште може извршити задатак је да је придружени граф Хамилтонов. У том случају, проблем трговачког путника своди се на одређивање Хамилтоновог циклуса минималне тежине у тежинском графу.

Рецимо, ако су свака два града повезана путем и има их барем три, Хамилтонов циклус свакако постоји, те треба одредити онај чија је тежина минимална. Такав циклус називамо *оптимални циклус*. Проблем одређивања таквог циклуса је *NP*-тежак, а у литератури постоји велики број алгоритама за његово решавање. (За *NP*-тешке проблеме верује се да не постоје ефикасни алгоритми за њихово решавање, то јест да се, у најнеповољнијем случају, не могу решити алгоритмима сложености која је полиномијална функција од величине улаза.)

Један метод за одређивање оптималног циклуса подразумева одређивање свих циклуса и потом издвајање оног који је минималне тежине. Јасно је да је овакав приступ веома неефикасан. Са друге стране, стратегија да увек треба ићи до најближег (у смислу минималне тежине гране) суседног чвора, у општем случају, не доводи до оптималног решења, што је илустровано следећим примером.

Пример 3.6.6. Хамилтонов циклус који полази од чвора 1 тежинског графа са слике формиран описаном стратегијом одређен је низом чворова 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4. Тај циклус није оптимални пошто је његова тежина већа од тежине Хамилтоновог циклуса одређеног низом чворова 1, 4, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

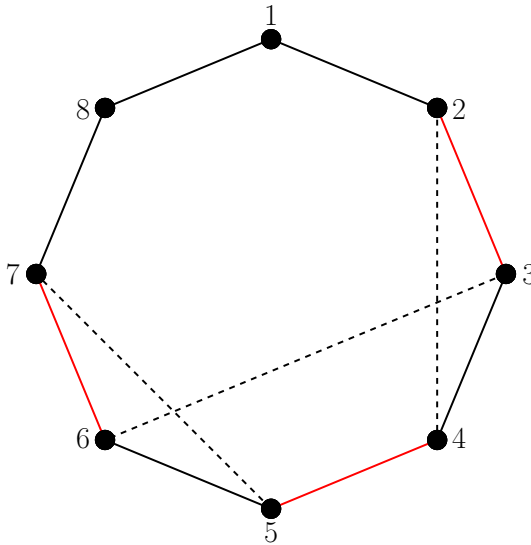


Поред алгоритама који дају оптимално решење проблема трговачког путника, постоје и такозвани хеуристички алгоритми (или хеуристике). Заједничка својства свих хеуристика су да је њихова примена једноставна (у смислу да се могу једноставно имплементирати и да не захтевају сложена израчунавања која се, захваљујући томе, могу понављати велики број пута), али да у општем случају не дају оптимално,

већ решење које је у неком смислу речи блиско оптималном. Решења која се добијају применом хеуристика називају се *лодойшималним*.

Описаћемо такозвану 3-хеуристичку. Ова хеуристика примењује се на комплетне тежинске графове, односно, у складу са ранијом терминологијом, примењује се у ситуацијама у којима су свака два града повезана путем. Нека је s_1 један Хамилтонов циклус комплетног тежинског графа. Уклањањем 3 несуседне гране циклуса s_1 добијамо подграф тог циклуса који се састоји од 3 пута. Спајањем крајева тих путева на одговарајуће начине добијамо нове Хамилтонове циклусе. Да би ово било јасније, наведимо један пример.

Пример 3.6.7. Размотримо Хамилтонов циклус C_8 (садржан у комплетном графу K_8) који је на слици одређен редом чворовима од 1 до 8.



Уклањањем грана 23, 45 и 67 циклуса добијамо 3 пута: један садржи чворове 7, 8, 1 и 2, други чворове 3 и 4, а трећи чворове 5 и 6. Спајањем чворова 2 и 4, 3 и 6, и 5 и 7 добијамо нови циклус. (Спајање смо могли извршити јер је разматрани граф комплетан.)

Настављамо тамо где смо стали. Није тешко утврдити да различитим спајањима крајева путева добијамо 8 циклуса (један од њих је s_1). Сада је јасно шта даље треба радити. Од добијених циклуса бирамо онај који је минималне тежине (тај циклус не мора бити јединствен и може се догодити да то поново буде s_1), означавамо га са s_2 и на њега примењујемо претходну процедуру. На овај начин добијамо низ

Хамилтонових циклуса s_1, s_2, \dots , такав да је тежина сваког наредног мања или једнака од тежине претходног. Процедура се завршава када се испуни неки од унапред задатих критеријума (који се углавном односе на број итерација или тежину циклуса).

Напоследку, избор 3 гране које се уклањају може се вршити на разне начине. Рецимо, то може бити случајан избор или то могу бити гране веће тежине (у односу на остале). У случају да избор грана не доводи до промене циклуса, треба покушати са другачијим избором.

Задаци

1. Доказати да је граф који се добија уклањањем било којег чвора Петерсеновог графа Хамилтонов. Доказати да је комплемент Петерсеновог графа Хамилтонов и одредити један Хамилтонов циклус тог графа.

2. Под којим претпоставкама је (затворена) Ојлерова стаза неког графа истовремено и Хамилтонов циклус тог графа.

3. Доказати да комплетан граф K_n , $n \geq 3$, садржи

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Хамилтонових циклуса.

4. Доказати да комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$, $n \geq 2$, садржи

$$\frac{(n-1)!n!}{2}$$

Хамилтонових циклуса.

5. Ако су чворови графа уређени као у Хваталовој теореме, доказати да свака од претпоставки

$$d_{v_k} \geq k + 1, \quad \text{за } k < \frac{n}{2},$$

и

$$d_{v_k} \leq k, d_{v_l} \leq l \Rightarrow d_{v_k} + d_{v_l} \geq n, \quad \text{за } k \neq l,$$

имплицира претпоставку Хваталове теореме, то јест обезбеђује хамилтоновост разматраног графа.

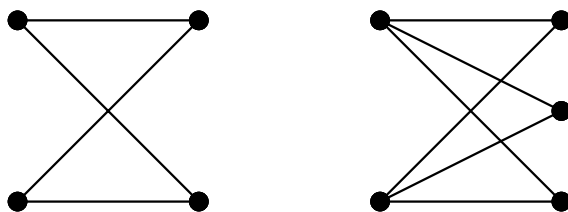
6. Да ли постоји решење проблема коњичког скока у којем скакач полази из поља које се налази у једном углу табле формата $n \times n$, а завршава у дијагонално супротном пољу? Образложити.

7. Имплементирати 3-хеуристику у неком програмском језику.

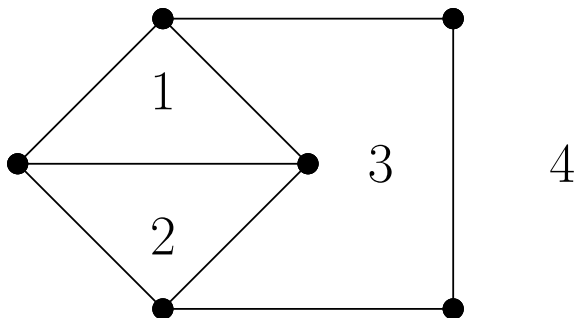
3.7 Планарни графови

За граф кажемо да је *планарни* уколико се може представити у равни тако да се његове гране међусобно не пресецају. Ова дефиниција није заснована на скуповној дефиницији графа, већ на његовој графичкој репрезентацији. Наравно, сматрамо да се гране које се додирују само у заједничком чвору не пресецају.

Пример 3.7.1. Оба графа са слике су планарни, будући да се могу представити тако да им се гране не пресецају.



Сваки повезан планарни граф који је представљен тако да му се гране не пресецају дели раван на неки број области, од којих је тачно једна бесконачна. Један такав граф и одговарајућа подела илустровани су на Слици 3.5.



Слика 3.5: Планарни граф и одговарајућа подела равни.

У следећој теорему доказаћемо да је број области јединствено одређен основним инваријантима графа.

Теорема 3.7.2 (Ојлерова теорема за планарне графове). *За сваки повезан планарни граф G који је представљен у равни тако да му се гране не пресецају важи једнакост*

$$n - m + f = 2,$$

при чему је n број чворова, m број грана, а f број области на које граф дели раван.

Доказ. Индукцијом по броју грана. Пошто је G повезан, минимални број грана које садржи једнак је $n - 1$ и тада је G стабло. У случају стабла очигледно важи $f = 1$, одакле следи тврђење. Претпоставимо да тврђење важи за све повезане графове са мање од m грана и докажимо да важи за граф G који има $m \geq n$ грана. Пошто наш граф има најмање n грана, он садржи најмање један циклус. Нека је e грана тог циклуса. Граф $G - e$ је повезан (јер e припада циклусу) и дели раван на једну област мање од графа G (јер e ограничава тачно две области). Према индуктивној хипотези (примењеној на граф $G - e$) важи $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, одакле следи тражена једнакост. ■

Ево још једне одреднице.

Теорема 3.7.3. Нека је G повезан граф у којем најкраћи циклус има g грана. Ако важи неједнакост

$$m > \frac{(n - 2)g}{g - 2},$$

онда G није планарни граф.

Доказ. Претпоставимо да је G планарни граф (представљен тако да му се гране не пресецају) и докажимо да тада дата неједнакост не важи.

Нека је $c(F)$ број грана које ограничавају област F . Будући да свака грана ограничава две области, важи $\sum_F c(F) = 2m$ (сумирање вршимо по свим областима којих је укупно f). Са друге стране, свака област је ограничена са најмање g грана, па важи $2m \geq gf$.

Користећи претходну теорему, добијамо

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{g} = n - \frac{m(g - 2)}{g},$$

одакле следи неједнакост

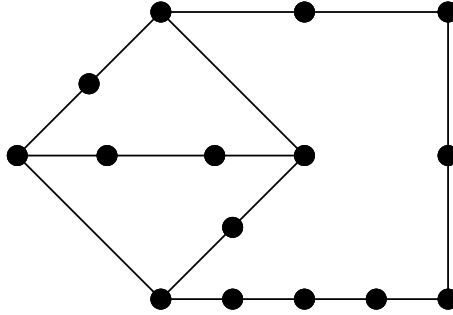
$$m \leq \frac{(n - 2)g}{g - 2},$$

чиме је доказ завршен. ■

Претходна теорема има теоријски значај, јер даје једно структурно својство планарних графова. Ускоро ћемо се упознати са једноставним тестом којим се утврђује да ли је неки граф планарни или није. За то нам је потребна наредна дефиниција.

Пошводела графа G добија се заменом сваке гране тог графа нетривијалним путем произвољне дужине (који спаја чворове који су били инцидентни са граном). Неформално, потподела графа добија се узастопним додавањем произвољног броја чворова свакој грани.

Пример 3.7.4. Ово је једна потподела графа са Сликe 3.5.



Следи најављени тест.

Теорема 3.7.5. Граф је планарни ако и само ако не садржи подграф који је изоморфан некој подподели графа K_5 или графа $K_{3,3}$.

Једна импликација се једноставно доказује. Наиме, није тешко уверити се да ниједан од графова K_5 и $K_{3,3}$ није планарни, па отуда графови који се добијају њиховим потподелама такође нису планарни. Доказ друге импликације може се пронаћи у [5, 34].

Задаци

1. Доказати да регуларан граф са 7 чворова степена 4 није планарни.
2. Доказати следеће уопштење Ојлерове теореме за планарне графове: за планарни граф који не мора бити повезан, али је представљен тако да му се гране не пресецају важи једнакост

$$n - m - f = 1 + p,$$

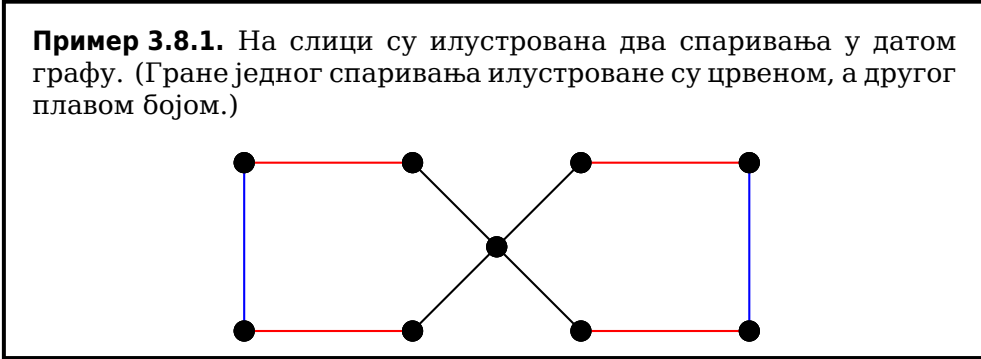
при чему је p број компонената повезаности, а остале ознаке имају исто значење као у наведеној теореме.

3. Користећи Теорему 3.7.3, доказати да планарни граф који има најмање 3 чвора има највише $3(n - 2)$ грана.
4. Користећи претходни задатак, доказати да планарни граф садржи чвор чији је степен највише 5.
5. Доказати да су графови $K_5 - e$ и $K_{3,3} - e$, при чему је e произвољна грана, планарни.

7 3.8 Спаривања у графовима

Спаривање у графу је подскуп скупа грана такав да никоје две гране тог подскупа нису суседне у графу.

Пример 3.8.1. На слици су илустрована два спаривања у датом графу. (Гране једног спаривања илустроване су црвеном, а другог плавом бојом.)



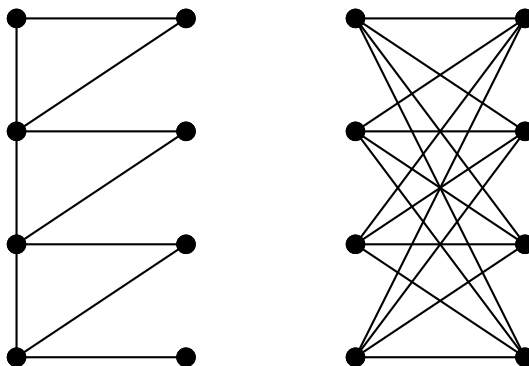
Максимално спаривање у графу је спаривање којем се не може додати грана тако да оно остане спаривање. *Највеће спаривање* у графу је оно које садржи највећи број грана. Ни максимално ни највеће спаривање не мора да буде јединствено. Црвено спаривање из Примера 3.8.1 је максимално и највеће што се једноставно проверава. Плаво спаривање није максимално, па тиме није ни највеће. Када бисмо му додали грану инцидентну са чвором степена 4, плаво спаривање би постало максимално, али и даље не би било највеће. Свако највеће спаривање истовремено је и максимално.

Савршено спаривање у графу је спаривање такво да је сваки чвор тог графа инцидентан са једном граном спаривања. Граф не мора да садржи савршено спаривање, а један такав граф дат је у Примеру 3.8.1. Штавише, ако граф има непаран број чворова, онда он не може имати савршено спаривање. Свако савршено спаривање је истовремено и највеће спаривање, а под претпоставком да савршено спаривање постоји, важи и обратно.

Пример 3.8.2. Пут парне дужине наравно нема савршено спаривање, док пут непарне дужине има јединствено савршено спаривање, што није тешко утврдити.

Слично, циклус парне дужине има тачно два савршена спаривања. Уколико са M означимо једно од њих, тада је друго одређено резликом скупова $E \setminus M$.

На слици су илустрована два графа за које није тешко закључити да садрже савршена спаривања.



Други граф са слике је комплетан бипартитан и њега од раније означавамо са $K_{4,4}$. Овај граф има $4!$ савршених спаривања. Заиста, постоје 4 могућности за грану савршеног спаривања која је инцидентна са једним фиксираним чвором. Након тога, постоје 3 могућности за грану инцидентну са неким другим чвором из истог скупа партиције чворова, потом 2 могућности за наредни чвор и 1 могућност за преостали чвор, што даје $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ могућности, односно савршених спаривања.

Наравно, важи и општи закључак у складу са којим комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$ има $n!$ савршених спаривања, а на сличан начин може се доказати да комплетан граф K_{2n} има

$$\frac{(2n)!}{n!2^n}$$

савршених спаривања.

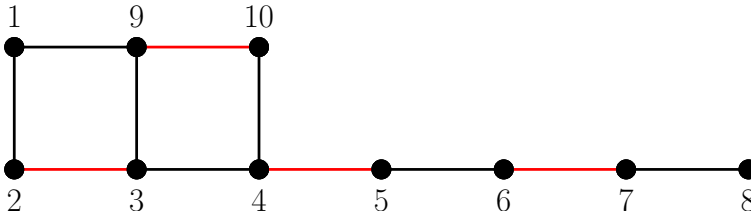
У наставку ћемо размотрити питање постојања највећег спаривања у графу. Као што ћемо видети, то питање је у потпуности разрешено једним „ако и само ако“ тврђењем. За почетак, неопходне су неке дефиниције.

Нека је M произвољно спаривање у графу G . За чвор u тог графа који није инцидентан ни са једном граном спаривања M кажемо да је *слободан* у односу на M . За пут

$$P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k)$$

у графу G кажемо да је *M -алтернирајући* уколико или све гране непарног индекса или све гране парног индекса пута P припадају спаривању M . Другим речима, гране пута наизменично припадају и не припадају датом спаривању. *M -увећани $\bar{u}u\bar{u}$* је M -алтернирајући пут код којег су само крајњи чворови слободни у односу на спаривање M . Такав пут не мора да постоји.

Пример 3.8.3. На слици је назначено једно спаривање M које садржи 4 гране. Пут одређен низом чворова од 2 до 8 је M -алтернирајући, а пут P одређен низом чворова од 1 до 8 је M -увећани.



Уочимо да спаривање M није највеће и да је једно веће спаривање одређено са $M \Delta E(P)$, при чему Δ означава симетричну разлику два скупа.

Напокон смо спремни за најављени резултат заснован на ономе што смо уочили у примеру, а познат као Бержова³⁵ теорема.

Теорема 3.8.4 (Бержова теорема). *Спаривање M у графу G је највеће ако и само ако G не садржи M -увећани пут.*

Доказ. Претпоставимо да је спаривање M највеће и нека, на супрот тврђењу, граф G садржи M -увећани пут, рецимо P . Приметимо да је $M \Delta E(P)$ (при чему ознаке Δ и $E(P)$ имају исто значење као у Примеру 3.8.3) такође спаривање у разматраном графу. Штавише, то спаривање садржи једну грану више (од M), што значи да M није највеће.

Другу импликацију доказаћемо тако што ћемо доказати контрапозицију, то јест претпоставићемо да спаривање M није највеће и доказаћемо да тада граф садржи M -увећани пут. Ако M није највеће спаривање, онда постоји спаривање M' које је највеће и тиме садржи више грана од M . Размотримо подграф графа G чији је скуп грана одређен унијом скупова M и M' . Степен сваког чвора таквог подграфа није већи од 2. (Сваки чвор инцидентан је са највише две гране које припадају различитим спаривањима.) Другим речима, све компоненте повезаности разматраног подграфа су путеви или циклуси. Будући да сваки циклус садржи једнак број грана из спаривања M и M' (циклус мора бити парне дужине и његове гране наизменично припадају једном па другом спаривању) и да спаривање M' садржи више грана, закључујемо да мора постојати компонента која је пут који садржи једну грану више из M' него из M . У том случају, гране таквог пута наизменично припадају спаривањима M и M' , с тим да прва и последња грана пута припадају спаривању M' . Тај пут је, дакле, тражени M -увећани пут. ■

³⁵Клод Жак Берж (Claude Jacques Berge, 1926–2002) - француски математичар.

Пример 3.8.5. Већ смо констатовали да спаривање M из Примера 3.8.3 није највеће, а такав закључај следи и на основу Бержове теореме, пошто граф садржи M -увећани пут. Највеће спаривање истог графа садржи 5 грана и у односу на такво спаривање не постоји увећани пут.

Постоји велики број примена спаривања у графовима. Једна од њих може се сусрести код такозваног *проблема распореда послова* (у некој литератури, *проблем зајошљавања* или *проблем асијнације*). Претпоставимо да је дат неки скуп послова и са друге стране скуп радника. Такође, дати су и подаци који говоре о томе које послове сваки од радника уме да ради. Оно што се тражи је један распоред радника на послове тако да што више послова буде покривено и да што више радника буде запослено.

Уколико претпоставимо да је за обављање сваког од послова довољан један радник и да су радници једнако ефикасни у обављању послова, добијамо најједноставнији облик проблема. Јасно, овако формулисани проблем може се моделирати бипартитним графом код којег чворови једног скупа партиције одговарају пословима, чворови другог скупа одговарају радницима и при том су два чвора спојена граном ако и само ако одговарајући радник уме да ради дати посао.

У оваквој ситуацији одређивање оптималног распореда радника своди се на одређивање највећег спаривања у бипартитном графу. За то постоји више алгоритама, а међу најпознатије спада такозвани *мађарски алгоритам*. Овде га нећемо наводити, а може се пронаћи у [5, 15, 31, 34]. Мађарски алгоритам заснован је на Бержовој теореме и још неким теоријским резултатима двојице мађарских математичара, па му отуда и назив.

Сложеније варијанте проблема распореда послова захтевају различите бројеве радника за појединачне послове или допуштају различите ефикасности самих радника. Приликом решавања таквих проблема користе се тежински (бипартитни) графови код којих тежине грана, рецимо, могу репрезентовати време потребно за обављање посла од стране појединачних радника. Један од најпознатијих алгоритама за решавање тако формулисаног проблема је Кун³⁶-Манкресов³⁷ алгоритам (видети поново [5, 15, 31, 34]).

Задаци

1. Доказати да стабло може имати највише једно савршено спаривање.

³⁶Харолд Вилијем Кун (Harold William Kuhn, 1925–2014) – амерички математичар.

³⁷Џејмс Рејмонд Манкрес (James Raymond Munkres, 1930) – амерички математичар.

2. Нека је дато стабло које има $2n$, $n \geq 1$, чворова. У складу са претходним задатком, ово стабло може имати савршено спаривање, то јест спаривање које се састоји од n грана, што је дакле максимални број грана спаривања у стаблу. Одредити једно стабло које није пут и за које се тај број достиже. Која је доња граница за број грана највећег спаривања у стаблу и у случају којих стабала се достиже?

3. Доказати да повезан граф са парним бројем чворова који не садржи индуковани подграф изоморфан графу $K_{1,3}$ има савршено спаривање.

4. Доказати да сваки бипартитан регуларан граф има савршено спаривање.

5. Конструисати један регуларан граф степена 3 који нема савршено спаривање. Известити општи принцип за конструкцију регуларног графа произвољног степена са истим својством.

3.9 Бојења графова

Бојење чворова графа је функција која сваки чвор графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. У том случају кажемо да је чвор обојен одговарајућом бојом. За бојење чворова кажемо да је *правилно* уколико су суседни чворови обојени различитим бојама.

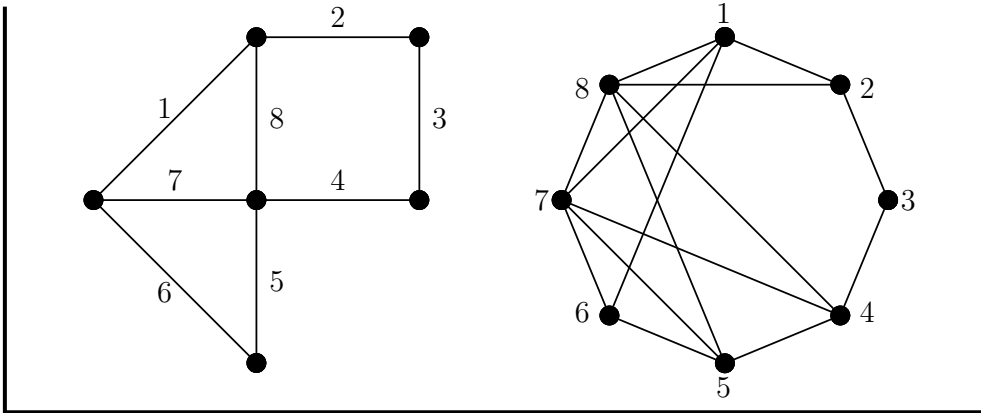
Бојење грана графа је функција која сваку грану графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. Као у претходном случају, кажемо да је грана обојена одговарајућом бојом, а за бојење грана кажемо да је правилно уколико су суседне гране обојене различитим бојама. Проблем бојења грана графа може се свести на проблем бојења чворова његовог линијског графа.

Линијски граф графа G , у ознаци $L(G)$, је граф је који се добија на следећи начин:

- скуп чворова графа $L(G)$ одговара скупу грана графа G ,
- чворови графа $L(G)$ су суседни ако и само ако су њима одговарајуће гране суседне у графу G .

Кажемо да је G *коренски граф* свог линијског графа. (Овај термин не треба доводити у везу са раније спомињаним коренским стаблима.)

Пример 3.9.1. На слици је илустрован граф G са нумерисаним гранама и његов линијски граф $L(G)$. Будући да G има 8 грана, $L(G)$ има 8 чворова. Суседства између чворова одређена су претходном дефиницијом.



Јасно је да сваки граф, до на изоморфизам, има тачно један линијски граф и да бојење грана графа једнозначно одређује бојење чворова његовог линијског графа. Обратно, из теорије графова познат је резултат у складу са којим сваком линијском графу који није изоморфан графу K_3 одговара тачно један коренски граф. Другим речима, ако је неки граф линијски и није изоморфан графу K_3 , онда он једнозначно одређује коренски граф и бојење чворова линијског графа једнозначно одређује бојење грана његовог коренског графа.

У складу са претходном дискусијом, у наставку ћемо детаљније изложити бојење чворова графа. Надаље, када год кажемо „бојење графа“ имаћемо у виду бојење његових чворова!

За граф кажемо да је k -обојив уколико се може правилно обојити коришћењем k боја. Прецизније, граф је k -обојив уколико постоји функција која сваки чвор тог графа пресликава у неку боју из скупа од k боја тако да се суседни чворови пресликавају у различите боје.

Минималну вредност k за коју је граф k -обојив, у ознаци χ , називамо *хроматски број* графа. Хроматски број је једна инваријанта графа.

Приметимо да се бојење неповезаног графа може разматрати тако што се бојење сваке компоненте повезаности разматра независно од бојења осталих компонената. Ово нас, рецимо, доводи до једноставног закључка да је хроматски број неповезаног графа једнак максималном од хроматских бројева његових компонената. У складу са претходним, у контексту бојења графова најчешће се разматрају само повезани графови.

Пример 3.9.2. Комплетан граф K_n може се правилно обојити коришћењем n боја. Будући да су сви чворови овог графа међусобно суседни, закључујемо да је његов хроматски број заиста једнак n (то јест, не може бити мањи).

Није тешко закључити да се сваки пут који садржи најмање 2

чвора може правилно обојити тако што се наизменично употребљавају две боје, те да важи $\chi(P_n) = 2, n \geq 2$.

Важи и општији закључак да је хроматски број бипартитног графа који има барем једну грану једнак 2. Чворови из једног скупа партиције боје се једном бојом, а чворови из другог скупа другом бојом. Овакви бипартитни графови се због овог својства називају и *бихроматски графови*.

Слично, за циклус C_n важи

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k, \\ 3, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \geq 2.$$

Упознаћемо се сада са неким својствима хроматског броја. За граф кажемо да је χ -критичан уколико је његов хроматски број једнак χ и уколико је хроматски број сваког његовог правог подграфа мањи од χ . Сваки граф чији је хроматски број једнак χ садржи χ -критичан подграф. Приметимо да χ -критичан граф мора бити повезан.

Лема 3.9.3. *Ако је граф χ -критичан, онда минимални степењен чворови графа задовољава неједнакост $\delta \geq \chi - 1$.*

Доказ. Претпоставимо да је неки граф G χ -критичан и да за њега, насупрот тврђењу, важи неједнакост $\delta \leq \chi - 2$. Нека је u чвор минималног степена, то јест нека важи $d_u = \delta$.

Пошто је G χ -критичан, закључујемо да је граф $G - u$ $(\chi - 1)$ -обојив. Уз то, за бојење суседа чвора u (у G) употребљено је највише $\chi - 2$ боја (јер тих суседа нема више од толико). Другим речима, међу бојама употребљеним за бојење графа $G - u$ постоји боја која није употребљена за бојење неког суседа чвора u , па u можемо обојити управо том бојом. Дакле, и G је $(\chi - 1)$ -обојив, што је у супротности са претпоставком да је G χ -критичан. ■

Лема 3.9.4. *Ако је χ хроматски број повезаног графа G , онда G садржи најмање χ чворова чији је степењен већи или једнак од $\chi - 1$.*

Доказ. Ако је H подграф графа G који је χ -критичан, онда према претходној лемини степењен сваког чвора графа H није мањи од $\chi - 1$. Исто важи и уколико се чворови графа H разматрају као чворови његовог надграфа G . Пошто је хроматски број графа H једнак χ , закључујемо да H има најмање χ чворова, одакле следи тврђење. ■

Наредни резултат следи директно из претходне леме.

Теорема 3.9.5. *Хроматски број и максимални степењен чворови сваког повезаног графа задовољавају неједнакост*

$$\chi \leq \Delta + 1. \tag{3.5}$$

Доказ. У складу са лемом, разматрани граф садржи чвор чији степен није мањи од $\chi-1$, а отуда важи и да максимални степен чвора тог графа није мањи од $\chi-1$. ■

Горња граница за хроматски број дата у претходној теорери некада значајно одступа од вредности хроматског броја. Рецимо, у Примеру 3.9.2 закључили смо да је хроматски број било којег бипартитног графа који има барем једну грану једнак 2. Са друге стране, максимални степен чвора таквог графа може имати произвољну вредност. У овом контексту, поставља се питање одређивања графова за које се достиже једнакост у формули (3.5). Одговор на то питање даје Бруксова³⁸ теорема.

Теорема 3.9.6 (Бруксова теорема). *Једнакост у формули (3.5) важи ако и само ако је разматрани граф изоморфан компланетном графу или циклусу нејарне дужине.*

Доказ се може пронаћи у [5, 31, 34].

Слично као у случају спаривања у графовима, и код бојења постоје алгоритми који дају оптимално бојење чворова (то јест, оно које користи минимални број боја). Поред њих, упоредо се развијају и хеуристички алгоритми. Једна таква хеуристика се сама намеће. Нека су чворови графа означени са v_1, v_2, \dots, v_n (рецимо да је то означавање произвољно) и нека је дат уређени скуп од n боја. Чворове бојимо редом почевши од v_1 који бојимо првом бојом из скупа боја. Када дођемо до чвора v_i , бојимо га бојом која је прва боја скупа боја која није употребљена за бојење његових суседа.

Јасно је да је оваква хеуристика похлепна будући да бира локално најповољније решење. Она ће увек дати једно ефикасно (у смислу брзине извршавања) и правилно бојење графа, али ће у случају неких графова употребити више боја него што је потребно. Низ алгоритама који дају бојење графа, уз употребу минималног броја боја, заснован је на овој хеуристици. Неки од њих могу се пронаћи у [6, 15, 23].

У наредним примерима упознаћемо се са два проблема из домена бојења графова. Још један проблем размотрен је у пододељку који следи.

Пример 3.9.7 (проблем распореда испита). На крају семестра студенти полажу испите из одслушаних предмета. За сваки испит постоји један термин у испитном року. Израчунати минимални број термина такав да сваки студент може полагати све испите које жели.

³⁸Роуланд Леонард Брукс (Rowland Leonard Brooks, 1916–1993) – енглски математичар.

Означимо са S скуп студената, а са I скуп испита. За сваки испит $i \in I$, нека је N_i скуп студената који намеравају да га полагају. Уколико је j испит различит од i , тада важи следеће: ако важи $N_i \cap N_j \neq \emptyset$, онда се испити i и j морају одржати у различитим терминима.

Нека је сада G граф чији чворови одговарају испитима (то јест, важи $V(G) = I$) и чији су чворови i и j суседни ако и само ако важи $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Сада је јасно да бојење графа G коришћењем k боја одговара распореду испита у k термина. (Сви испити обојени истом бојом одржавају се у истом термину.) У складу са тим, минимални број термина који су неопходни за регуларно одржавање испитног рока једнак је хроматском броју графа G .

Пример 3.9.8 (проблем складиштења). У складиште треба распоредити n материја међу којима су неке инкомпатибилне у смислу да при додиру изазивају нежељене реакције, те морају бити распоређене у различите одељке складишта. Колики је минимални број одељака неопходан за складиштење свих материја?

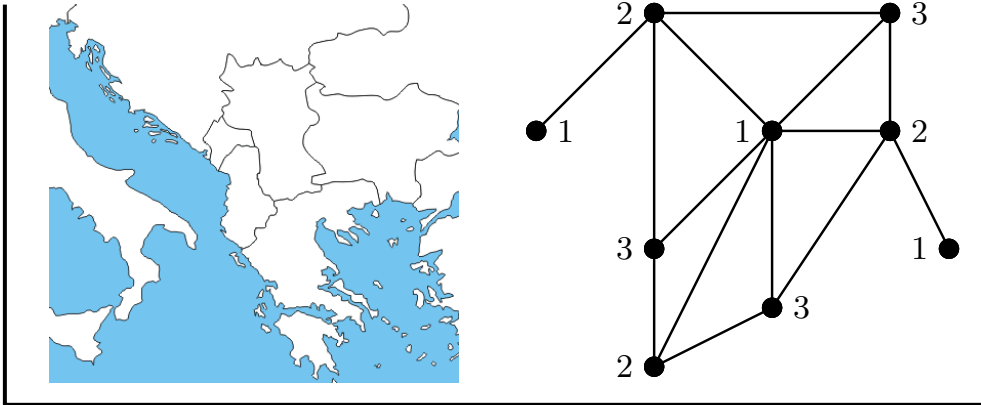
Размотримо граф формиран на сличан начин као у претходном примеру: сваки чвор одговара једној материји, а чворови су суседни ако и само ако су одговарајуће материје инкомпатибилне. Јасно, број неопходних одељака једнак је хроматском броју овог графа.

3.9.1 Проблем бојења мапа

Проблем бојења мапа датира из XIX века. Мапу територија (од којих је свака повезана) треба обојити минималним бројем боја, тако да свака територија буде обојена једном бојом и да суседне територије буду обојене различитим бојама. (Суседним територијама не сматрамо оне које имају заједничку границу дужине нула; такве су, рецимо, територије које се граниче у једној тачки).

Нека је G граф чији чворови одговарају територијама и суседни су ако и само ако су одговарајуће територије суседне. Очигледно је да је G планарни граф, те се проблем бојења мапа своди на одређивање хроматског броја одговарајућег планарног графа.

Пример 3.9.9. На слици су мапа дела Европе из 1914. године и припадни граф који је правилно обојен коришћењем 3 боје. (Неповезаност неких територија нема значаја у овом бојењу.)



Хејвуд³⁹ је 1890. године доказао да се сваки планарни граф може правилно обојити коришћењем 5 боја. Много јачи резултат доказали су Епл⁴⁰ и Хакен⁴¹ 1976. године. Тај резултат познат је као *теорема о 4 боје* и представља решење хипотезе која није била решена више од једног века. Резултат наравно гласи да хроматски број планарног графа није већи од 4. Први доказ теореме о 4 боје био је веома обиман и укључивао је резултате добијене након интензивних рачунарских израчунавања. Касније су се појавили једноставнији докази.

Напомена 3.9.10. Са географског становишта, проблем бојења мапа коректно је формулисан. Са математичког, треба елиминисати неке могућности, рецимо да територија има границу бесконачне дужине. У таквој ситуацији, бојење мапе може захтевати више од 4 боје (детали се могу пронаћи у [20]).

Често се уз проблем бојења мапа разматра и проблем правилног бојења (планарног) графа са мање од 4 боје, на пример, трима бојама. Испоставља се да испитивање да ли је граф 3-обојив припада класи *NP*-комплетних проблема.

Задаци

1. Израчунати хроматски број линијског графа Петерсеновог графа.
2. Доказати да ако је граф G Ојлеров, онда је његов линијски граф $L(G)$ Ојлеров и Хамилтонов. Такође, ако је G Хамилтонов, онда је и $L(G)$ Хамилтонов.
3. Доказати примерима да обрати тврђења из претходног задатка не важе.

³⁹Перси Џон Хејвуд (Percy John Heawood, 1861–1955) – енглески математичар.

⁴⁰Кенет Ајра Епл (Kenneth Ira Appel, 1932–2013) – амерички математичар.

⁴¹Волфганг Хакен (Wolfgang Haken, 1928) – немачки математичар.

ДИСКРЕТНЕ СТРУКТУРЕ 2

ИСПИТНА ПИТАЊА

I Комбинаторика

1. Пребројавања. Основни принципи пребројавања. (Уопштени) Дирихлеов принцип.
2. Биномни коефицијенти. Основна својства. Биномна и полиномна формула.
3. Биномни идентитети.
4. Принцип укључења-искључења.
5. Уређени избори елемената са и без понављања. Пермутације.
6. Неуређени избори елемената са и без понављања. Пермутације са понављањем.
7. Генерисања пермутација и комбинација.
8. Функције генератрисе. Дефиниција и основна својства. Биномна формула за целобројне експоненте.
9. Одређивање функција генератриса.
10. Композиције и партиције бројева. Основна својства.
11. Рекурентне једначине. Дефиниција и решења. Линеарна рекурентна једначина и њено опште решење.
12. Линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима.
13. Функције генератрисе и решавање рекурентних једначина.
14. Партиције скупова. Стирлингови бројеви 2. врсте и Белови бројеви.
15. Фибоначијеви бројеви. Златни пресек. Општи члан и функција генератриса Фибоначијевог низа.
16. Својства Фибоначијевих бројева.
17. Лукасови и Каталанови бројеви.
18. Ферерсови дијаграми. Конјуговане партиције броја. Идентитети са партицијама.

II Теорија графова

19. Типови графова, основни појмови, својства и инваријанте. Шетње, стазе и путеви. Матричне репрезентације графа.
20. Стабла. Коренска и разапињућа стабла. Претраге графова.
21. Минимално разапињуће стабло тежинског графа. Краскалов и Примов алгоритам.
22. Разапињућа стабла означених графова. Приферов низ.
23. Број разапињућих стабала означених графова. Кејлијева теорема. Цикломатички број графа.
24. Ојлерови мултиграфови. Флеријев алгоритам. Проблем кинеског поштара.
25. Хамилтонови графови. Проблем трговачког путника. 3-хеуристика.
26. Планарни графови.
27. Спаривања у графовима.
28. Бојења графова. Проблем 4 боје.