SRPSKA AKADEMIJA NAUKA

KLASIČNI NAUČNI SPISI
KNJIGA XIV

MATEMATIČKI INSTITUT KNJIGA 14

Urednik
akademik RADIVOJE KAŠANIN
Upravnik matematičkog instituta SAN

D. HILBERT

OSNOVE GEOMETRIJE

PREVEO SA OSMOG NEMAČKOG IZDANJA
Ž. GARAŠANIN

Primljeno na XI skupu Odeljenja prirodno-matematičkih nauka od 30. X 1953. g.

BEOGRAD
1957

P R E D G O V O R

Ovaj novi otisak Hilbertovih „Osnovi geometrije" nije neka prava nova prerada. Upravo učinjene su samo neke ispravke i manje dopune.

U dopuni I su skupljene neke zavisnosti u sistemu aksioma realnih brojeva, ranije navedene u dodatku VI. Dopuna III je u suštini ponavljanje jedne dopune dodatka II u petom izdanju, koja se odnosi na izvodljivost jedne dalje aksiome podudarnosti iz uže aksiome uz pomoć jedne aksiome smeštanja.

Kao dopuna II dodata je nova uprošćena formulacija nauke o proporcijama, čija je rana formulacija zadržana u glavnom tekstu §§14-16.

Od dodatka $I - X$ sedmog izdanja uneti su opet samo oni geometrijskog karaktera, tj. $I - V$.

Radi orijentacije o sedmom izdanju navešćemo iz Hilbertovog predgovora tom izdanju sledeće: „Ovo sedmo izdanje moje knjige „Osnovi geometrije" je, spram ranijih izdanja, znatno popravljeno i dopunjeno, i to delom prema mojim kasnijim predavanjima o ovom predmetu, a delom kako su to zahtevali rezultati koje su u medjuvremenu postigli drugi autori. U zavisnosti od toga je preradjen tekst glavnog dela knjige. Retko dragocenu pomoć pri tome pružio mi je jedan od mojih učenika H. Arnold Šmit (*H. Arnold Schmidt*). On ne samo što je za mene vršio sav rad koji je zalazio u pojedinosti, već od njega potiču i mnogobrojne samostalne primedbe i dodaci; posebno, on je samostalno dao novu stilizaciju dodataka II. Za ovu njegovu pomoć izražavam mu najsrdačniju zahvalnost". Dalje treba još ukazati i na istorijski pregled „O Hilbertovom zasnivanju geometrije" (*Zur Hilberts Grundlegung der Geometrie*) koji je dao A. Šmit u Hilbertovim „Sakupljenim spisima"(*Gesammelte Abhandlungen*) sv. II (Berlin 1933), str. 404-414.

Cirih, marta 1956. P. Bernajs

Sadržaj

Celokupno ljudsko saznanje počinje sa opažajima, odatle ide ka pojmovima i zavrshava se idejama.

K a n t, Kritika čistog uma
Učenje o elementima, deo 2, odeljak 2.

U v o d

Za potpuno izgradjivanje geometrije – isto kao i aritmetike – potreban je samo mali broj prostih osnovnih stavova. Ovi osnovni stavovi nazivaju se a k s i o m a m a geometrije. Postavljanje aksioma geometrije i ispitivanje njihovih uzajamnih odnosa jeste zadatak koji je još od vremena E u k l i d a bio predmet mnogobrojnih izvršnih rasprava matematičke literature. Ovaj se zadatak svodi na logičku analizu našeg prostornog opažanja.

Sledeće istraživanje predstavlja nov pokušaj da se u geometriji postavi p o t p u n i š t o p r o s t i j i sistem aksioma i da se iz ovih aksioma izvedu najvažniji geometrijski stavovi tako da se jasno vidi kako značaj različitih grupa aksioma tako i domašaj posledica koje slede iz pojedinih aksioma.

Prva glava

Pet grupa aksioma

§1. Elementi geometrije i pet grupa aksioma

D e f i n i c i j a. Mi zamišljamo tri različita sistema stvari: stvari p r v o g sistema nazivamo tačkama i označavamo ih sa $A, B, C, ...$; stvari d r u g o g sistema nazivamo pravima i označavamo ih sa $a, b, c, ...$; stvari t r e ć e g sistema nazivamo ravnima i označavamo ih sa $\alpha, \beta, \gamma, ...$; tačke se nazivaju i elementima linearne geometrije, tačke i prave se nazivaju elementima ravne geometrije, a tačke, prave i ravni nazivaju se elementima prostorne geometrije ili elementima prostora.

Mi zamišljamo tačke, prave i ravni u izvesnim medjusobnim odnosima i označavamo ove odnose rečima „ležati", „izmedju", „podudarno", „paralelno", „neprekidno"; tačan i za matematičke svrhe potpun opis ovih odnosa postiže se pomoću aksioma geometrije.

Aksiome geometrije možemo podeliti u pet grupa; svaka pojedinačno od ovih grupa izražava izvesne povezane osnovne činjenice našeg opažaja. Mi ćemo ove grupe aksioma nazivati na sledeći način:

I 1-8. aksiome veze,
II 1-4. aksiome rasporeda,
III 1-5. aksiome podudarnosti,
IV aksioma paralelnih,
V 1-2. aksiome neprekidnosti.

§2. Grupa aksioma I: Aksiome veze

Aksiome ove grupe postavljaju vezu izmedju gore navedenih stvari: tačaka, pravih i ravni i glase:

$I1$. Za dve tačke A, B, postoji uvek prava a koja pripada svakoj od ovih dveju tačaka A, B.

$I2$. Za dve tačke A, B, ne postoji više od jedne prave koja bi pripadala svakoj od dveju tačaka A, B.

Ovde, kao i u daljim izlaganjima, pod dvema, trima, ... tačkama odn. pravama, ravnima uvek se podrazumevaju r a z l i č i t e tačke odn. prave, ravni.

Umesto „pripadati" upotrebljavaćemo i druge načine izražavanja, npr. prava a prolazi kroz tačke A i B, prava a vezuje A i B ili vezuje A sa B, A leži na a, A je tačka prave a, postoji tačka A na a itd. Ako tačka A leži na pravoj a i osim toga, na drugoj pravoj b, upotrebićemo takodje izraze: prave a i b se seku u tački A, imaju tačku A zajedničku itd.

$I3$. Na pravoj postoje uvek najmanje dve tačke. Postoje najmanje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj.

$I4$. Ma za koje tri tačke A, B, C koje ne leže na istoj pravoj, postoji uvek ravan α koja pripada svakoj od ove tri tačke A, B, C. Za svaku ravan uvek postoji tačka koja joj pripada.

Mi ćemo upotrebljavati i izraze: A l e ž i u α; A j e tačka ravni α itd.

$I5$. Ma za koje tri tačke A, B, C koje ne leže na istoj pravoj ne postoji više od jedne ravni koja pripada svakoj od ovih triju tačaka A, B, C.

$I6$. Ako dve tačke A, B prave a leže u ravni α, onda svaka tačka prave a leži u ravni α.

U ovom slučaju kažemo: p r a v a a l e ž i u r a v n i α itd.

$I7$. Ako dve ravni α, β imaju zajedničku tačku A, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.

$I8$. Postoje najmanje četiri tačke koje ne leže u jednoj ravni.

Aksioma $I7$ izražava da prostor nema više od tri dimenzije; naprotiv, aksioma $I8$ izražava da prostor ima manje od tri dimenzije.

Aksiome $I1$-8 mogu se nazvati aksiomama ravni grupe I za razliku od aksioma $I4$-8 koje nazivamo prostornim aksiomama grupe I.

Od stavova koji slede iz aksioma $I1$-8 ,pomenućemo samo ova dva:

S t a v 1. Dve prave koje leže u istoj ravni imaju ili jednu zajedničku tačku, ili nemaju nijednu zajedničku tačku; dve ravni ili nemaju nijednu zajedničku tačku, ili imaju zajedničku pravu i osim toga nijednu drugu zajedničku tačku; ravan i prava koja ne leži u ovoj ravni ili nemaju nijednu zajedničku tačku ili imaju jednu zajedničku tačku.

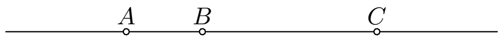
S t a v 2. Kroz pravu i tačku koja ne leži na ovoj pravoj, kao i kroz dve različite prave sa zajedničkom tačkom, prolazi uvek jedna i samo jedna ravan.

§3. Grupa aksioma II: Aksiome rasporeda

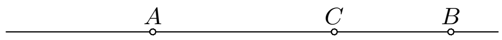
Aksiome ove grupe definišu pojam „izmedju" i omogućavaju na osnovu ovog pojma raspored tačaka na pravoj, u ravni i u prostoru.

D e f i n i c i j a. Tačke neke prave stoje u izvesnim medjusobnim odnosima. Za opis ovih odnosa služimo se naročito rečju „izmedju".

*II*1. Ako tačka B leži izmedju tačaka A i C, onda su A, B, C tri različite tačke prave i B leži takodje izmedju C i A.



*II*2. Za dve tačke A i C uvek postoji najmanje jedna tačka B na pravoj AB, tako da C leži izmedju A i B.

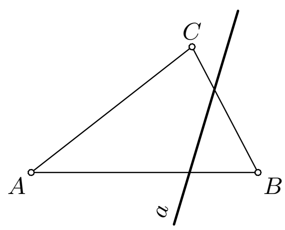


*II*3. Od ma kojih triju tačaka prave ne postoji više od jedne koja leži izmedju one druge dve.

Osim ovih linearnih aksoma rasporeda, potrebna je još jedna aksioma rasporeda za ravan.

D e f i n i c i j a. Posmatramo na pravoj a dve tačke A i B; sistem dveju tačaka A i B zvaćemo duž i označavati sa AB ili BA. Tačke izmedju A i B zvaćemo tačkama duži AB ili tačkama koje leže u unutrašnjosti duži AB; tačke A, B nazivaju se krajnjim tačkama duži AB. Sve ostale tačke prave a nazivaju se tačkama koje leže van duži AB.

*II*4. Neka su A, B, C tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj i neka je a prava u ravni ABC koja ne prolazi ni kroz jednu od tih tačaka A, B, C: ako tada prava a prolazi kroz jednu od tačaka duži AB, ona mora prolaziti kroz jednu od tačaka duži AC ili kroz jednu od tačaka duži BC.

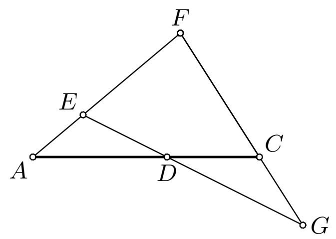


Izražavajući se očigledno možemo reći: ako prava ulazi u unutrašnjost trougla, ona i izlazi iz njega. Da prava a pri tome ne može presecati obe duži AC i BC, može se dokazati.

§4. Posledice iz aksioma veze i rasporeda

Iz aksioma grupa I i II slede stavovi:

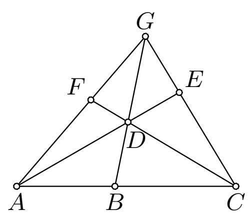
S t a v 3. Za dve tačke A i C postoji najmanje jedna tačka D na pravoj AC koja leži izmedju A i C.



D o k a z. Prema aksiomi $I3$ postoji van prave AC jedna tačka E, a prema aksiomi $II2$ postoji na pravoj AE tačka F tako da je E tačka duži AF. Prema istoj aksiomi i prema aksiomi $II3$ postoji na pravoj FC tačka G koja ne leži na duži FC. Tako, prema aksiomi $II4$ prava EG mora seći duž AC u nekoj tački D.

S t a v 4. Od ma kojih triju tačaka A, B, C jedne prave uvek postoji jedna koja leži izmedju drugih dveju.

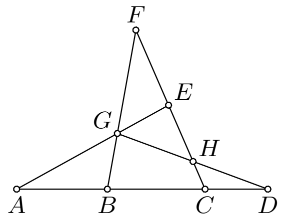
D o k a z. Neka A ne leži izmedju A i B. Spojimo tačku D koja ne leži na pravoj AC sa tačkom B i odaberimo, prema aksiomi $II2$, na spojnoj pravoj tačku G tako da D leži izmedju B i G.



Primenom aksiome $II4$ pokazuje se da se prave AD i CG seku u nekoj tački E koja leži izmedju C i G; na isti način se dobija da se prave CD i AG seku u tački F koja leži izmedju A i G. Ako se sada primeni aksioma $II4$ na trougao AEG i na pravu CF, pokazuje se da D leži izmedju A i E, a primenom iste aksiome na trougao AEC i pravu BG saznaje se da tačka B leži izmedju A i C.

S t a v 5. Ma koje četiri tačke jedne prave mogu se uvek označiti sa A, B, C, D tako da tačka označena sa B leži izmedju A i C i takodje izmedju A i D i, dalje , da tačka označena sa C leži izmedju A i D i takodje izmedju B i D.

D o k a z. Neka su A, B, C, D četiri tačke prave g. Dokazaćemo najpre ovo:



1. Ako tačka B leži na duži AC, a tačka C na duži BD onda tačke B i C leže i na duži AD. Izabraćemo, prema aksiomama $I3$ i $II2$, tačku E koja ne leži na pravoj g i tačku F tako da E leži izmedju C i F. Višestrukom primenom aksioma $II3$ i $II4$ pokazuje se da se duži AE i BF seku u nekoj tački G i, dalje, da prava CF preseca duž GD u tački H. Pošto na taj način H leži na duži GD, a E, prema aksiomi $II3$, ne leži na duži AG, to prema aksiomi $II4$ prava EH preseca duž AD, tj. C leži na duži AD. Isto se tako dokazuje simetrično da i tačka B leži na ovoj duži.

2. Ako tačka B leži na duži AC, a tačka C na duži AD, onda i tačka C leži na duži BD, a i tačka B na duži AD. Odaberemo neku tačku G van prave g i jednu drugu tačku F tako da G leži na duži BF. Prema aksiomama $I2$, $II3$ prava CF ne preseca ni duž AB ni duž BG, i zato, prema aksiomi $II4$ ona takodje ne preseca ni duž AG. Ali, pošto tačka C leži na duži AD, to prava CF preseca duž GD u nekoj tački H. No, prava FH, opet prema aksiomama $II3$ i $II4$, preseca duž BD. Dakle, C leži na duži BD. Ostali deo tvrdjenja sledi, prema tome, iz tvrdjenja 1.

Neka su sad date ma koje četiri tačke jedne prave. Uzmimo tri od tih tačaka i označimo sa Q onu od njih koja, prema stavu 4 i aksiomi $II3$, leži izmedju dveju drugih, a obe ove označimo sa S. Tada opet iz aksiome $II3$ i stava 4, proizilazi da tačka S može imati jedan od ovih pet položaja:

R leži izmedju P i S,

ili P leži izmedju R i S,

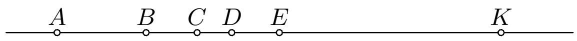
ili S leži izmedju P i R i u isto vreme Q izmedju P i S,

ili S leži izmedju P i Q,

ili P leži izmedju Q i S.

Prve četiri mogućnosti pružaju pretpostavke pod 2, a poslednju pretpostavke pod 1. Time je stav 5 dokazan.

S t a v 6 (uopštenje stava 5). Ako je dat ma koji konačan broj tačaka na pravoj, onda se one mogu uvek označiti sa $A, B, C, D, E, ..., K$, tako da tačka označena sa B leži izmedju A s jedne strane i $C, D, E, ..., K$ s druge strane, dalje C izmedju A, B s jedne strane, zatim D izmedju A, B, C s jedne strane i $E, ..., K$ s druge strane, zatim D izmedju A, B, C s jedne strane i $E, ..., K$ s druge strane itd.

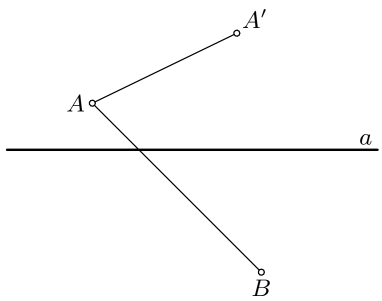


Osim ovog načina označavanja postoji još samo jedan obrnuti način označavanja $K, ..., E, D, C, B, A$ koji ima isto svojstvo.

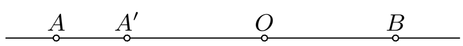
S t a v 7. Izmedju ma koje date tačke jedne prave postoji uvek beskrajno mnogo tačaka.

S t a v 8. Svaka prava a koja leži u ravni α razdvaja tačke ove ravni α koje ne leže na toj pravoj u dve oblasti sledećeg svojstva: svaka tačka A jedne oblasti sa svakom tačkom B druge oblasti odredjuje duž AB u čijoj unutrašnjosti leži jedna tačka prave a; naprotiv, ma koje dve tačke A i A' iste oblasti odredjuju duž AA' koja ne sadrži nijednu od tačaka prave a.

D e f i n i c i j a. Reći ćemo da tačke A i A' leže u ravni α sa iste strane od prave a i da tačke A i B leže u ravni α sa raznih strana od prave a.



D e f i n i c i j a. Neka su A, A', O, B četiri tačke na pravoj a tako da tačka O leži izmedju A i B, ali ne leži izmedju A i A'. Tada ćemo kazati: tačke A i A' leže na pravoj a sa iste strane od tačke O, a tačke A, B leže na pravoj a sa raznih strana od tačke O. Sve tačke prave a koje leže sa iste strane od tačke O, nazivaju se i polupravom koja polazi od tačke O; prema tome, svaka tačka prave deli tu pravu na dve poluprave.



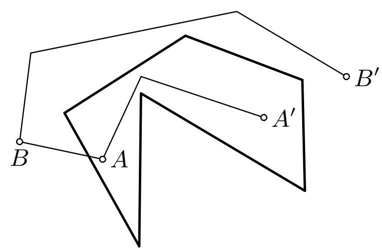
D e f i n i c i j a. Sistem duži $AB, BC, CD, ...KL$ koji vezuje tačke A i L naziva se izlomljenom linijom; ova izlomljena linija označava se kratko sa $ABCD...KL$. Tačke koje leže u unutrašnjosti duži $AB, BC, CD, ...KL$, kao i tačke $A, B, C, D, ..., K, L$ nazivaju se sve zajedno tačkama izlomljene linije.

Ako se tačke $A, B, C, D, ..., K, L$ sve nalaze u jednoj pravoj, a osim toga ako se tačka L poklapa sa tačkom A, takva će se izlomljena linija nazvati poligonom i označiti kao poligon $ABCD...K$. Duži $AB, BC, CD, ..., KA$ nazivaju se stranama poligona, a tačke $A, B, C, D, ..., K$ temenima poligona. Poligon sa 3,4,...,n temena naziva se trouglom, četvorouglom,...
n-touglom.

D e f i n i c i j a. Ako su sva temena poligona različita i nijedno teme poligona ne leži na jednoj njegovoj strani i ako ma koje dve strane poligona nemaju nijednu zajedničku tačku, taj se poligon naziva prostim.

Pomoću stava 8 doći ćemo sada bez znatnih teskoća do sledećih stavova:

S t a v 9. Svaki prosti poligon koji leži u ravni α razdvaja one tačke ravni α koje ne pripadaju poligonu na dve oblasti, unutrašnju i spoljašnju, sa ovim svojstvom: ako je A tačka unutrašnje oblasti (u n u t r a š n j a t a č k a), a B tačka spoljašnje oblasti (s p o lj a š n j a t a č k a), svaka izlomljena linija koja leži u ravni α i vezuje tačke A i B ima najmanje jednu zajedničku tačku sa poligonom; naprotiv, ako su A, A' dve unutrašnje tačke poligona, B, B' dve spoljašnje tačke poligona , to u ravni α postoje uvek izlomljene linije koje spajaju tačku A sa A' i tačku B sa B' i nemaju nijednu zajedničku tačku sa poligonom.



Pri podesnom izboru naziva za obe oblasti postoje uvek prave u ravni α koje cele leže u spoljašnjoj oblasti poligona, a naprotiv, ne postoji nijedna prava koja bi cela ležala u unutrašnjoj oblasti poligona.

S t a v 10. Svaka ravan α razdvaja ostale tačke prostora u dve oblasti koje imaju ovo svojstvo: svaka tačka A jedne oblasti sa svakom tačkom B druge oblasti odredjuje duž AB koja u sebi sadrži jednu tačku ravni α; naprotiv, ma koje dve tačke A i A' jedne i iste oblasti odredjuju duž AA' koja ne sadrži nijednu tačku ravni α.

D e f i n i c i j a. Koristeći se oznakama iz stava 10, reći ćemo: tačke A i A' leže u prostoru sa iste strane od ravni α, a tačke A i B leže u prostoru sa različitih strana od ravni α.

Stav 10 izražava najvažnije činjenice u odnosu na raspored elemenata u p r o s t o r u; otuda su ove činjenice isključivo posledica dosad posmatranih aksioma i nije potrebna nijedna nova p r o s t o r n a aksioma grupe II.

§5. Grupa aksioma III: Aksiome podudarnosti

Aksiome ove grupe definišu pojam podudarnosti a time i pojam kretanja.

D e f i n i c i j a. Duži stoje u izvesnim odnosima medju sobom, za čija nam označavanja služe reči „podudarno” (kongruentno) ili „jednako".

III 1. Ako su A, B dve tačke na pravoj a i ako je, dalje, A' tačka na istoj ili na drugoj pravoj a', onda se može uvek naći takva tačka B' prave a' na datoj strani od tačke A', da duž AB bude podudarna ili jednaka duži $A'B'$,sto ćemo označiti na sledeći način:

$$AB = A'B'$$

Ova aksioma zahteva mogućnost prenošenja duži. Jednoznačnost takvog prenošenja biće docnije dokazana.

Duž je bila definisana prosto kao sistem dveju tačaka i označena sa AB ili BA. Poredak ovih tačaka nije u definiciji uzet u obzir; zato formule

$$AB = A'B', AB = B'A'$$

$$BA = A'B', BA = B'A'$$

imaju isto značenje.

*III*2. Ako su duži $A'B'$ i $A''B''$ podudarne jednoj istoj duži AB, biće i duž $A'B'$ podudarna duži $A''B''$, ili kratko: ako su dve duži podudarne trećoj, podudarne su i medju sobom.

Pošto se podudarnost ili jednakost uvodi tek pomoću ovih aksioma, to najpre nije samo po sebi razumljivo da je svaka duž sama sebi podudarna; ali ova činjenica sledi iz prvih dveju aksioma podudarnosti, kad prenesemo duž AB na ma koju polupravu tako da je konstruisana duž $A'B'$ podudarna duži AB i tada primenimo aksiomu $III2$ na podudarnosti $AB = A'B'$ i $AB = A'B'$.

Na osnovu toga dobija se dalje, primenom aksiome III_2, da podudarnost duži ima svojstvo simetije i tranzitivnosti, tj. da važe stavovi:

$$\text{ako je } AB \equiv A'B',$$

$$\text{onda je i } A'B' \equiv AB,$$

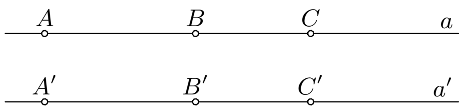
$$\text{ako je } AB \equiv A'B'$$

$$\text{i } A'B'' \equiv A''B''$$

$$\text{onda je i } AB \equiv A''B''.$$

Na osnovu simetrije podudarnosti duži može se reći: dve duži su „medjusobno podudarne".

III_3. Neka su AB i BC dve duži na pravoj a bez zajedničkih tačaka i neka su, dalje, $A'B'$ i $B'C'$ dve duži na istoj pravoj a ili na nekoj drugoj pravoj a' koje isto tako nemaju zajedničkih tačaka; ako je $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$ i biće uvek i $AC \equiv A'C'$.



Ova aksioma izražava zahtev mogućnosti sabiranja duži. Prenošenje uglova biće isto tako ispitano kao i prenošenje duži. Osim mogućnosti prenošenja uglova svakako se mora aksiomatički zahtevati još jednoznačnost; naprotiv, tranzitivnost i aditivnost mogu se dokazati.

D e f i n i c i j a. Neka je α proizvoljna ravan, a h i k neka su dve ma koje različite poluprave koja izlaze iz tačke O u ravni α i pripadaju raznim pravima. Sistem ove dve poluprave h, k nazivaćemo uglom i označićémo $\angle(h, k)$ ili sa $\angle(k, h)$.

Poluprave h, k nazivaju se kracima ugla, a tačka O naziva se temenom ugla.

Položeni i ispupčeni uglovi isključeni su ovom definicijom.

Neka poluprava h pripada pravoj $\bar{h}$, a poluprava k pravoj $\bar{k}$. Poluprave h i k uzete zajedno sa tačkom O, dele ostale tačke ravni u dve oblasti: za sve tačke koje sa h leže na istoj strani od $\bar{k}$ i sa k na istoj strani od $\bar{h}$, kažemo da leže u unutašnjosti ugla $\angle(h, k)$; za sve druge tačke kažemo da leže u spoljašnjosti ili van ovog ugla.

Na osnovi aksioma I i II lako se pokazuje da obe oblasti sadrže tačke i da duž koja vezuje dve tačke u unutrašnjosti ugla, uvek cela leži u unutrašnjosti ugla. Isto se tako lako mogu dokazati sledeće činjenice: ako tačka H leži na h i tačka H na k, to cela duž HK leži u unutrašnjosti. Poluprava koja polazi iz tačke O ili cela leži u unutrašnjosti ugla ili cela leži van tog ugla; poluprava koja leži u unutrašnjosti ugla preseca duž HK. Ako je A tačka jedne oblasti, a B tačka druge oblasti, to svaka izlomljena linija koja vezuje A i B ili prolazi kroz tačku O ili ima sa h ili k najmanje jednu zajdničku tačku; naprotiv, ako su A, A' tačke iste oblasti, to uvek postoji izlomljena linija koja vezuje tačku A sa A' i niti prolazi kroz tačku O niti kroz ijednu od tačaka polupravih h i k.

D e f i n i c i j a. Uglovi stoje u izvesnim medjusobnim odnosima za čije nam označavanje takodje služe reči „podudarno"(kongurentno) ili „jednako".

III_4. Neka je dat ugao $\angle(h, k)$ i ravni α i prava a' u ravni α' kao i odredjena strana ravni α' prema pravoj a'. Neka h' označava polupravu prave a' koja polazi iz tačke O'; onda u ravni α' postoji jedna i samo jedna poluprava k' tako da ugao $\angle(h,k)$ podudaran ili jednak uglu $\angle(h',k')$ i u isto vreme sve unutrašnje tačke ugla $\angle(h',k')$ nalaze se na datoj strani od prave a', što ćemo označiti na ovaj način:

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Svaki ugao je podudaran samom sebi, tj. uvek je

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$$

Ukratko rečeno: svaki ugao se može na jednoznačan način preneti u datoj ravni na datu polupravu sa date strane. Pri definisanju ugla nismo uzimali u obzir smer obrtanja, kao što nismo uzimali u obzir smer kod duži. Otuda i oznake

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k'),\ \angle(h,k) \equiv \angle(k',h'),\ \angle(k,h) \equiv \angle(h',k'),\ \angle(k,h) \equiv \angle(k',h')$$

imaju isti smisao.

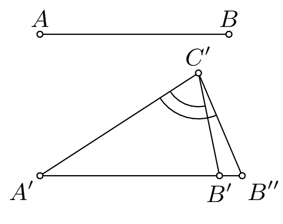
D e f i n i c i j a. Ugao sa temenom u tački B na čijem jednom kraku leži tačka A, a na drugom tačka C, označava se i sa $\angle ABC$ ili kratko, sa $\angle B$. Uglovi se označavaju i sa malim grčkim slovima.

III_5. Ako za dva trougla ABC i $A'B'C'$ važe podudarnosti

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

onda uvek postoji i podudarnost.

Aksiome III_{1-3} sadrže samo iskaze o podudarnosti duži; zato se one mogu nazivati linearnim aksiomama III. Aksioma III_4 sadrži iskaze o podudarnosti uglova. Aksioma III_5 vezuje medju sobom pojmove podudarnosti duži i uglova.



Aksiome III_4 i III_5 sadrže iskaze o elmentima ravanske geometrije i zato se mogu nazvati aksiomama ravni grupe III.

Jednoznačnost prenošenja duži sledi iz jednoznačnosti prenošenja uglova uz pomoć aksiome III_5 . Pretpostavimo da se duž AB može preneti na polupravu koja polazi iz tačke A' na dva načina, naime do tačke B' i do tačke B''. Uzećemo tada tačku C' van prave $A'B'$ i dobićemo kongruencije

$$A'B' \equiv A'B'', \; A'C' \equiv A'C', \; \angle A'B'C' \equiv \angle B''A'C'$$

dakle, prema aksioma III_4

$$\angle A''C'B' \equiv \angle A'C'B''$$

što protivureči jednoznačnosti prenošenja ugla koja se zahteva u aksiomi III_4.

§6. Posledice aksioma podudarnosti

D e f i n i c i j a. Dva ugla koja imaju zajedničko teme i jedan zajednički krak, a čiji nezajednički kraci obrazuju pravu nazivaju se uporednim uglovoma. Dva ugla sa zajedničkim temenom čiji kraci obrazuju dve prave nazivaju se unakrsnim uglovima. Ugao koji je svom uporednom uglu podudaran naziva se pravim uglom.

Dokazaćemo sada redom ove stavove:

S t a v 11. U trouglu sa dve podudarne strane uglovi koji leže naspram tih strana su podudarni, ili, kraće: u ravnokrakom trouglu uglovi na osnovici su jednaki. Ovaj stav sledi iz aksiome III_5 i poslednjeg dela aksiome III_4.

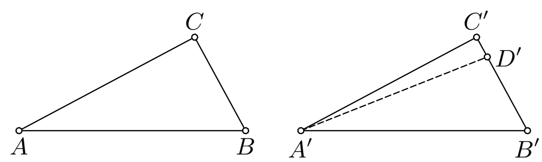
D e f i n i c i j a. Za trougao ABC kaže se da je podudaran trouglu $A'B'C'$, ako su podudarnosti

$$AB \equiv A'B', \; AC \equiv A'C', \; BC \equiv B'C'$$
$$\angle A \equiv \angle A', \; \angle B \equiv \angle B', \; \angle C \equiv \angle C'$$

sve zadovoljene.

S t a v 12 (prvi stav o podudarnosti trouglova). Trougao ABC je podudaran trouglu $A'B'C'$, ako važe podudarnosti

$$AB\equiv A'B', \; AC\equiv A'C', \; \angle A\equiv\angle A'.$$



D o k a z. Prema aksiomi III_5 postoje podudarnosti

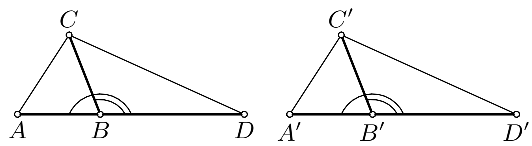
$$\angle B\equiv\angle B', \; \angle C\equiv\angle C',$$

i zato ostaje samo još da se dokaže da važi podudarnost $BC\equiv B'C'$. Pretpostavimo suprotno, naime da BC nije podudarno sa $B'C'$ i odredimo na $B'C'$ tačku D' tako da je $BC\equiv B'C'$. Tada se, primenom aksiome III_5 na trouglove ABC i $A'B'C'$, dobija da je $\angle ABC \equiv \angle A'B'D'$. Bio bi, dakle, ugao $\angle BAC$ kongruentan kako uglu $\angle B'A'D'$, tako i uglu $\angle B'A'C'$; ovo je moguće, pošto se prema aksiomi III_4 svaki ugao može u ravni preneti samo na jedan način na datu polupravu sa date strane u ravni. Time je dokazano da je trougao ABC kongruentan trouglu $A'B'C'$. Isto tako lako se dokazuje sledeći stav.

S t a v 13 (drugi stav o podudarnosti trouglova). Trougao ABC podudaran je drugom trouglu $A'B'C'$ ako važe podudarnosti

$$AB \equiv A'B',\ \angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B'.$$

S t a v 14. Ako je ugao $\angle ABC$ podudaran drugom uglu $\angle A'B'C'$ biće i njegov uporedni ugao $\angle CBD$ podudaran uporednom uglu
$\angle C'B'D'$ onog drugog ugla.



D o k a z. Izaberimo tačke A', C', D' na kracima koji polaze iz tačke B' tako da bude

$$AB \equiv A'B',\ CB \equiv C'B',\ DB \equiv D'B'.$$

Iz stava 12 tada sledi da je trougao ABC podudaran trouglu $A'B'C'$ tj. važe podudarnosti

$$AC \equiv A'C' \text{ i } \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

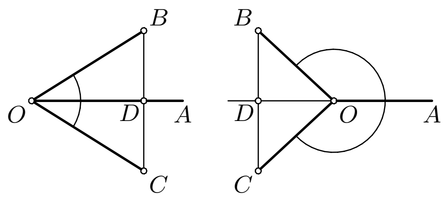
A osim toga kako je prema aksiomi III_3 duž AD podudarna duži $A'D'$, iz istog stava 12 sledi da je trougao CAD podudaran trouglu $C'A'D'$, tj. važe podudarnosti:

$$CD{\equiv}C'D' \text{ i } \angle ADC \equiv \angle A'D'C',$$

a odatle sledi, posmatrajući trouglove BCD i $B'C'D'$ prema aksiomi III_5,

$$\angle CBD \equiv \angle C'B'D'.$$

Neposredna posledica stava 14 jeste stav o podudarnosti unakrsnih uglova. Dalje, iz istog stava sledi egzistencija pravog ugla. Ako se, naime, prenese proizvoljan ugao na polupravu OA od tačke O na obe strane i na slobodnim kracima od tačke O uzmu kongruentne duži $OB{\equiv}OC$, to će duž BC preseći pravu OA u nekoj tački D. Poklopi li se pri tome tačka D sa tačkom O, onda su uglovi $\angle BOA$ i $\angle COA$ jednaki uporednim uglovima i zato pravi. Leži li, pak, D na polupravoj DA, biće prema konstrukciji, $\angle DOB \equiv \angle DOC$, a u slučaju da D leži na drugoj polupravoj, to iz stava 14 sledi pomenuta podudarnost.



Prema aksiomiIII_2 svaka duž podudarna ja samoj sebi: $OD \equiv DO$. Prema tome, na osnovu aksiome III_5 sledi da je $\angle ODB \equiv \angle ODC$.

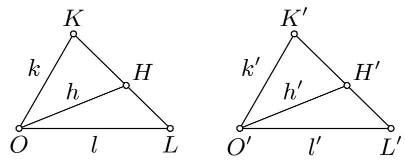
S t a v 15. Neka su h, k, l sa jedne strane i h', k', l' sa druge strane po tri poluprave koje polaze iz iste tačke O odnosno O' i leže u ravni α odnosno α'. Neka pri tome h, k i h', k' leže na istoj strani ili raznim stranama od l odnosno l'. Ako tada postoje podudarnosti

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l') \text{ i } \angle(k,l) \equiv \angle(k',l'),$$

onda je uvek i

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Dokaz će biti izveden za slučaj kada h i k leže na istoj strani od l, a prema pretpostavci takodje h' i k' leže na istoj strani od l'. Pomoću stava 14 drugi se slučaj svodi na prvi slučaj. Iz definicije sledi da ili h leži u uglu $\angle(k,l)$ ili k lezi u uglu $\angle(h,l)$. Uzmimo označavanja tako da h leži u uglu $\angle(k,l)$. Odaberimo na kracima k, k', l, l' tačke K, K', L, L' tako da bude $OK \equiv O'K'$. Prema jednom prethodno navedenom stavu, poluprava h preseca duž KL u tački H.



Uzmimo tačku H' na polupravoj h' tako da bude $OH \equiv O'H'$. U trouglovima OLH i $O'L'H'$, kao i u trouglovima OLK i $O'L'K'$ na osnovu stava 12, dobijaju se podudarnosti

$$\angle OLH \equiv \angle O'L'H', \angle OLK \equiv \angle O'L'K',$$

$$LH \equiv L'H', LK \equiv L'K'$$

i najzad

$$\angle OLK \equiv \angle O'L'K'$$

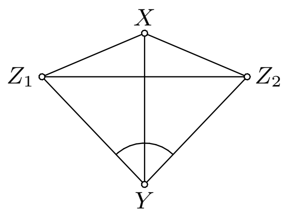
Kako se, prema aksiomi III_4, svaki ugao može samo na jedan način preneti na datu polupravu sa date strane u nekoj ravni i kako H' i K', prema pretpostavci, leže na istoj strani od l' , to na osnovu dveju pomenutih podudarnosti duži i na osnovu aksiome III_3 lako pokazuje da je $HK \equiv H'K'$. Iz podudarnosti $OK \equiv O'K'$ i $HK \equiv H'K'$ i $\angle OKL \equiv \angle O'K'L'$ može se pomoću aksiome III_5 izvesti tačnost našeg tvrdjenja. Na sličan način dolazimo do ove činjenice:

S t a v 16. Neka je ugao $\angle(h, k)$ koji je u ravni α podudaran uglu $\angle(h', k')$ koji je u ravni α' i neka je l poluprava ravni α koja polazi iz tamena ugla $\angle(h, k)$ i prostire se u unutrašnjosti ovog ugla: tada u ravni α' postoji jedna i samo jedna poluprava l' koja polazi iz temena ugla $\angle(h', k')$ i prostire se u unutrašnjosti ovog ugla tako da je

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h', k') \ \angle(k, l) \equiv \angle(k', l').$$

Da bismo dobili treći stav o podudarnosti i osobinu simetrije podudarnosti uglova, izvešćemo najpre iz stava 15 još ovaj stav:

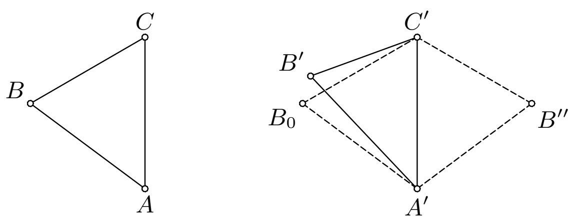
S t a v 17. Ako dve tačke Z_1 i Z_2 leže sa raznih strana prave XY i ako pri tome važe podudarnosti $XZ_1 \equiv XZ_2$ i $YZ_1 \equiv YZ_2$, biće i ugao $\angle\ XYZ_1$ podudaran uglu $\angle XYZ_2$.



D o k a z. Prema stavu 11 je $\angle XZ_1Z_2 \equiv \angle XZ_2Z_1$ i $\angle YZ_1Z_2 \equiv \angle YZ_2Z_1$. Zato iz stava 15 sledi podudarnost: $\angle XZ_1Y \equiv \angle XZ_2Y$. Naročiti slučajevi kad X odnosno Y leže na Z_1Z_2 rešavaju se još prostije. Iz poslednje podudarnosti i pretpostavljenih podudarnosti $XZ_1 \equiv XZ_2$ i $YZ_1 \equiv YZ_2$ sledi prema aksiomi III_5 tvrdjenje:

$$\angle XYZ_1 \equiv \angle XYZ_2.$$

S t a v 18 (treći stav o podudarnosti trouglova). Ako su u dva trougla ABC i $A'B'C'$ odgovarajuće strane podudarne, onda su trouglovi podudarni.



D o k a z. Kako je na strani 11 dokazana osobina simetrije za podudarnost duži, dovoljno je dokazati da je trougao ABC podudaran trouglu $A'B'C'$. Prenesimo ugao $\angle BAC$ na polupravu $A'C'$ sa obe strane tačke A'. Na kraku koji sa tačkom B' leži sa iste strane od $A'C'$ odaberimo tačku B_0 tako da je $A'B_0 \equiv AB$; i odaberimo na drugom slobodnom kraku tačku B'' tako da je $A'B''{\equiv}AB$. Prema stavu 12 biće $BC \equiv B_0C'$ i isto tako $BC \equiv B''C'$. Iz dosad pomenutih podudarnosti zajedno sa podudarnostima iz pretpostavke prema aksiomi III_2 dobijamo podudarnosti

$$A'B'' \equiv A'B_0,\ B''C' \equiv B_0C'$$

i

$$A'B'' \equiv A'B',\ B''C' \equiv B'C'.$$

Pretpostavke stava 17, dakle, važe kako za oba trougla $A'B''C'$ i $A'B_0C'$ tako isto i za oba trougla $A'B''C'$ i $A'B'C'$, tj. ugao $\angle B''A'C'$ podudaran je kako uglu $\angle B_0A'C'$, tako i uglu $\angle B'A'C'$. No kako se, prema aksiomi III_4, svaki ugao može samo na jedan način preneti na datu polupravu sa date strane u nekoj ravni, to se poluprava $A'B_0$ mora poklopiti sa polupravom $A'B'$, tj. ugao kongruentan uglu $\angle BAC$ koji je prenet sa odradjene strane na $A'C'$ jeste ugao $\angle B'A'C'$. Iz podudarnosti $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ i iz pred- postavljenih podudarnosti duži sledi, prema stavu 12, tvrdjenje naše teoreme:

S t a v 19. Ako su dva ugla $\angle(h',k')$ i $\angle(h'',k'')$ podudarna trećem uglu $\angle(h,k)$, onda je i ugao $\angle(h',k')$ podudaran uglu $\angle(h'',k'')$ Ovaj stav koji odgovara aksiomi III_2, može se ovako formulisati: ako su dva ugla podudarna trećem, oni su medju sobom podudarni.

D o k a z. Neka su tačke O', O'' i O temena tri data ugla. Odaberimo na po jednom kraku svakog od ovih uglova tačke A', A'' i A tako da bude $O'A'{\equiv}OA$ i $O'A''{\equiv}OA$. Isto tako odaberimo na drugim kracima tačke B', B'' i B tako da bude $O'B'{\equiv}OB$ i $O''B''{\equiv}OB$. Ove podudarnosti zajedno sa obe pretpostavke

$$\angle(h',k') \equiv \angle(h,k) \text{ i } \angle(h'',k'') \equiv \angle(h,k)$$

prema stavu 12, daju podudarnosti

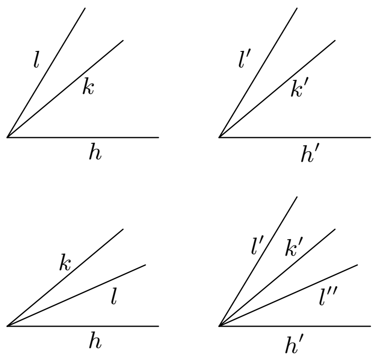
$$A'B' \equiv AB \text{ i } A''B'' \equiv AB.$$

Prema aksiomi III_2, dakle, sve tri odgovarajuće stranice trouglova $A'B'O'$ i $A''B''O''$ podudarne su, a time, prema stavu 18 važi

$$\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'').$$

Iz stava 19, isto kao za duži iz aksiome III_2, sledi osobina simetrije podudarnosti uglova, tj.: ako je $\angle\alpha\equiv \angle\beta$ onda su uglovi $\angle\alpha$ i $\angle\beta$ medju sobom podudarni. Naročito, stavovi 12-14 mogu se sad izraziti u simetričnoj formi. Sad možemo zasnovati uporedjivanje veličina uglova.

S t a v 20. Neka su data ma koja dva ugla $\angle(h,k)$ i $\angle(h',k')$. Ako se tada pri prenošenju ugla $\angle(h,k)$ na polupravu h' sa strane na kojoj je poluprava l', dobije unutrašnja poluprava k', onda se prenošenjem ugla $\angle(h',k')$ na polupravu h sa strane na kojoj je k dobija spoljašnja poluprava l i obrnuto.



D o k a z. Pretpostavimo da l leži u unutrašnjosti ugla $\angle(h,k)$. Pošto je $\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$, prema stavu 16, unutrašnjoj polupravoj l odgovara poluprava l'' u unutrašnjosti ugla $\angle(h',k')$ tako da važi podudarnost $\angle(h,l)\equiv\angle(h',l'')$. Prema pretpostavci i zbog simetrije kongruencije uglova važi $\angle(h,l)\equiv\angle(h',l')$, pri čemu su l' i l'' nužno različiti, a to protivureči jednoznačnosti prenošenja ugla po aksiomi III_4. Obrnuti stav dokazuje se slično.

D e f i n i c i j a. Ako pri prenošenju ugla $\angle(h,k)$ opisanom u stavu 20, poluprava k' padne u unutrašnjost ugla $\angle(h',l')$, onda kažemo da je ugao $\angle(h,k)$ manji od ugala $\angle(h',k')$, a pišemo: $\angle(h,k) < \angle(h',l')$; ako li se pak pri tome dobije spoljašnja poluprava, onda ćemo reći: ugao $\angle(h,k)$ je veći od ugla $\angle(h',l')$, a pisati: $\angle(h,k) > \angle(h',l')$.

Vidimo da za dva ugla α i β uvek postoji jedna i samo jedna od ove tri mogućnosti:

$$\alpha < \beta \text{ i } \beta > \alpha,\ \alpha \equiv \beta,\ \alpha > \beta \text{ i } \beta < \alpha.$$

Uporedjivanje veličina uglova je tranzitivno, tj. iz svake od triju pretpostavki

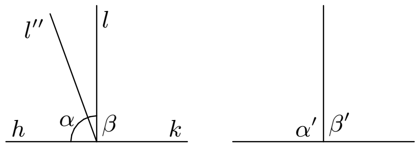
$$1.\ \alpha > \beta,\ \beta > \gamma;\ 2.\ \alpha > \beta,\ \beta \equiv \gamma;\ 3.\ \alpha \equiv \beta,\ \beta > \gamma$$

sledi

$$\alpha > \gamma.$$

Uporedjivanje veličina duži sa analognim svojstvima neposredno sledi iz aksioma II i III_1 i jednoznačnosti prenošenja duži, dokazanih ranije. Na osnovu uporedjivanja veličina uglova postiže se dokaz narednog prostog stava koji je Euklid - po mome mišljenju bez prava - stavio medju aksiome.

S t a v 21. Svi pravi uglovi su podudarni medju sobom



D o k a z. Prav ugao je, prema definiciji, takav ugao koji je podudaran svom uporednom uglu. Neka su uglovi α ili $\angle(h,l)$ i β ili $\angle(k,l)$ uporedni uglovi, isto tako i uglovi α' i β', i neka je $\alpha \equiv \beta$ i $\alpha' \equiv \beta'$. Pretpostavimo, suprotno tvrdjenju stava 21, da ugao α' nije podudaran uglu α. Tada se, prenošenjem ugla α' na polupravu h sa strane na kojoj leži l, dobija poluprava l'', različita od l. Na taj način l'' leži ili u unutrašnjosti ugla α ili u untrašnjosti ugla β. U slučaju da l' leži u unutrašnjosti ugla α, važilo bi:

$$\angle(h,l'') < \alpha,\ \alpha \equiv \beta,\ \beta < \angle(k,l'').$$

Odavde sledi na osnovu tranzitivnosti uporedjivanja veličina
$\angle(h,l'') < \angle(k,l'')$. S druge strane prema pretpostavci važi stav 14

$$\angle(h,l'') \equiv \alpha',\ \alpha' \equiv \beta',\ \beta' \equiv \angle(k,l''),$$

a iz toga sledi

$$\angle(h,l'') \equiv \angle(k,l'').$$

što protivureči odnosu $\angle(h,l'') < \angle(k,l'')$. U slučaju da l'' leži u untrašnjosti ugla β, dolazi se do potpuno analogne protivurečnosti. Time je dokazan stav 21.

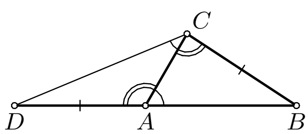
D e f i n i c i j a. Ugao koji je veći od svog uporednog ugla odnosno veći od pravog ugla, naziva se tupim uglom; ugao koji je manji od svog uporednog ugla, odnosno manji od pravog ugla, naziva se oštrim uglom.

Osnovni stav, koji je još kod Euklida igrao važnu ulogu, iz koga sledi niz činjenica, jeste stav o spoljašnjem uglu.

D e f i n i c i j a. Uglovi $\angle ABC$, $\angle BCA$ i $\angle CAB$ koji pripadaju trouglu ABC nazivaju se uglovima toga trougla; uglovi koji su uporedni ovim uglovima nazivaju se spoljašnjim uglovima trougla.

S t a v 22 (stav o spoljašnjem uglu). Spoljašnji ugao trougla veći je od oba njemu nesusedna ugla u trouglu.

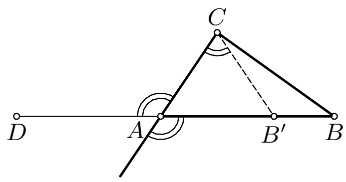
D o k a z. Neka je ugao $\angle CAD$ spoljašnji ugao trougla ABC. Neka se tačka D odabere tako da je $AD \equiv CB$.



Dokažimo najpre da je $\angle CAD \equiv\!|\!\equiv \angle ACB$, to bi usled podudarnosti $AC \equiv CA$ i prema aksiomi III_5, važilo: $\angle ACD \equiv \angle CAB$. Iz stavova 14 i 19 sledilo bi sada da je ugao $\angle ACD$ podudaran uglu koji je uporedan uglu $\angle ACB$. Tada bi, prema aksiomi III_4, tačka D ležala na pravoj CB, što protivureči aksiomi I_2. Važi, dakle,

$$\angle CAD \equiv\!|\!\equiv \angle ACB.$$

No, takodje ne može biti $\angle CAD < \angle ACB$, jer tada bismo, prenošenjem spoljašnjeg ugla $\angle CAD$ u tačku C na CA sa one strane na kojoj leži B, dobili krak koji se prostire u unutrašnjosti ugla $\angle ACB$; taj krak bi presecao duž AB u nekoj tački B'. Tada bi u trouglu $AB'C$ spoljašnji ugao $\angle CAD$ bio podudaran uglu $\angle ACB'$. A to, kao što je gore dokazano, nije moguće. Dakle, ostaje još samo mogućnost: $\angle CAD < \angle ACB$.



Isto tako sledi da je ugao koji je unakrsan uglu $\angle CAD$ veći od ugla $\angle ABC$, a iz podudarnosti unakrsnih uglova i tranzitivnosti uporedjivana veličina uglova sada sledi $\angle CAD > \angle ABC$.

Time je tvrdjenje potpuno dokazano.

Važne posledice iz stava o spoljašnjem uglu jesu naredni stavovi.

S t a v 23. U svakom trouglu prema većoj strani leži veći ugao.

Dokaz. Prenesimo manju od dveju posmatranih strana trougala od zajedničkog temena na veću stanu. Tvrdjenje tada sledi usled tranzitivnosti uporedjivanja veličina uglova iz stavova 11 i 12.

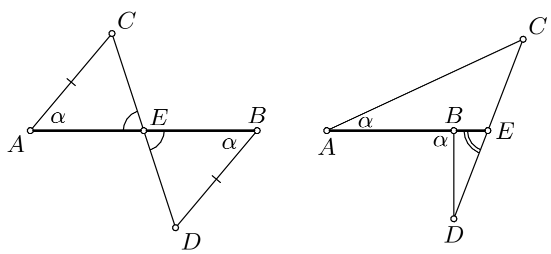
S t a v 24. Trougao sa dva jednaka ugla je ravnokraki.

Ova inverzija stava 11 jeste neposredna posledica stava 23. Iz stava 22 dobija se dalje na prost način dopuna drugog stava podudarnosti trouglova:

S t a v 25. Dva trougla ABC i $A'B'C'$ podudarna su jedan drugom ako postoje podudarnosti

$$AB \equiv A'B',\ \angle A \equiv \angle A' \text{ i } \angle C \equiv \angle C'$$

S t a v 26. Svaka duž može se prepoloviti.



D o k a z. Prenesimo na datu duž AB kod njenih krajnjih tačaka sa raznih strana isti ugao α, pa na slobodne krake prenesimo jednake duži: $AC \equiv BD$. Pošto tačke C i D leže na raznim stranama od AB, to duž CD preseca pravu AB u nekoj tački E.

Pretpostavka da se tačka E poklapa sa tačkom A ili B, neposredno protivureči stavu 22. Uzmemo li da B leži izmedju A i E, onda bi, prema stavu 22, bilo:

$$\angle\, ABD > \angle BED > \angle BAC,$$

što protivureči konstrukciji. Ista se protivurečnost dobija iz pretpostavke da tačka A leži izmedju B i E. Dakle, prema stavu 4, tačka E leži na duži AB. Prema tome su uglovi $\angle AEC$ i $\angle BED$, kao unakrsni uglovi, podudarni. Zato se stav 25 može primeniti na trouglove AEC i BED, a time se dobija

$$AE \equiv EB.$$

Kao neposredna posledica iz stavova 11 i 26 sledi činjenica: svaki se ugao može prepoloviti.

Pojam podudarnosti može se sada proširiti i na proizvoljne figure.

D e f i n i c i j a. Ako su tačke $A, B, C, D, ..., K, L$ na pravoj a i tačke $A', B', C', D', ..., K', L'$ na pravoj a' takva dva niza tačaka da su sve odgovarajuće duži AB i $A'B'$, AC i $A'C'$, BC i $B'C'$,..., KL i $K'L'$ po dve medju sobom podudarne, onda se za oba niza tačaka kaže da su medjusobno podudarna; tačke A i A', B i B',..., L i L' nazivaju se odgovarajućim tačkama podudarnih nizova tačaka.

S t a v 27. Ako je od dvaju podudarnih nizova tačaka $A, B, C, ..., K$, L i $A', B', C', ..., K', L''$ prvi tako uredjen da tačka B leži izmedju A s jedne strane i $C, D, ..., K, L$ s druge strane, tačka C izmedju A, B s jedne strane $D, ..., K, L$ s druge strane, itd. onda su tačke $A', B', ..., K', L'$ na isti način uredjene tj. B' leži izmedju A' s jedne strane i $C', D', ..., K', L''$ sa druge strane, C' izmedju A', B' s jedne strane i $D', ..., K', L'$ s druge strane itd.

D e f i n i c i j a. Ma koji konačan broj tačaka naziva se figurom; ako sve tačke te figure leže u jednoj ravni, onda se ona naziva ravnom figurom.

Dve figure se nazivaju podudarnim ako se njihove tačke mogu po dve i dve dodeliti jedna drugoj tako da su na ovaj način jedna drugoj dodeljene duži i jedan drugom dodeljeni uglovi - podudarni. Podudarne figure, kao što se vidi iz stavova 14 i 27, imaju ova svojstva: ako tri tačke neke figure leže na jednoj pravoj, onda će u svakoj podudarnoj figuri odgovarajuće tačke ležati isto tako na jednoj pravoj. Raspored tačaka u odgovarajućim ravnima u odnosu na odgovarajuće prave isti je u podudarnim figurama; to isto važi i za poredak odgovarajućih tačaka na odgovarajućim pravima. Najopštiji stav o podudarnosti za ravan i za prostor izražava se na ovaj način:

S t a v 28. Ako su $(A, B, C, ..., L)$ i $(A', B', C', ..., L')$ dve podudarne ravne figure i ako P označava tačku u ravni prve figure, onda se u ravni druge figure može naći tačka P' tako da su $(A, B, C, ..., L, P)$ i $(A', B', C', ..., L', P')$ takodje podudarne figure. Ako figura $(A, B, C, ..., L)$ sadrži najmanje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj, konstrukcija tačke P' je samo na jedan način moguća.

S t a v 29. Ako su $(A, B, C, ..., L)$ i $(A', B', C', ..., L')$ podudarne figure i ako P označava proizvoljnu tačku može se uvek naći tačka P' tako da su i figure $(A, B, C, ..., L, P)$ i $(A', B', C', ..., L', P')$ podudarne. Sadrži li figura $(A, B, C, ..., L)$ najmanje četiri tačke koje ne leže u jednoj ravni, onda je konstrukcija tačke P moguća samo na jedan način.

Stav 29 izražava važan razultat da su sve prostorne činjenice podudarnosti, a samim tim i svojstva kretanja u prostoru uračunavši tu i grupe aksioma I i II - posledica i pet gore postavljenih linearnih aksioma podudarnosti i aksioma podudarnosti u ravni.

§7. Grupa aksioma IV: Aksioma paralelnih

Neka je α proizvoljna ravan, a proizvoljna prava u ravni α i A tačka u toj ravni α koja leži van prave a. Povucimo u ravni α pravu c koja ide kroz tačku A i preseca pravu a, a zatim u ravni α pravu b kroz tačku A tako da prava c preseca prave a, b pod jednakim saglasnim uglovima. Tada se iz stava o spoljašnjem uglu (srav 22) lako zaključuje da prave a i b nemaju nijednu zajedničku tačku, tj. u ravni α kroz tačku A van prave a može se povući prava koja ne preseca pravu a.

Aksioma paralelnih glasi:

IV (Euklidova aksioma). Neka je a proizvoljna prava i A tačka van nje, tada postoji u ravni, odradjenoj pravom a i tačkom A, najviše jedna prava koja prolazi kroz A i ne preseca a.

D e f i n i c i j a. Iz predhodnog i na osnovu aksiome paralelnih saznajemo, da u ravni, odredjenoj sa a i A, postoji jedna i samo jedna prava koja prolazi kroz tačku A i ne preseca pravu a; tu pravu nazivamo paralelnom prema a kroz A. Aksioma paralelnih IV istog je značenja sa ovim zahtevom: Ako dve prave a, b koje leže u jednoj ravni, ne seku treću pravu c iste ravni, one se onda ne seku ni medju sobom. Ustvari, ako bi prave a, b imale zajedničku tačku A, to bi kroz tačku A u istoj ravni bile moguće dve prave a, b koje ne bi sekle pravu c; ova okolnost protivureči aksiomi paralelnih IV. Isto se tako lako dobija i obrnuta aksioma paralelnih IV iz pomenutog zahteva.

Aksioma paralelnih IV jeste aksioma ravni.

Uvodjenje aksiome paralenih znatno uprošćava osnove i olakšava izgradjivanje geometrije. Ako, naime, dodamo aksiomama podudarnosti aksiomu paralelnih, onda lako dolazimo do poznatih činjenica:

S t a v 30. Ako su dve paralelne prave presečene trećom pravom, onda su saglasni uglovi i naizmenični uglovi podudarni, i obrnuto: iz podudarnosti saglasnih ili naizmeničnih uglova sledi da su prave paralelne.

S t a v 31. Uglovi trougla čine zajedno dva prava ugla.

D e f i n i c i j a. Ako je M neka proizvoljna tačka u ravni α, onda se ukupnost svih onih tačaka A u ravni α, za koje su duži MA jedna drugoj kongruentne, naziva krugom; tačka M se naziva središte kruga.

Na osnovu ove definicije lako se izvode pomoću grupa aksioma III-IV poznati stavovi o krugu, naročito mogućnost konstukcije kruga ma kroz koje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj, kao i stav o podudarnosti svih periferijskih uglova nad isto tetivom i stav o uglovima u tetivnom četvorouglu.

§8. Grupa aksioma V: Aksiome neprekidnosti

V_1 (aksioma merenja ili Arhimedova aksioma). Ako su AB i CD ma koje dve duži, onda postoji neki takav broj n, da kad se duž CD prenese n puta od A jedno za drugim po polupravoj koja prolazi kroz tačku B prelazi se preko tačke B.

V_2 (aksioma linearne potpunosti). Sistem tačaka neke prave sa svojim relacijama rasporeda i kongruencije ne može se tako proširiti, da ostanu očuvane relacije koje postoje izmedju prethodnih elemenata kao i osnovne osobine linearnog rasporeda i kongruencije koje proističu iz aksioma I-III, i aksiome V_1.

Pod osnovnim osobinama se razumeju one u aksimama II_{1-3} i u stavu 5 formulisane osobine rasporeda kao i one u aksiomama III_{1-3} formulisane osobine podudarnosti pored jednoznačnosti prenošenja duži.

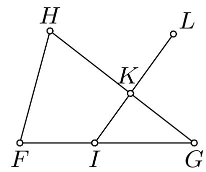
Što se tiče onih osobina sistema tačaka neke prave koje zahtevaju aksioma I_3 i stav 3 (dokazan uz pomoć aksiome II_4), ostaje prva, da na pravoj ima bar dve tačke, pri svakom proširenju sama po sebi očuvana, a druga, da za dve tačke prave uvek postoji tačka koja leži izmedju njih, posledica je nemogućnosti proširenja sistema tačaka neke prave. Da aksioma potpunosti bude ispunjena, bitno je uslovljeno time što se u njoj, medju aksiomama čije se održanje zahteva, sadrži Arhimedova aksioma. Ustvari može se pokazati: nekom sistemu tačaka na pravoj, koji zadovoljava maločas nabrojane aksiome i stavove rasporeda i kongruencije, može se uvek dodati još tačaka na taj način, da u ovako proširenom sistemu pomenute aksiome takodje važe; to znači, aksioma potpunosti, u kojoj bi se zahtevalo samo održanje pomenutih aksioma i stavova, ali ne i Arhimedova ili njoj odgovarajuća aksioma, uključivala bi prtivurečnost. Obe aksiome neprekidnosti su linearne aksiome. Uglavnom iz linearne aksiome potpunosti dobijau se ove opštije činjenice:

S t a v 32 (stav o potpunosti). Elementi geometije (tj. tačke, prave i ravni) obrazuju sistem, koji, kad se zadrže aksiome veze, rasporeda i kongruencije i Arhimedova aksioma, a pogotovo kad se zadrže sve aksiome, ne dopušta više nikakvo proširenje pomoću tačaka, pravih i ravni.

D o k a z. Elemente koji postoje pre proširenja nazvaćemo starim elementima, a one elemente koji se pri proširenju dodaju nazvaćemo novim elementima. Pretpostavka novih elemenata neposredno vodi pretpostavci nove tačke N.

Prama aksiomi I_8 postoje četiri stare tačke A, B, C, D koje nisu u jednoj ravni. Oznake se mogu tako izabrati da tačke A, B, N ne leže na jednoj pravoj. Obe ravni ABN i ACD, različite jedna od druge, imaju, prema aksiomi I_7, osim zajedničke tačke A još i zajedničku tačku E. Tačka E ne leži na pravoj AB, jer bi inače tačka B ležala u ravni ACD. U slučaju da je E nova tačka, onda u staroj ravni ACD leži nova tačka E; u slučaju pak da je E stara, nova tačka N leži u staroj ravni, naime u ravni ABE. U svakom slučaju, dakle, nova tačka leži u staroj ravni.

U staroj ravni postoji stari trougao FGH, a na duži FG stara tačka I. Ako spojimo novu tačku L sa tačkom I, tada će se, prema aksiomi II_4, prave IL i FH ili prave IL i GH seći u tački K, ako nova tačka L ne leži na pravoj IH.



U slučaju da je K nova tačka, to nova tačka K leži na staroj pravoj FH ili GH; u slučaju pak da je K stara tačka, onda nova tačka L leži na staroj pravoj IK. Otuda sve tri pretpostavke protivureče aksiomi linearne potpunosti. Prema tome, treba odbaciti pretpostavku nove tačke u staroj ravni i time uopšte pretpostavku novih elemenata.

Stav o potpunosti može se još oštrije formulisati; zadržavanje nekih pomenutih aksioma ne mora se bezuslovno zahtevati. Ali bitno za njegovo važenje jeste da je medju aksiomama čije se održanje u njemu zahteva sadržana aksioma I_7. Ustvari, može se ovo pokazati: sistemu elemenata koji zadovoljavaju aksiome $I - V$, može se uvek dodati još tačaka, pravih i ravni tako da u proširenom sistemu važe iste aksiome, izuzimajuci aksiomu I_7; to znači, stav potpunosti u kome bi bila sadržana aksioma I_7, ili njoj ekvivalentna aksioma, uključivao bi u sebe protivurečnost .

Aksioma potpunosti nije posledica Arhimedove aksiome. Ustvari, samo Arhimedova aksioma uz pomoć aksioma $I - IV$ nije dovoljna da dokaže da je naša geometrija identična sa običnom analitičkom Dekartovom (*R. Descartes*) geometrijom(up. §9 i §12). Naprotiv, dodavanjem aksiome potpunosti - mada ova aksioma ne sadrži nikakav iskaz o pojmu konvergencije - uspeva nam da dokažemo egzistenciju granice koja odgovara Dedekindovom (*Dedekind*) preseku i Bolcanov (*B. Bolzano*) stav o prostojanju tačaka zgušnjavanja, čime se tada naša geometrija pokazuje kao identična Dekartovoj geometriji.

Pomoću predhodnog razmatranja zahtev neprekidnosti je razložen na dva bitno različita dela, naime na Arhimedovu aksiomu koja ima ulogu da pripremi zahtev neprekidnosti, i na aksiomu potpunosti koja je završni član celog sistema aksioma.

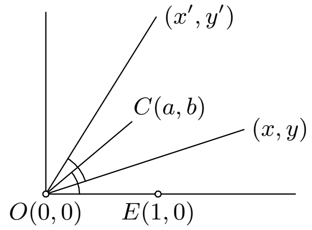
U sledećim ispitivanjima uglavnom ćemo se osloniti na Arhimedovu aksiomu i uopšte nećemo pretpostavljati aksiomu potpunosti.

Druga glava

Neprotivurečnost i uzajamna nezavisnost aksioma

§9. Neprotivurečnost aksioma

Aksiome onih pet grupa, postavljenih u prvom odeljku ne protivureče jedna drugoj, tj. iz njih se pomoću logičkih zaključaka ne može izvesti neka činjenica koja bi protivurečila jednoj od postavljenih aksioma. Da bismo se uverili u to, obrazovaćemo od realnih brojeva sistem stvari u kome će biti zadovoljene sve aksiome tih pet grupa. Posmatrajmo najpre područje Ω svih onih algebarskih brojeva koji se dobijaju ako se podje od broja 1 i konačan broj puta primene četiri računske operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje i peta operacija $|\sqrt{1+\omega^2}|$, gde ω treba uvek da označava broj koji je ranije postojao pomoću pomenutih pet operacija. Par brojeva (x, y) područja Ω smatraćemo kao tačku, a razmere $(u : v : w)$ ma koja tri broja područja Ω, u slučaju da u i v nisu oba nula, kao pravu; dalje, neka postojanje jednačine $ux + vy + w = 0$ izražava da tačka (x, y) leži na pravoj $(u : v : w)$; tada su, što se lako vidi, aksiome I_{1-3} i IV zadovoljene. Brojevi područja Ω su svi realni; uzimajuć u obzir da se ti brojevi mogu rasporediti prema svojim veličinama, možemo lako ustanoviti takve postavke za naše tačke i prave da važe i sve aksiome II rasporeda. Ustvari, ako su (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... ma koje tačke na pravoj, to će ovo biti njihov poredak na pravoj, ako brojevi x_1, x_2, x_3,... ili y_1, y_2, y_3,... u ovom poretku ili stalno opadaju ili stalno rastu; dalje da bi zahtev aksiome II_4 bio ispunjen, potrebno je samo ustanoviti da sve tačke (x, y), za koje je $ux + vy + w$ manje ili veće od 0, leže na jednoj, odnosno na drugoj strani prave $(u : v : w)$.



Lako se možemo uveriti da se ova postavka slaže sa predhodnom postavkom koja odredjuje poredak tačaka na pravoj.

Prenošenje duži i uglova izvodi se prema poznatim metodama analitičke geometrije. Transformacija oblika

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

daje paralelno pomeranje duži i uglova, a transformacija oblika

$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= -y
\end{aligned}
$$

daje ogledanje na pravoj $y = 0$. Dalje, ako se tačka (0,0) označi sa O, tačka (1,0) sa E i proizvoljna tačka (a, b) sa C, tada iz proizvoljne tačke (x, y) tačka (x', y') proizilazi obrtanjem za ugao $\angle COE$, ako je O stalna tačka obrtanja, pri čemu treba staviti

$$
\begin{aligned}
x' &= \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y \\
y' &= \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y
\end{aligned}
$$

Pošto broj

$$\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{1 + (\tfrac{a}{b})^2}$$

takodje pripada području Ω, onda pri našim postavkama važe i aksiome kongruencije III_{1-4} i očigledno je zadovoljena kako aksioma podudarnosti trouglova III_5, tako i Arhimedova aksioma V_1. Aksioma potpunosti V_2 nije zadovoljena.

Svaka protivurečnost u posledicama iz linearnih aksioma i aksioma ravni $I - IV$, V_1 morala bi se samim tim pojaviti i u aritmetici područja Ω.

Odaberemo li u gornjem izlaganju umesto područja Ω područje svih realnih brojeva, dobićemo običnu ravnu Dekartovu geometriju. Da je u ovoj poslednjoj zadovoljena, osim aksioma I_{1-3}, II, III, V_1 i aksioma potpunosti, saznaje se na ovaj način:

U Dekartovoj geometriji se samo na osnovu definicija rasporeda i podudarnosti duži može zaključiti: svaka duž se može podeliti na proizvoljan broj n podudannih delova i ako je duž AB manja od duži AC, onda je i n-ti deo od AB manji od n-tog dela AC.

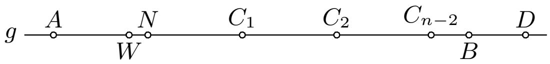
Pretpostavimo sada da postoji prava g, na kojoj se, nasuprot aksiomi potpunosti, može dodati još tačaka datoj geometriji, a da se pri tome na pravoj g ne naruši važenje aksioma II_{1-3}, III_{1-3}, V_1, stava 5 ili jednoznačnosti prenošenja duži (str. 25). Neka jedna od datih tačaka bude N. Tačka N deli pravu g u dve poluprave, od kojih svaka, prema Arhimedovoj aksiomi, sadrži i takve tačke koje postoje pre proširenja - ove poslednje ćemo nazvati starim tačkama. Dakle, tačka N razdeljuje stare tačke prave g na dve poluprave. Uzmemo li pravu g predstavljenu u parametarskom obliku

$$
\begin{aligned}
x &= mt + n, \\
y &= pt + q,
\end{aligned}
$$

u kojoj parametar t još pre proširenja pomoću N uzima sve realne vrednosti, onda će podela izvedena tačkom N pružiti Dedekindov presek ovih vrednosti. Kao što je poznato, za takav presek važi: ili prva klasa odredjena pomoću njega ima poslednji element, ili druga klasa ima prvi element. Neka na pravoj

g ovom elementu odgovara tačka A. Tada izmedju A i N ne leži ni jedna stara tačka.

Naprotiv, postoji takva stara tačka B, da N leži izmedju A i B. Dalje, prema Arhimedovoj aksiomi, postoji mnoštvo tačaka npr. n-1 različitih tačaka $N, C_1, C_2, ..., C_{n-2}, D$, tako da su n duži AN,NC_1, C_1C_2,..., $C_{n-2}D$ jedna drugoj podudarne i da tačka B leži izmedju A i D.



Podelimo tada duž AB na n podudarnih delova. Sve deone tačke su stare tačke. Neka je W ona od tih tačaka koja je najbliža tački A. Iz, na početku ovog dokaza navedenih linearnih zahteva o rasporedu i kongruenciji, proističe da je duž AW manja od AN, jer je AB manja od AD. Dakle, stara tačka W leži izmedju A i N. Prema tome, pretpostavka da se na pravoj g može dodati tačka N, ne narušavajući pri tome važenje linearnih aksioma, dovela je do protivurečnosti.

Dakle, u ravnoj Dekartovoj geometriji važe sve linearne aksiome i aksiome ravni $I - V$.

Analogna razmatranja u prostornoj geometriji ne predstavljaju nikakvu teškoću.

Svaka protivurečnost u posledicama iz aksioma $I - V$ morala bi, prema tome, da se pojavi i u aritmetici sistema realnih brojeva.

Kao što se vidi, postoji beskonačno mnogo geometrija u kojima važe aksiome $I - IV$, V_1, a samo jedna geometrija, naime Dekartova geometrija, u kojoj u isto vreme važi i aksioma potpunosti V_2.

§10. Nezavisnost aksiome paralelnih

Pošto smo utvrdili neprotivurečnost aksioma, od interesa je ispitati da li su sve one nezavisne jedna od druge. Ustvari se pokazuje da se nijedan bitni sastavni deo pomenutih grupa aksioma ne može izvesti pomoću logičkog zaključivalja iz prethodnih grupa aksioma.

Najpre, što se tiče pojedinih aksioma grupa I, II i III lako je dokazati da aksiome jedne i iste grupe u bitnome ne zavise jedna od druge.

Aksiome grupa I i II pri našem izlaganju uzete su za osnovu ostalih aksioma, tako da se samo radi o tome da se dokaže nezavisnost svake od grupa aksioma III, IV, V od ostalih.

Aksioma paralelnih IV nezavisna je od ostalih aksioma: to se na poznati način najprostije ovako pokazuje: kao elemente prostorne geometrije odaberimo tačke, prave i ravni obične (Dekartove) geometrije konstruisane u §9 ukoliko leže u unutrašnjosti neke stalne lopte, a podudarnosti ove geometrije definišimo takvim linearnim transformacijama obične geometrije koje stalnu loptu transformišu samu u sebe. Uzimajući podesne postavke doznajemo da u ovoj ne-euklidskoj geometriji važe sve aksiome izuzev Euklidove aksiome IV; a pošto je mogućnost obične geometrije dokazana u §9, otuda sledi i mogućnost ne-euklidske geometrije.

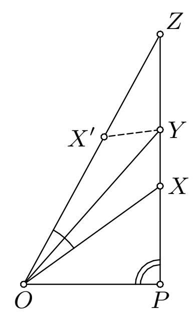
Od naročitog interesa su stavovi koji važe nazavisno od aksiome paralelnih, tj. koji su zadovoljeni kako u Euklidovoj tako i u ne-euklidskoj geometriji. Kao najvažnije primere za ove stavove navodimo oba Ležandrova (*Legendre*) stava, od kojih prvi zahteva za svoj dokaz, osim aksioma I do III, i Arhimedovu aksiomu V_1. Razmotrimo prethodno nekoliko pomoćnih stavova.

S t a v 33. Neka je dat pravougli trougao OPZ sa pravim uglom kod P. Neka se na duži PZ nalaze dve tačke X, Y tako da je

$$\angle XOY \equiv \angle YOZ.$$

Tada je

$$XY < YZ.$$



Radi dokaza prenesimo duž OX od tačke O na pravu OZ:

$$OX \equiv OX'.$$

Iz stavova 22 i 23 sledi da tačka X' leži na duži OZ, a pomoću stava 22 i aksiome III_5 dobija se:

$$\angle X'ZY < \angle OYX \equiv \angle OYX' < \angle YX'Z.$$

Odnos $\angle X'ZY < \angle YX'Z$, prema stavovima 12 i 23, dovodi sad do tvrdjenja.

S t a v 34. Ma za koja dva ugla α i ε može se uvek naći takav prirodan broj r da bude

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon$$

Pri tome $\frac{\alpha}{2^r}$ označava ugao dobijen pomoću polovljenja ugla α ponovljenog r puta.

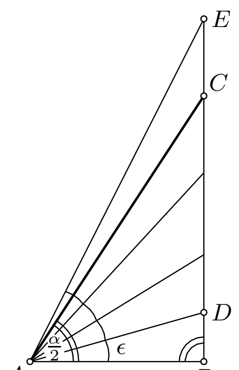
D o k a z. Neka su data dva ugla α i ε. Polovljenje ugla može se izvesti na osnovu pretpostavljenih aksioma (v. str. 22). Posmatrajmo oštar ugao $\frac{\alpha}{2}$. U slučaju da je $\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon$, tvrdjenje stava 34 pokazuje se tačno za $r = 2$. U slučaju, pak, da je $\frac{\alpha}{2} > \varepsilon$ onda iz neke tačke C jednog kraka ugla $\frac{\alpha}{2}$ spustimo na drugi njegov krak normalu koja preseca ovaj krak u nekoj tački B. Teme ugla $\frac{\alpha}{2}$ označimo sa A. Prenesemo ugao ε na krak AB u unutrašnjost ugla $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$; tada će slobodni krak konstruisanog ugla, na osnovu pretpostavljene nejednačine, presecati duž BC u nekoj tački D (up. str. 12). Arhimedova aksioma V_1 svodi se na tvrdjenje da postoji takav prirodni broj n, da je

$$nBD > BC.$$

Prenećemo ugao ε sad n-puta, i to svaki put na slobodni krak sa spoljašne strane.

Može nastupiti slučaj da slobodni krak ugla dobijen najkasnije pri n-tom prenošenju, možda pri m-tom prenošenju, kao prvi ne preseca više polupravu BC. Pošto prethodni slobodni krak još preseca ovu polupravu, ugao $(m-1)\varepsilon$ je oštar. Otuda se lako dobija da unutrašnjost ugla $m\varepsilon$ konstruisanog pomoću m-strukog prenošenja, leži u onoj poluravni od AB, koja sadrži tačku C, i dalje, da se poluprava AC prostire u unutrašnjosti ugla $m\varepsilon$, tj. važi

$$m\varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$



U drugom slučaju svaki ugao ε dobijen pri n-tostrukom prenoše-nju iseca na polupravoj BC duž, koja je, prema stavu 33, veća od duži BD ili njoj jednaka. Neka n-ti slobodni krak preseca BC u tački E. Zbir BE od n duži, isečenih na polupravoj BC, veći je od nBD, dakle tim pre veći od BC. Otuda sledi

$$n\varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$

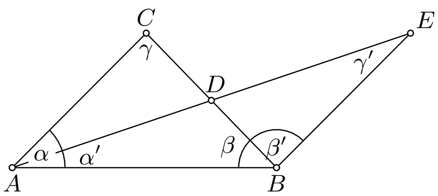
Neka je za m odn. n prirodni broj r tako odredjen da je $m < 2^{r-1}$ odn. $n < 2^{r-1}$. Označimo ugao $m\varepsilon$ odn. $n\varepsilon$ sa μ. Uglovi $\frac{\mu}{2^{r-1}}$ i $\frac{\alpha}{2^r}$ mogu se konstruisati. Iz mogućnosti uporedjivanja veličina uglova dobija se lako, da s jedne strane iz nejednačine $2^{r-1} > m$ sledi nejednačina $\frac{\mu}{2^{r-1}} > \frac{\mu}{m} = \varepsilon$, a s druge strane iz nejednačine $\mu > \frac{\alpha}{2}$ sledi nejednačina $\frac{\mu}{2^{r-1}} > \frac{\alpha}{2^r}$. Stoga na osnovu tranzitivnosti uporedjivanja veličina (str. 19) važi

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Pomoću stava 34 može se dokazati prvi Ležandrov stav.

S t a v 35 (prvi Ležandrov stav). Zbir uglova trougla je manji od dva prava ili jednak sa dva prava ugla.

D o k a z. Označimo ma koji od tri ugla datog trougla sa $\angle A = \alpha$; druga dva označimo sa $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ tako da važi $\beta \leq \gamma$. Prema stavu 26 duž BC ima tačku D koja je polovi.



Produžimo duž AD za njenu sopstvenu dužinu preko tačke D do tačke E. Na osnovu podudarnosti unakrsnih uglova (str. 15), aksioma III_5 se može primeniti na trouglove ADC i EDB i definišući na osnovu stava 15 na očigledan način zbir uglova, dobijamo za uglove α', β', γ' trougla ABE relacije

$$\alpha' + \gamma' = \alpha, \; \beta' = \beta + \gamma.$$

Prema tome, trougao ABE ima isti zbir uglova kao i trougao ABC.

Iz nejednačine $\beta \leq \gamma$ izvodi se lako, prema stavovima 23 i 12, da je

$$\alpha' \leq \gamma', \text{ a odatle } \alpha' \leq \frac{\alpha}{2}$$

Za svaki trougao ABC i ma koji njegov ugao α može se uvek naći trougao sa istim zbirom uglova, u kome je jedan ugao manji od $\frac{\alpha}{2}$ ili jednak sa $\frac{\alpha}{2}$, i zato se može, ako je osim toga dat pripodan broj r, naći trougao sa istim zbirom uglova, u kome je jedan od uglova manji od $\frac{\alpha}{2^r}$ ili jednak sa $\frac{\alpha}{2^r}$.

Pretpostavimo sad da je, nasuprot tvrdjenju prvog Ležandrovog stava, zbir uglova datog trougla veći od dva prava.

Iz stava 22 slede da je zbir dva ugla trougla manji od dva prava. Zbir uglova datog trougla može se stoga predstaviti u obliku

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\rho + \varepsilon,$$

gde ε označava ma koji ugao, a ρ prav ugao. Prema stavu 34, može se odrediti prirodan broj r tako, da bude

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Konstruišimo sad na pokazani način trougao sa uglovima α^*, β^*, γ^* koji zadovoljavaju relacije:

$$\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 2\rho + \varepsilon,\ \alpha^* \leq \frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

U ovom trouglu je

$$\beta^* + \gamma^* > 2\rho,$$

što protivureči stavu 22. Time je dokazan prvi Ležandrov stav.

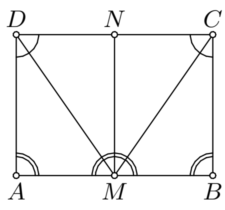
S t a v 36. Ako četvorougao $ABCD$ ima kod A i B prave uglove i ako su u njemu osim toga suprotne strana AD i BC podudarne, onda su uglovi $\angle C$ i $\angle D$ jedan drugom podudarni. Dalje, normala, podignuta u sredini M duži AB, preseca suprotnu stranu CD u tački N tako da su četvorouglovi $AMND$ i $BMNC$ podudarni.

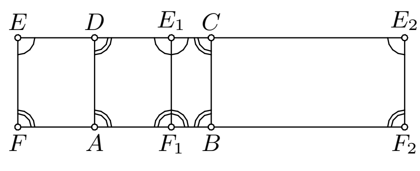
D o k a z. Normala, podignuta u tački M na AB, leži, kako to sledi iz stavova 21 i 22, u unutrašnjosti ugla $\angle DMC$ i stoga, prema jednom od stavova pomenutih na str. 12, preseca duž CD u tački N. Iz stavova 12, 21 i 15 sledi da su trouglovi MAD i MBC, pa stoga i trouglovi MDN i MCN podudarni. Iz ovih podudarnosti se pomoću stava 15 dobija

$$\angle BCN \equiv \angle ADN.$$

Dakle, četvorouglovi $AMND$ i $BMNC$ su podudarni.

S t a v 37. Ako su u četvorouglu $ABCD$ sva četiri ugla prava, onda normala EF spuštena iz neke tačke E prave CD na suprotnu stranu AB stoji normalno i na CD.



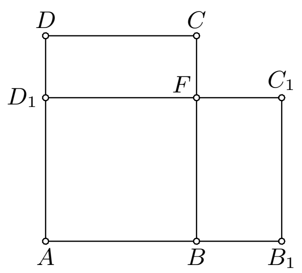


D o k a z. Uvedimo pojam ogledanja na pravoj a na ovaj način: ako ma iz koje tačke P spustimo normalu ma na koju pravu a i ako tu normalu produžimo za njenu sopstvenu dužinu preko podnožne tačke do P', onda se tačka P' naziva ogledalskom slikom tačke P.

Oglednimo duž EF na AD i BC. Ogledalske slike E_1F_1 i E_2F_2 su, što proističe iz drugog dela stava 36, podudarne duži EF. Tačke F_1 i F_2, isto tako kao i tačka F, leže na AB; tačke E_1 i E_2 kao i tačka E, leže na CD. Pretpostavke prvog dela stava 36 su tačne za četvorouglove EFF_1E_1, EFF_2E_2 i $E_1F_1F_2E_2$, a odatle sledi jednakost četiri ugla sa temenima u tačkama E, E_1, E_2. Prema tome kod jedne od ovih tačaka nastaju dva jednaka uporedna ugla (u gornjoj figuri kod tačke E_1); tj. ta četiri jednaka ugla su prava.

S t a v 38. Ako su ma u kom četvorouglu svi uglovi pravi, onda je u svakom četvorouglu sa tri prava ugla i četvrti ugao prav.

D o k a z. Neka je $A'B'C'D'$ četvorougao sa četiri prava ugla i neka je $ABCD$ ma koji četvorougao sa tri prava ugla kod A, B, D. Konstruišimo četvorougao $AB_1C_1D_1$, podudaran četvorouglu $A'B'C'D'$ čiji pravi ugao kod A se poklapa sa uglom A četvorougla $ABCD$.

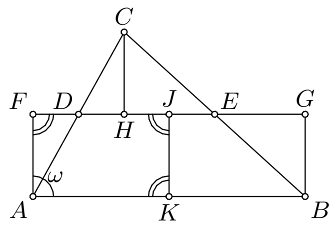


U slučaju da se tačka B poklapa sa B_1 ili tačka D sa D_1, onda je tvrdjenje u saglasnosti sa stavom 37. U slučaju da tačka B leži izmedju A i B_1, a tačka D_1 izmedju A i D, onda, slično kao u dokazu stava 36, sledi iz stava o spoljašnjem uglu da se duži BC i C_1D_1 seku u nekoj tački F. Stav 37 pokazuje dalje da je ugao kod F, a stoga i ugao kod tačke C, prav ugao.

Na sličan način se dobija tvrdjenje za ostale moguće rasporede tačaka A, B, B_1 i A, D, D_1.

Pomoću stava 38 može se dokazati drugi Ležandrov stav.

S t a v 39 (drugi Ležandrov stav). Ako je ma u kom trouglu zbir uglova jednak dvama pravim, onda je zbir uglova svakog trougla jednak dvama pravim.



D o k a z. Svakom trouglu ABC sa zbirom uglova $2w$ možemo dodeliti četvorougao koji ima tri prava ugla, a čiji je četvrti ugao jednak w. Radi ovog cilja spojimo sredine D i E strana AC i BC i spustimo iz tačaka A, B i C na spojnu pravu normale AF, BG i CH. Iz podudarnosti trouglova AFD i CHD, kao i podudarnosti trouglova BGE i CHE, sledi

$$AF = BG, \ \angle FAB + \angle GBA = 2w,$$

nezavisno od toga da li je jedan od uglova $\angle A$ ili $\angle B$ datog trougla tup ili nije tup.

Ako iz sredine duži FG podignemo normalu JK, tada iz drugog dela stava 36 sledi da su četvorouglovi $AKJF$ i $BKJG$ podudarni. Prema tome, svaki od ova dva četvorougla ima tri prava ugla, a četvrti uglovi su jednaki, tj.

$$\angle FAB \equiv \angle GBA.$$

Stoga se dobija

$$\angle FAB \equiv w,$$

i tako je, na zahtevani način, četvorougao $AKJF$ dodeljen datom trouglu.

Neka je ma u kom trouglu D_1 zbir uglova jednak dvama pravim i neka je osim toga dat jedan drugi trougao D_2. Dodelimo im četvorouglove V_1 i V_2. Četvorougao V_1 ima četiri prava ugla, a četvorougao V_2 ima tri prava ugla. Prema stavu 38 u četvorouglu V_2 je i četvrti ugao prav. Time je drugi Ležandrov stav dokazan.

§11. Nezavisnost aksioma podudarnosti

Od činjenica koje se tiču nezavisnosti aksioma podudarnosti, dokazaćemo kao naročito važnu ovu: aksioma III_5 ne može se izvesti pomoću logičkih zaključaka iz ostalih aksioma I, II, III_{1-4}, IV i V.

Izabraćemo tačke, prave i ravni obične geometrije za elemente nove prostorne geometrije i definisaćemo prenošenje uglova na isti način kao i u običnoj geometriji, npr. onako kako je to izloženo u §9; naprotiv, definisaćemo prenošenje duži na drugi način.

Neka dve tačke A_1 i A_2 u običnoj geometriji imaju koordinate x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2; tada ćemo pozitivnu vrednost izraza

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

nazvati dužinom duži A_1A_2 pa onda dve proizvoljne duži A_1A_2 i $A'_1A'_2$ treba zvati podudarnim ako one u gore ustanovljenom smislu imaju jednake dužine.

Neposredno je jasno da u tako izgradjenoj prostornoj geometriji važe aksiome $I, II, III_{1-2,4}, IV, V$ (kao, uostalom, i stavovi 14, 15, 16, 19 i 21 koji su bili dokazani pomoću aksiome III_5).

Da bismo pokazali da je zadovoljena i aksioma III_3, uzmimo proizvoljnu pravu a i odaberimo na njoj tri tačke A_1, A_2, A_3 tako da tačka A_2 leži izmedju tačaka A_1 i A_3. Neka su tačke x, y, z prave a date jednačinama

$$\begin{aligned} x &= \lambda t + \lambda', \\ y &= \mu t + \mu', \\ z &= \nu t + \nu', \end{aligned}$$

u kojima je t parametar, a $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ označavaju izvesne konstante. Ako su t_1, t_2 $(< t_1)$, t_3 $(< t_2)$ vrednosti parametra koje odgovaraju tačkama A_1, A_2, A_3, onda ćemo imati za dužine triju duži A_1A_2, A_2A_3 i A_1A_3 izraze:

$$\begin{aligned} &(t_1 - t_2)|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}|, \\ &(t_2 - t_3)|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}|, \\ &(t_1 - t_3)|\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}|, \end{aligned}$$

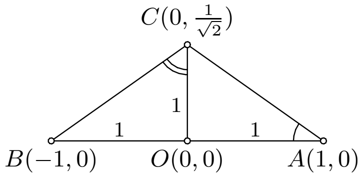
i zato je zbir dužina duži A_1A_2 i A_2A_3 jednak dužini duži A_1A_3. Odatle se dobija važenje aksiome III_5.

Aksioma III_5 za trouglove nije uvek zadovoljena u našoj geometriji. Kao primer posmatrajmo u ravni $z = 0$ četiri tačke

tačku O sa koordinatama $x = 0$, $y = 0$,
tačku A sa koordinatama $x = 1$, $y = 0$,
tačku B sa koordinatama $x = -1$, $y = 0$,
tačku C sa koordinatama $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Duži OA, OB i OC imaju dužinu 1. Za oba pravougla trougla AOC i COB važe stoga podudarnosti

$$\begin{aligned} \angle AOC &\equiv \angle COB, \\ OA &\equiv OC, \\ OC &\equiv OB. \end{aligned}$$



Ali, nasuprot aksiomi III_5 uglovi $\angle OAC$ i $\angle OCB$ nisu podudarni. U isto vreme u ovom primeru nije zadovoljen prvi stav podudarnosti, pošto duž AC ima dužinu $\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{2}}}$, a duž BC naprotiv ima dužinu $\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{2}}}$. Takodje ne važi stav 11 ni za jedan od oba ravnokraka trougla AOC i COB.

Primer ravne geometrije, u kojoj su sve aksiome, sa izuzetkom aksiome III_5, zadovoljene, jeste ovo: u nekoj ravni α svi pojmovi koji se javljaju u aksiomama, isključujući podudarnost duži, neka budu definisani na običan način. Medjutim za dužinu duži uzmimo na običan način definisanu dužinu projekcije na ravan β koja je nagnuta pod oštrim uglom prema ravni α.

§12. Nezavisnost aksioma neprekidnosti V_5 (Ne-arhimedska geometrija)

Da bismo dokazali nezavisnost Arhimedove aksiome V_1, moramo konstruisati geometriju u kojoj će biti zadovoljene sve aksiome izuzev aksioma V.

U ovom cilju konstruišimo područje $\Omega(t)$ svih onih algebarskih funkcija od t koje se dobijaju iz t primenom pet računskih operacija: sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i operacije $|\sqrt{1+w^2}|$; pri tome w označava ma koju funkciju koja je već dobijena primenom tih pet operacija. Množina elemenata područja $\Omega(t)$ - je isto kao i množina elemenata Ω u §9 - prebrojiva. Svih pet operacija su jednoznačne i izvodljive u stvarnoj oblasti; zato područje $\Omega(t)$ sadrži samo jednoznačne i realne funkcije od t.

Neka je c ma koja funkcija od područja $\Omega(t)$; pošto je funkcija c algebarska funkcija od t, to se ona može anulirati, svakako, samo za konačan broj vrednosti od t i zato će funkcija od c biti, za dovoljno velike pozitivne vrednosti od t, ili uvek pozitivna ili uvek negativna.

Funkcije područja $\Omega(t)$ smatraćemo sad kao vrstu kompleksnih brojeva u smislu narednog paragrafa, §13; očigledno, u tako definisanom kompleksnom brojnom sistemu važe sva obična računska pravila. Dalje, ako su a i b ma koja dva različita broja ovog kompleksnog brojnog sistema, reći ćemo da je broj a veći ili manji od b, i pisati: $a > b$ ili $a < b$, prema tome da li je razlika $c = a - b$, kao funkcija od t uvek pozitivna ili uvek negativna za dovoljno velike pozitivne vrednosti od t. Ako se ovako uzme, možemo rasporediti brojeve našeg kompleksnog brojnog sistema po njihovoj veličini, slično onome kako se to radi za realne brojeve; lako se vidi da za naše kompleksne brojeve takodje važe stavovi prema kojima nejednačine ostaju tačne ako se obema stranama doda isti broj ili obe strane pomnože istim brojem > 0.

Ako n označava neki proizvoljan pozitivan ceo racionalni broj, onda nejednačina $n < t$ sigurno važi za oba broja n i t područja $\Omega(t)$, pošto razlika $n - t$, posmatrana kao funkcija od t, izlazi očigledno uvek negativna, za dovoljno velike pozitivne vrednosti od t. Ovu ćemo činjenicu izraziti na ovaj način: brojevi 1 i t područja $\Omega(t)$, koja su oba > 0, imaju to svojstvo da proizvoljna višestruka vrednost prvoga ostaje uvek manja od drugog broja.

Sada ćemo od kompleksnih brojeva područja $\Omega(t)$ izgraditi geometriju potpuno na isti način, kao što je to učinjeno u §9, gde smo uzeli za osnovu područje Ω algebarskih brojeva: smatraćemo sistem triju brojeva (x, y, z) područja $\Omega(t)$ kao tačku, a razmere ma koja četiri broja $(u : v : w : r)$ područja $\Omega(t)$, u slučaju da u, v, w nisu svi nula, kao ravan: dalje, neka postojanje jednačine

$$ux + vy + wz + r = 0$$

izražava da tačka (x, y, z) leži u ravni $(u : v : w : r)$ i neka se kao prava naznači ukupnost svih tačaka koje leže u dvema ravnima sa različitim $u : v : w$. Usvojimo li sad slične postavke o rasporedu elemenata i o prenošenju duži i uglova, kao u §9, onda dobijamo ne-arhimedsku geometriju, u kojoj su, kao što pokazuju ranije izložena svojstva kompleksnog brojnog sistema $\Omega(t)$, sve aksiome zadovoljene, sa izuzetkom aksioma neprekidnosti. Ustvari, možemo proizvoljno puta jedno za drugim preneti duž 1 na duž t, a da se pri tome ne prekorači krajnja tačka duži t ali to protivureči zahtevu Arhimedove aksiome.

Da je aksioma potpunosti V_2 takodje nezavisna od svih prethodnih aksioma $I - IV, V_1$, pokazuje prva geometrija postavljena u §9, pošto je u ovoj geometriji zadovoljena Arhimedova aksioma.

Od principskog su značaja i ne-arhimedske geometrije koje su istovremeno i ne-euklidske geometrije, i naročito je od velikog interesa uloga koju igra Arhimedova aksioma pri dokazu Ležandrovog stava. Ispitivanje koje je M. Den (*M. Dehn*) preduzeo pod mojim uticajem o ovom predmetu dovelo je do potpunog objašnjenja ovog pitanja. U Denovim ispitivanjima uzete su za osnovu aksiome $I - III$. Samo na kraju Denovog rada - da bi i Rimanova (*B. Riemann*) (eliptična) geometrija ušla u područje ispitivanja - aksiome rasporeda II shvaćene su opštije no u ovoj raspravi, naime otprilike ovako:

Četiri tačke A, B, C, D prave uvek se raspadaju na dva para A, C i B, D, tako da su tačke A, C razdvojene tačkama B, D i obrnuto. Pet tačaka na pravoj mogu se uvek označiti sa A, B, C, D, E, tako da su tačke A, C razdvojene tačkama B, D i B, E, dalje, tačke A, D razdvojene tačkama B, E i C, E i td.

Na osnovu ovih aksioma $I - III$, dakle, ne koristeći neprekidnost, dokazuje M. Den najpre opštiji oblik drugog Ležandrovog stava, stav 39:

A k o j e u j e d n o m m a k o m t r o u g l u z b i r u g l o v a v e ć i o d d v a p r a v a, j e d n a k s a d v a p r a v a i l i m a n j i o d d v a p r a v a, o n d a t o v a ž i z a s v a k i t r o u g a o.

Dalje se na navedenom mestu dokazuje sledeća dopuna prvog Ležandrovog stava, stav 35:

I z p r e t p o s t a v k e d a s e k r o z j e d n u t a č k u m o ž e p o v u ć i b e s k o n a č n o m n o g o p a r a l e l n i h p r e m a d a t o j p r a v o j n e sledi, ako se isključi Arhimedova aksioma, da je zbir uglova u trouglu manji od dva prava. Upravo, s jedne strane, postoji geometrija (ne-ležandrovska geometrija), u kojoj se kroz jednu tačku prema jednoj pravoj može povući beskonačno mnogo paralelnih i u kojoj ipak važe stavovi Rimanove (eliptične) geometrije. S druge strane postoji geometrija (polueuklidska geometrija), u kojoj postoji beskonačno mnogo paralelnih kroz jednu tačku prema jednoj pravoj i u kojoj ipak važe stavovi euklidske geometrije.

Iz pretpostavke da ne postoji nijedna paralelna, uvek sledi da je zbir uglova u trouglu veći od dva prava.

Primetiću na kraju da se, ako se doda Arhimedova aksioma, može aksioma paralelnih zameniti zahtevom da zbir uglova u trouglu treba da bude jednak dvama pravim uglovima.

Treća glava

Učenje o proporcijama

§13. Kompleksni brojni sistemi

U početku ove glave daćemo nekoliko prethodnih kratkih razjašnjenja o kompleksnim brojnim sistemima, koja će nam docnije biti korisna naročito za olakšanje izlaganja.

Realni brojevi obrazuju u svojoj ukupnosti sistem stvari sa ovim svojstvima:

S t a v o v i v e z e (1-6):

1. Od broja a i broja b dobija se „sabiranjem"odredjeni broj c; u znacima:

$$a + b = c \text{ ili } c = a + b.$$

2. Ako su dati brojevi a i b, onda postoji uvek jedan i samo jedan broj x i takodje jedan i samo jedan broj y tako da je

$$a + x = b \text{ odn. } y + a = b.$$

3. Postoji jedan odredjeni broj - nazvaćemo ga o - tako da je za svako a istovremeno

$$a + o = a \text{ i } o + a = a.$$

4. Od broja a i broja b dobija se još na jedan drugi način, „množenjem", jedan odredjen broj c; u znacima:

$$ab = c \text{ ili } c = ab.$$

5. Ako su a i b proizvoljno dati brojevi i a nije o, onda uvek postoji jedan i samo jedan broj y, tako da je

$$ax = b \text{ odn. } ya = b.$$

6. Postoji jedan odredjeni broj - nazvaćemo ga 1 - tako da je za svako a istovremeno

$$a \cdot 1 = a \text{ i } 1 \cdot a = a.$$

R a č u n s k a p r a v i l a (7-12):

Ako su a, b, c proizvoljni brojevi, onda uvek važe naredni zakoni računa:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$
8. $a + b = b + a$
9. $a\ (bc) = (ab)\ c$
10. $a(b + c) = ab + ac$
11. $(a + b)c = ac + bc$
12. $ab = ba$.

S t a v o v i r a s p o r e d a (13-16):

13. Ako su a i b dva ma koja različita broja, onda je uvek jedan i samo jedan od njih (recimo a) veći od drugoga; tada se ovaj poslednji naziva manjim brojem, što se označava:

$$a > b \text{ i } b < a.$$

Ni za jedan broj a ne važi $a > a$,

14. Ako je $a > b$ i $b > c$, onda je i $a > c$.

15. Ako je $a > b$, onda je uvek i

$$a + c > b + c.$$

16. Ako je $a > b$ i $c > 0$, onda je uvek i

$$ac > bc.$$

S t a v o v i n e p r e k i d n o s t i (17-18):

17. (A r h i m e d o v s t a v). Ako su $a > 0$ i $b > 0$ dva proizvoljna broja, onda je uvek moguće a dodati toliko puta samom sebi da dobijena suma bude veća od b. Izraženo znacima:

$$a + a + \ldots + a > b.$$

18. (s t a v o p o t p u n o s t i). Nemoguće je ovom sistemu brojeva dodati kao brojeve drugi sistem stvari, tako da su u sistemu ovako prošireni svi stavovi 1-17 zadovoljeni pri održavanju odnosa izmedju brojeva; ili kraće: brojevi obrazuju sistem stvari, koji, kada se svi odnosi i svi navedeni stavovi, ne dozvoljava više nikakvo proširenje.

Sistem stvari koji ima samo jedan deo svojstava 1-18, nazvaćemo kompleksni brojni sistem. Kompleksni sistem brojeva nazvaćemo arhimedskim ili nearhimedskim, prema tome da li on zadovoljava ili ne zadovoljava zahtev 17.

Neka od izloženih svojstava 1 - 18 su posledice ostalih. Nastaje zadatak da se ispita logička zavisnost ovih svojstava. U šestom odeljku §32 i §33 odgovorićemo na dva odredjena pitanja takve vrste zbog njihovih geometrijskog značaja, a ovde ćemo samo ukazati na to da svakako zahtev 17 nije nikakva posledica prethodnih svojstava, pošto, na primer, kompleksni brojni sistem, posmatran u §12, zadovoljava sva svojstva 1-16, ali ne i svojstvo 17.

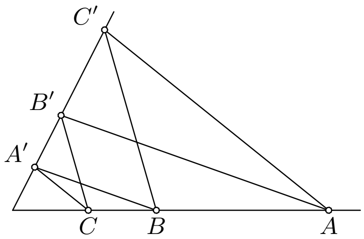
Uostalom, što se tiče stavova neprekidnosti (17-18) važe primedbe kakve smo učinili u §8 o geometrijskim aksiomama neprekidnosti.

§14. Dokaz Paskalovog stava

U ovom i narednom odeljku poći ćemo u našem ispitivanju od aksioma ravni svih grupa, tj. aksioma I_{1-3} i $II-IV$, izuzev aksioma neprekidnosti. U ovoj i trećoj glavi imamo nameru da pomoću pomenutih aksioma zasnujemo Euklidovo učenje o proporcijama, tj. u ravni i nezavisno od Arhimedove aksoime.

U tom cilju ćemo najpre dokazati činjenicu koja je specijalan slučaj poznatog Paskalovog stava iz učenja o konusnim presecima i taj ćemo stav ubuduće kratko nazvati Paskalovim stavom. Taj stav glasi:

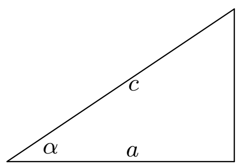
S t a v 40 (P a s k a l o v s t a v). Neka su na dvema pravama koje se seku A, B, C i A', B', C' po tri tačke koje se razlikuju od tačke preseka pravih; ako je tada CB' paralelno sa BC' a CA' paralelno sa AC', biće i BA' paralelno sa AB'.



Da bismo dokazali ovaj stav, uvešćemo najpre naredno označavanje: u pravouglom trouglu je, očigledno, kateta a jednoznačno odredjena hipotenuzom c i uglom α izmedju a i c; stavićemo kratko,

$$a = \alpha\ c,$$

tako da simbol αc uvek označava odredjenu duž ako je c proizvoljno data duž, a α proizvoljno dati oštri ugao.



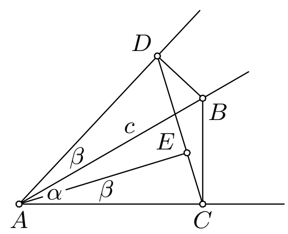
Isto je tako uvek duž c jednoznačno odredjena pri proizvoljno datoj duži a i proizvoljno datom oštrom uglu α jednačinom

$$a = \alpha\ c.$$

Neka sada c bude proizvoljna duž i neka su α,β dva proizvoljna oštra ugla; tvrdimo da svagda postoji podudarnost duži

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c$$

i da se, stoga, simboli α i β uvek mogu medju sobom razmeniti.



Da bismo dokazali ovo tvrdjenje, uzmimo duž $c = AB$ i prenesimo na ovu duž kod tačke A sa obe strane uglove α i β. Zatim, spustimo iz tačke B na druge krake ovih uglova normale BC i BD, spojimo tačku C i D i spustimo, najzad, iz tačke A normalu AE na CD.

Pošto su uglovi $\angle ACB$ i $\angle ABD$ pravi, četiri tačke A, B, C, D leže na krugu i zato su oba ugla $\angle ACD$ i $\angle ABD$, kao periferijski nad istom tetivom, podudarni. Medjutim, s jedne strane, ugao $\angle ACD$ zajedno sa $\angle CAE$ čini pravi ugao, a s druge strane, $\angle ABD$ zajedno sa $\angle BAD$ čini takodje pravi ugao pa su stoga i uglovi $\angle CAE$ i $\angle BAD$ jedan drugom podudarni,tj.

$$\angle CAE \equiv \beta$$

i zato

$$\angle DAE \equiv \alpha.$$

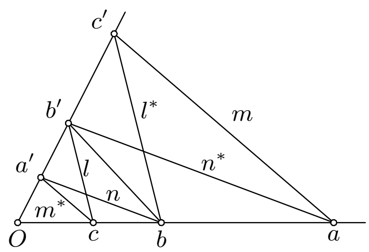
Sad neposredno dobijamo podudarnosti duži:

$$\beta c \equiv AD,\ \alpha c \equiv AC,$$

$$\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE,\ \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE,$$

a odatle sledi tačnost podudarnosti za koju smo maločas tvrdili da postoji.

Vratimo se sada figuri Paskalovog stava i označimo presečnu tačku pravih sa O, a duži sa $OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC'$,
AC', CA', BA', AB' odnosno sa $a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*$.



Zatim, spustimo iz tačke O normale na l, m^*, n; neka normala na l obrazuje sa pravima OA, OA' oštre uglove λ',λ, a normala na m^* odnosno n sa pravima OA i OA' oštre uglove μ',μ, odnosno ν', ν. Ako sad ove tri normale izrazimo na maločas pokazan način pomoću hipotenuza i uglova na osnovici u dotičnim pravouglim trouglovima na dvojaki način, dobićemo ove tri podudarnosti duži:

$$(1)\ \lambda b' \equiv \lambda c,$$

$$(2)\ \mu a' \equiv \mu' c,$$

$$(3)\ \nu a' \equiv \nu' b.$$

Pošto, prema pretpostavci, treba l da bude paralelno sa l^* i m paralelno sa m^*, onda će se normale, spuštene iz tačke O na l^*, odnosno m, poklopiti sa normalama na l odnosno m^*, prema tome dobićemo:

$$(4)\ \lambda c' \equiv \lambda' b,$$

$$(5)\ \mu c' \equiv \mu' a.$$

Ako primenimo na podudarnost (3) levo i desno simbol $\lambda'\mu$ i uzmemo u obzir da se, prema ranije dokazanom, ti simboli mogu razmeniti medju sobom, dobićemo

$$\nu\lambda'\mu a' \equiv \nu'\mu\lambda' b.$$

Uzmemo li u ovoj podudarnosti u obzir, levo, podudarnost (2), a desno, podudarnost (4), dobićemo

$$\nu\lambda'\mu' c \equiv \nu'\mu\lambda c'$$

ili

$$\nu\mu'\lambda' c \equiv \nu'\lambda\nu' a.$$

Iz ove poslednje podudarnosti, na osnovu osobine naših simbola navedene na str. 44, odmah zaključujemo:

$$(6)\ \mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a,$$

a odatle

$$\nu b' \equiv \nu' a.$$

Ako uočimo normalu spuštenu iz tačke O na n i spustimo na nju normale iz tačaka A i B', onda će podudarnost (6) pokazati da se moraju poklopiti podnožja tih dveju poslednjih normala, tj. prava $n^* = AB'$ stoji normalno na normali, spuštenoj na n i prema tome je paralelna sa n. Time je dokazan Paskalov stav.

Za zasnivanje učenja o proporcijama u daljem izlaganju koristićemo se isključivo onim specijalnim slučajem Paskalovog stava u kome važi podudarnost duži

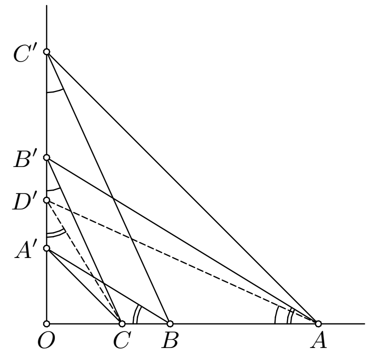
$$OC \equiv OA',$$

a otuda važi i podudarnost

$$OA \equiv OC'$$

i u kome tačke A, B, C leže na istoj polupravoj koja izlazi iz tačke O. U ovom specijalnom slučaju izvodi se dokaz naročito prosto, naime na ovaj način:

Prenesimo na OA' od tačke O duž OB do tačke D'; tada je spojna prava BD' paralelna prema CA' i AC'.



Usled podudarnosti trouglova $OC'B$ i OAD' biće

$$(1+)\ \angle OC'B \equiv \angle OAD'.$$

Pošto su, prema pretpostavci, prave CB' i BC' medju sobom paralelne, onda je

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C;$$

ali tada je, prema učenju o krugu, $ACD'B'$ tetivni četvorougao, i zato, prema poznatom stavu o uglovima tetivnog četvorougla, važi podudarnost

$$(3+)\ \angle OD'C \equiv \angle OAB'.$$

S druge strane je zbog podudarnosti trouglova $OD'C$ i OBA' takodje

$$(4+)\ \angle OD'C \equiv \angle OBA';$$

iz (3+) i (4+) zaključujemo

$$\angle OAB' \equiv \angle OBA',$$

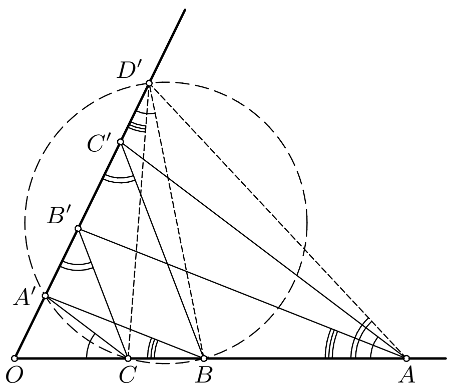
a ova podudarnost pokazuje da su prave AB' i BA' paralelne, kako to zahteva Paskalov stav.

Ako je data ma koja prava, tačka van nje i ma koji ugao, može se očigledno, prenošenjem ovog ugla i povlačenjem paralelne naći prava koja prolazi kroz datu tačku i preseca datu pravu pod datim uglom. Imajući u vidu ovu okolnost, možemo, najzad, u dokazu opštijeg Paskalovog stava primeniti prost postupak, za koji imam da zahvalim jednom saopštenju s druge strane.

Povucimo kroz tačku B pravu koja bi presecala OA' u nekoj tački D' pod uglom $\angle OCA'$ tako da važi podudarnost

$$(1^*) \angle OCA' \equiv \angle OD'B;$$

tada je, prema poznatom stavu iz učenja o krugu, $CBD'A'$ tetivni četvorougao i zato, prema stavu podudarnosti periferijskih uglova nad istom tetivom, važi podudarnost $\angle OBA' \equiv \angle OD'C$.



Pošto su prave CA' i AC', prema pretpostavci, medju sobom paralelne, to je

$$(3^*)\ \angle OCA' \equiv \angle OAC';$$

iz (1^*) i (3^*) sledi podudarnost:

$$\angle OD'B \equiv \angle OAC';$$

a tada je i $BAD'C'$ tetivni četvorougao. Otuda, prema stavu o uglovima tetivnog četvorougla, važi podudarnost

$$(4^*)\ \angle OAD' \equiv \angle OC'B.$$

Dalje, pošto je, prema pretpostavci, prava CB' paralelna sa BC', imaćemo takodje

$$(5^*)\ \angle OB'C \equiv \angle OC'B;$$

iz (4^*) i (5^*) izvodimo podudarnost

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C.$$

Najzad, ova poslednja podudarnost pokazuje da je $CAD'B'$ tetivni četvorougao i zato važi i podudarnost

$$(6^*)\ \angle OAB' \equiv \angle OD'C.$$

Iz (2^*) i (6^*) sledi:

$$\angle OBA' \equiv \angle OAB',$$

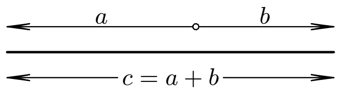
a ova podudarnost pokazuje da su prave BA' i AB' paralelne, kako to zahteva i Paskalov stav.

Ako se tačka D' poklapa sa jednom od tačaka A', B', C' ili ako je raspored tačaka A, B, C drugi, onda je neophodna izmena ovog postupka, koja se lako uočava.

§15. Segmentni račun na osnovu Paskalovog stava

Paskalov stav, dokazan u prethodnom paragrafu, omogućava nam da uvedemo u geometriju segmentni račun (račun dužima), u kome važe bez promene sva pravila računa sa realnim brojevima.

Umesto reči „podudarno" i znaka $\equiv$, služićemo se u ovom računu sa dužima rečju „jednak" i znakom $=$.



Ako su A, B, C tri tačke neke prave i ako B leži izmedju A i C, onda ćemo $c = AC$ označiti kao zbir dveju duži $a = AB$ i $b = BC$ i staviti

$$c = a + b.$$

Govorićemo da su duži a i b manje od c i to ćemo označiti sa

$$a < c,\ b < c;$$

duž c se naziva većom od a i b, u znacima:

$$c > a,\ c > b.$$

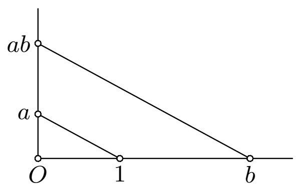
Iz linearnih aksioma podudarnosti III_{1-3} uvidjamo lako da za sabiranje duži koje smo sad definisali važi asocijativni zakon

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

kao i komutativni zakon

$$a + b = b + a.$$

Da bismo geometrijski definisali proizvod duži a i duži b, poslužićemo se ovom konstrukcijom: izaberemo najpre proizvoljnu duž koja će ostati ista pri celom posmatranju i označimo je sa 1.



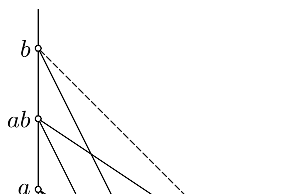
Prenesimo sad na jedan krak pravog ugla od njegovog temena O duž 1, a zatim isto tako od temena O duž b; prenesimo, dalje, na drugi krak ugla duž a. Spojimo krajnje tačke duži 1 i a pravom i povucimo prema ovoj pravoj paralelnu kroz krajnju tačku duži b; neka ona odseca na drugom kraku duž c; tada ćemo ovu duž c nazvati proizvodom duži a sa duži b i označićemo je sa

$$c = ab.$$

Dokazaćemo pre svega da za množenje duži koje smo sada definisali važi komutativni zakon

$$ab = ba.$$

U tom cilju konstruišimo prvo na gore ustanovljeni način duž ab.

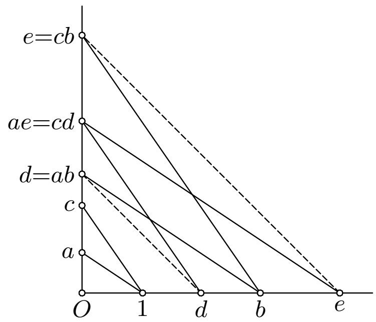


Dalje, prenesimo na prvi krak pravog ugla duž a, a na drugi njegov krak duž b, spojimo pravom krajnju tačku duži 1 sa krajnjom tačkom duži b na drugom kraku i povucimo paralelnu prema ovoj pravoj kroz krajnju tačku duži a na prvom kraku: ova odseca na drugom kraku duž ba; ustvari, kao što se vidi sa slike, ova duž ba poklapa se sa maločas konstruisanom duži ab prema Paskalovom stavu (stav 40) zbog paralelnosti isprekidanih pomoćnih linija. I obrnuto sledi, što se odmah vidi, iz važenja komutativnog zakona u našem računu dužima, da sigurno važi specijalan slučaj Paskalovog stava navedenog na str. 46 za takve figure, u kojima poluprave OA i OA' obrazuju prav ugao.

Da bismo za naše množenje duži dokazali asocijativni zakon

$$a(bc) = (ab)c,$$

prenesimo na jedan krak pravog ugla od njegovog temena O duži 1 i b, a na drugi krak, isto tako od temena O , prenesimo duži a i c. Zatim konstruišimo duži $d = ab$ i $e = cb$ i prenesimo ove duži d i e na prvi korak od temena O.



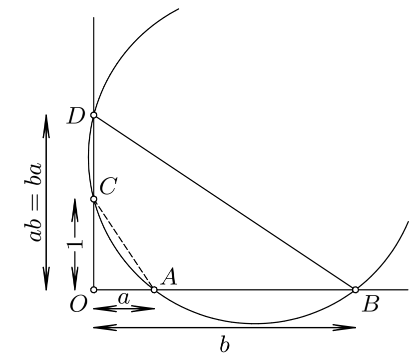
Ako sada konstruišemo ae i cd, onda se vidi sa slike (gore), opet na osnovu Paskalovog stava, da se krajnje tačke ovih duži poklapaju, tj. da je $ae = cd$ ili $a(cb) = c(ab)$, a odatle, na osnovu komutativnog zakona, sledi takodje

$$a(bc) = (ab)c.$$

Kao što se vidi, mi smo u prethodnom dokazu kako komutativnog, tako i asocijativnog zakona množenja, iskoristili isključivo onaj specijalni slučaj Paskalovog stava čiji smo dokaz uspeli da dobijemo na naročito prost način, primenjujući samo jedanput stav o tetivnom četvorouglu.

Rezimirajući ova izlaganja, dolazimo do narednog zasnivanja zakona množenja u računu dužima, koje mi izgleda najprostije od svih dosad poznatih načina zasnivanja.

Neka se na jedan krak pravog ugla prenesu temena O duži $a = OA$ i $b = OB$, a na drugi krak jedinična duž $1 = OC$. Krug, postavljen kroz tačke A, B, C, preseca drugi krak još u tački D. Tačka D se dobija lako, bez upotrebe šestara, samo na osnovu aksioma podudarnosti, kada se iz središta kruga spusti normala na OC i u odnosu na ovu konstruiše ogledalska slika tačke C.



Usled jednakosti uglova $\angle OCA$ i $\angle OBD$, a prema definiciji proizvoda dveju duži (str. 49), imamo

$$OD = ab;$$

a zbog jednakosti uglova $\angle ODA$ i $\angle OBC$ prema istoj definiciji je

$$OD = ba.$$

Komutativni zakon množenja

$$ab = ba$$

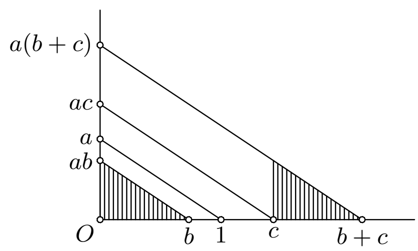
koji odavde sledi, dokazuje sad, prema primedbi na str. 50, da na str. 46 navedeni specijalni slučaj Paskalovog stava važi za krake pravog ugla, a otuda opet (v. str. 50) sledi asocijativni zakon množenja

$$a(bc) = (ab)c.$$

Najzad, u našem računu dužima važi i distributivni zakon:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Da bismo njega dokazali, konstruišemo duži ab, ac i $a(b + c)$ i povucimo tada kroz krajnju tačku duži c (videti sliku dole) pravu paralelnu drugom kraku pravog ugla.



Podudarnost oba pravougla trougla, na slici osenčena, i primena stava o jednakosti suprotnih strana kod paralelograma, pružaju tada traženi dokaz.

Ako su b i c dve proizvoljne duži, uvek postoji duž a tako da je $c = ab$; ova duž a se označava sa $\frac{c}{b}$ i naziva se količnikom od c sa b.

§16. Proporcije i stavovi o sličnosti

Pomoću gore izloženog računa sa dužima može se besprekorno zasnovati Euklidovo učenje o proporcijama i bez Arhimedove aksiome na naredni način:

D e f i n i c i j a. Ako su a, b, a', b' ma koje četiri duži, onda proporcija

$$a : b = a' : b'$$

ne treba ništa drugo da znači do segmentnu jednačinu

$$ab' = ba'.$$

D e f i n i c i j a. Dva se trogla nazivaju sličnim ako su im odgovarajuće uglovi podudarni.

S t a v 41. Ako su a, b i a', b' odgovarajuće strane u dva slična trogla, onda važi proporcija:

$$a : b = a' : b'.$$

D o k a z. Posmatraćemo najpre naročiti slučaj, gde su uglovi zahvaćeni stranama a, b i a', b' u oba trougla pravi i pretpostavićemo da su oba trougla uneta u jedan i isti pravi ugao. Prenesimo sada od temena na jedan krak duž 1 i povucimo kroz krajnju tačku ove duži 1 pravu paralelnu obema hipotenuzama; ova prava odseca na drugom kraku duž e; tada je prema našoj definiciji proizvoda duži

$$b = ea,\ b' = ea';$$

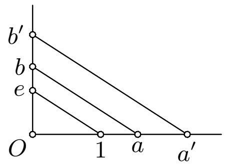
stoga imamo

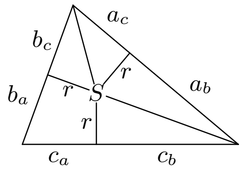
$$ab' = ba',$$

tj.

$$a : b = a' : b'.$$

Vratimo se sada opštem slučaju. U svakom od oba slična trougla konstruišimo presečnu tačku S odnosno S' triju njegovih bisektrisa, čija se egzistencija lako izvodi iz





stava 25, i spustimo iz ovih tačaka tri normale r odnosno r' na strane trougla; na ovim stranama dobijene odsečke označimo sa

$$a_b,\ a_c,\ b_c,\ b_a,\ c_a,\ c_b$$

odnosno sa

$$a'_b,\ a'_c,\ b'_c,\ b'_a,\ c'_a,\ c'_b.$$

Maločas dokazani specijalni slučaj našeg stava daje sad proporcije

$$a_b : r = a'_b : r',\ \ b_c : r = b'_c : r',$$

$$a_c : r = a'_c : r',\ \ b_a : r = b'_a : r';$$

iz ovih pomoću distributivnog zakona zaključujemo

$$a : r = a' : r',\ \ b : r = b' : r',$$

a odatle

$$b'ar' = b'ra',\ \ a'br' = a'rb'.$$

Iz ovih se jednačina dobija pomoću komutativnog zakona množenja

$$a : b = a' : b'.$$

Iz stava 41 lako je izvesti osnovni stav učenja o proporcijama, koji glasi:

S t a v 42. Ako dve paralelne prave odsecaju na kracima proizvoljnog ugla duži a, b odnosno. a', b', onda važi proporcija:

$$a : b = a' : b'.$$

Obrnuto, ako četiri duži a, b, a', b' zadovoljavaju ovu proporciju i ako se duži a, a' prenesu na jedan krak ugla, a duži b, b' na drugi krak, to su spojene prave krajnjih tačaka duži a, b odnosno a', b' medju sobom paralelne.

§17. Jednačine pravih i ravni

Do sad posmatranom sistemu duži dodaćemo drugi isti takav sistem duži. Naime, na osnovu aksioma rasporeda može se lako na pravoj razlikovati „pozitivni" i „negativni" smer. Duž AB, koju smo dosad označavali sa a, označavaćemo je sa a još i tada kada tačka B leži sa pozitivne strane od tačke A; u suprotnom slučaju, pak, mi ćemo je označavati sa -a. Tačku ćemo označiti kao duž 0. Duž a ćemo nazvati „pozitivnom" odnosnom većom od 0, što ćemo označiti: $a > 0$; duž -a ćemo nazvati „negativnom" i to ćemo označiti: -a<0.

U ovom proširenom računu sa dužima važe tada sva pravila računa 1-16 za stvarne brojeve, koja su izložena u §13. Istaćićemo sledeće činjenice:

Uvek je:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ i } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Ako je $ab = 0$, onda je ili $a = 0$ ili $b = 0$. Ako je $a> b$ i $c>0$, onda je uvek $ac>bc$. Dalje, ako su $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$, n tačaka na pravoj, onda je zbir duži $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ jednak 0.

Uzmimo sada u ravni α kroz tačku O dve prave normalne jedna na drugoj kao stalni pravougli koordinatni sistem i prenesimo tada na te prave proizvoljne duži x, y od tačke O; zatim, podignimo normale iz krajnjih tačaka duži x, y i odredimo presečnu tačku P ovih normala: duži x, y nazivaju se koordinatama tačke P. Svaka tačka ravni α jednoznačno je odredjena svojim koordinatama x, y, koje mogu biti pozitivne ili negativne duži ili 0.

Neka je l ma koja prava u ravni α, koja prolazi kroz tačku O i kroz neku tačku C sa koordinatama a, b. Ako su tada x, y koordinate neke tačke P na l, onda lako nalazimo iz stava 42

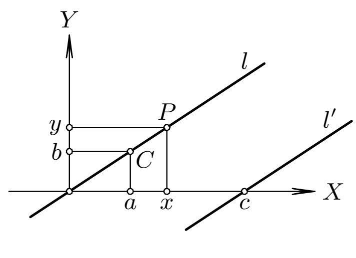
$$a : b = x : y$$

ili

$$bx \text{ - } ay = 0$$

kao jednačinu prave l. Ako je prava l' paralelna prema l i odseca na x-osi duž c, onda dobijamo jednačinu prave l' zamenjujući u jednačini prave l duž x sa duži x-c; tražena jednačina ,dakle, glasi

$$bx \text{ - } ay \text{ - } bc = 0.$$



Iz ovih izlaganja možemo lako zaključiti, nezavisno od Arhimedove aksiome, da se svaka prava može predstaviti linearnom jednačinom po koordinatama x, y i, obrnuto, da svaka takva linearna jednačina predstavlja pravu, pri čemu su koeficijenti te jednačine duži koje pripadaju datoj geometriji.

Analogni rezultati u prostornoj geometriji dobijaju se veoma lako.

Dalje izgradjivanje geometrije može se odsad izvoditi metodom, koja se obično primenjuje u analitičkoj geometriji.

Dosad u ovom trećem odeljku nismo nigde iskoristili Arhimedovu aksiomu; pretpostavimo li sad da važi ta aksioma, možemo tačkama proizvoljne prave u prostoru dodeliti realne brojeve i to na ovaj način:

Odaberimo na pravoj dve proizvoljne tačke i dodelimo im brojeve 0 i 1; zatim prepolovimo duž 01 odrdjenu ovim tačkama i označimo nadjenu sredinu duži sa $\frac{1}{2}$, dalje označimo sredinu duži $0\frac{1}{2}$ sa $\frac{1}{4}$ itd.; posle n-tostrukog izvodjenja ovog postupka, doći ćemo do tačke kojoj treba dodeliti broj $\frac{1}{2^n}$. Prenesimo sad duž $0\frac{1}{2^n}$ od tačke 0 kako na stranu tačke 1, tako i na drugu stranu na primer m puta jedno za drugim i dodelimo tako dobijenim tačkama brojne vrednosti $\frac{m}{2^n}$ odnosno -$\frac{m}{2^n}$. Iz Arhimedove aksiome može se lako zaključiti da se na osnovu ovog dodeljivanja može svakoj proizvoljnoj tački prave dodeliti na jednoznačan način realan broj, i to tako da ovo dodeljivanje ima naredno svojstvo: ako su A, B, C ma koje tri tačke na pravoj i α, β, γ odgovarajući realni brojevi i ako pri tome B leži izmedju A i C, to ovi brojevi uvek zadovoljavaju ili nejednačinu $\alpha<\beta<\gamma$ ili $\alpha>\beta>\gamma$.

Iz izlaganja u §9 druge glave jasno je da tamo za svaki broj koji pripada algebarskom brojnom telu Ω nužno mora na pravoj postojati tačka kojoj je on dodeljen. Da li i svakom drugom stvarnom broju odgovara tačka, zavisi od toga da li u posmatranoj geometriji važi aksioma potpunosti V_2 ili ne.

Naprotiv, ako se u nekoj geometriji pretpostaviti da važi samo Arhimedova aksioma, uvek je moguće sistem tačaka, pravih i ravni tako proširiti „iracionalnim" elementima, da na svakoj pravoj tako konstruisane geometrije svakom sistemu triju realnih brojeva koji zadovoljava jednačinu prave bez izuzetka odgovara jedna tačka. Odgovarajućom postavkom može se istovremeno postići da u proširenoj geometriji važe s v e aksiome $I - V$. Ova proširena geometrija (dobijena dodavanjem iracionalnih elemenata) nije ništa drugo do obična analitička Dekartova geometrija prostora, u kojoj važi i aksioma potpunosti V_2.

Četvrta glava

Učenje o površinama u ravni

§18. Razloživa jednakost i dopunska jednakost poligona

Za osnovu naših ispitivanja ove četvrte glave uzećemo iste aksiome kao i u trećoj glavi, naime linearne aksiome i aksiome ravni svih grupa, izuzev aksioma neprekidnosti, tj. aksioma I_{1-3} i $II - IV$.

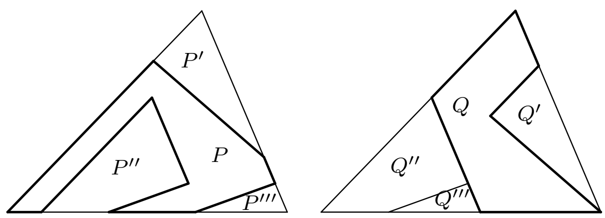
Učenje o proporcijama izloženo u trećoj glavi i tu uvedeni račun dužima daju nam mogućnost da zasnujemo Euklidovo učenje o površinama pomoću aksioma, tj. u ravni i nezavisno od aksioma nepsekidnosti.

A pošto se, prema izlaganja u trecoj glavi, učenje o proporcijama uglavnom zasniva na Paskalovom stavu (stav 40), to isto važi i za učenje o površinama; ovo zasnivanje učenja o površinama smatram kao jednu od najznačajnijih primena Paskalovog stava u elementarnoj geometriji.

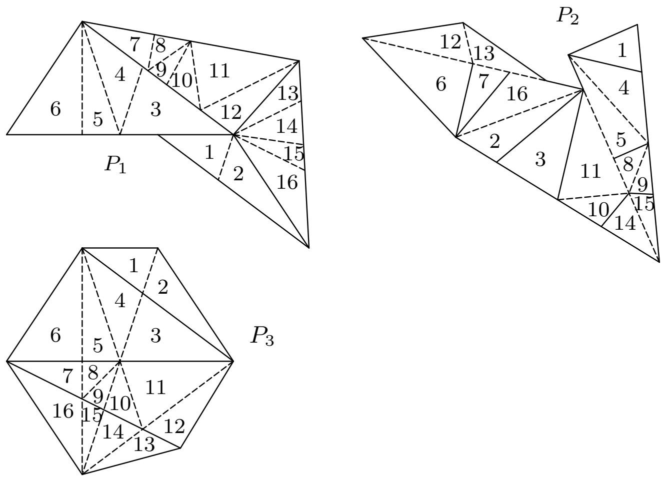
D e f i n i c i j a. Ako se spoje dve tačke nekog prostog poligona P ma kojom izlomljenom linijom koja cela leži u unutrašnjosti tog poligona i koja ne sadrži nijednu dvostruku tačku, onda se dobijaju dva nova prosta poligona P_1 i P_2, čije sve unutrašnje tačke leže u unutrašnjosti poligona P; u tom slučaju ćemo reći: P se raspada na P_1 i P_2, i l i P je razloženo na P_1 i P_2, i l i P_1 i P_2 sastavljaju P.

D e f i n i c i j a. Dva prosta poligona nazivaju se jednakim ako se mogu razložiti u konačan broj trouglova koji su dva i dva medju sobom podudarna.

D e f i n i c i j a. Dva prosta poligona P i Q nazivaju se dopunski jednakim ako se njima mozže dodati konačan broj takvih po dva i dva razlozivo jednakih poligona P', Q', P'', Q'',. . ., P''', Q''', da oba na ovaj način sastavljena poligona $P + P' + P'' + \ldots + P'''$ i $Q + Q' + Q'' + \ldots + Q'''$ budu razloživo jednaka.



Iz ovih definicija neposredno sledi: spajanjem razloživo jednakih poligona dobijaju se opet razloživo jednaki poligoni i ako se oduzmu razloživo jednaki poligoni



od razloživo jednakih poligona dobijaju se poligoni dopunski jednaki.

Dalje važe ovi stavovi:

S t a v 43. Ako su dva poligona P_1 i P_2 razloživo jednaka nekom trećem poligonu P_3, oni su i medjusobno razloživo jednaki. Ako su dva poligona dopunski jednaka nekom trećem, oni su medjusobno dopunski jednaki.

D o k a z. Prema pretpostavci, može se navesti kako za poligon P_1 tako i za poligon P_2 jedno razlaganje u trouglove, tako da svakom od ovih razlaganja odgovara razlaganje poligona P_3 u trouglove podudarne trouglovima razlaganja P_1 i P_2. Posmatrajući istovremeno oba ova razlaganja poligona P_3, vidimo, da se uopšte svaki trougao jednog razlaganja razlaže u poligone dužima, koje pripadaji drugom razlaganju. Dodajmo sada još toliko duži, da se svaki od poligona opet raspada u trouglove, i izvedimo svaki od ovih poligona P_1 i P_2; tada se, očigledno, raspadaju oba ova poligona na isti broj po dva i dva medju sobom podudarna trougla i zato su oni, prema definiciji, medju sobom razloživo jednaki.

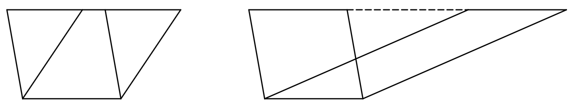
Dokaz drugog iskaza stava 43 dobija se sad bez teškoća.

Definisaćemo na običan način pojmove: pravougaonik, osnovica i visina paralelograma, osnovica i visina trougla.

§19. Paralelogrami i trouglovi sa jednakim osnovicama i visinama

Poznati Euklidov način dokazivanja, ilustrovan na donjoj slici, daje stav:

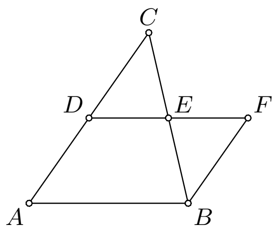
S t a v 44. Dva paralelograma sa jednakim osnovicama i visinama dopunski su jednaka.



Dalje važi poznata činjenica:

S t a v 45. Svaki trougao ABC uvek je dopunski jednak izvesnom paralelogramu koji ima istu osnovicu, a visina mu je polovina visine trougla.

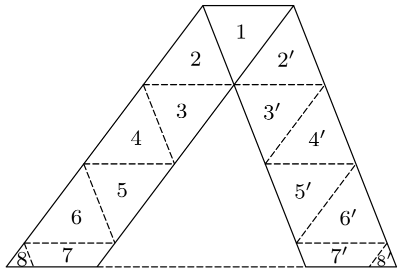
D o k a z. Ako se strana AC prepolovi tačkom D, a strana BC tačkom E pa se duž DE produži za svoju sopstvenu dužinu do tačke F , onda su trouglovi DCE i FBE jedan drugom podudarni i otuda su trougao ABC i paralelogram $ABFD$ razloživo jednaki.



Iz stavova 44 i 45, uzimajući u obzir stav 43, neposredno sledi:

S t a v 46. Dva trougla sa jednakim osnovicama i jednakim visinama medju sobom su d o p u n s k i j e d n a k a.

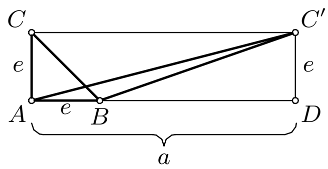
Kao što je poznato, lako se pokazuje, što se vidi na priloženoj slici, da su dva paralelograma, a zato, prema stavovima 43 i 45, i dva trougla sa jednakim osnovicama i visinama uvek r a z l o ž i v o j e d n a k a. Primetimo ipak da ovaj dokaz nije moguć bez upotrebe Arhimedove aksiome; ustvari, u svakoj ne-arhimedskoj geometriji (jedna takva se može videti u drugoj glavi §12) mogu se navesti dva trougla koja imaju jednake osnovice i visine i otuda su, shodno stavu 46, d o p u n s k i j e d n a k a, ali ipak nisu r a z l o ž i v o j e d n a k a.



Neka se, naime, u nekoj ne-arhimedskoj geometriji na polupravu prenesu dve takve duži $AB = e$ i $AD = a$, koje ni za koji ceo broj n ne zadovoljavaju odnos

$$n \cdot e \geq a.$$

Podignimo na duži AD u njenim krajnjim tačkama normale AC i DC' dužine e. Trouglovi ABC i ABC', prema stavu 46, dopunski su jednaki. Iz stava 23 sledi da je zbir dveju strana trougla veći od treće strane, gde zbir dveju strana treba razumeti u smislu segmentnog računa uvedenog u trećoj glavi.



Tako je -$BC < e + e = 2e$. Dalje, može se dokazati, ne koristeći se neprekidnošću, ovaj stav: duž, koja cela leži u unutrašnjosti trougla, manja je od njegove najveće strane. Stoga je svaka duž koja leži u unutrašnjosti trougla ABC manja od $2e$.

Pretpostavimo sada da je dato razlaganje trouglova ABC i ABC' na konačno mnogo, npr. na k, po dva i dva medju sobom podudarna trougla. Svaka strana delimičnog trougla, koji se koristi za razlaganje trougla ABC, leži ili u trouglu ABC ili na jednoj njegovoj strani, tj. ona je manja od $2e$. Obim svakog delimičnog trougla je, dakle, manji od $6e$; zbir svih ovih obima stoga je manji od $6k{\cdot}e$. Razlaganje trouglova ABC i ABC' mora dati isti zbir obima. Zato zbir obima delimičnih trouglova korišćenih u razlaganju trouglova ABC' mora biti manji od $6k{\cdot}e$. Ali, u ovom zbiru, sigurno, sadržana je cela strana AC', tj. mora važiti: $AC' < 6k{\cdot}e$, i stoga, prema stavu 23, tim pre važi: $q{<}6k{\cdot}e$. Ovo protivureči našoj pretpostavci u odnosu na duži e i a. Prema tome, pretpostavka mogućnosti razlaganja trouglova ABC i ABC' u delimične trouglove podudarne po dva i dva, dovela je do protivurečnosti.

Važni stavovi elementarne geometrije o dopunskoj jednakosti poligona, naročito Pitagorina teorema, lako se izvode iz maločas postavljenih stavova. Spomenućemo još stav:

S t a v 47. Za proizvoljan trougao, a stoga i za proizvoljan prost poligon, može se uvek konstruisati pravougli trougao koji ima jednu katetu 1 i koji je sa trouglom, odnosno poligonom, dopunski jednak.

Ovo tvrdjenje, u odnosu na trouglove, lako se izvodi na osnovu stavova 46, 42, i 43. Tvrdjenje, u odnosu na poligone, dokazuje se na ovaj način. Razložimo dati prost poligon u trouglove i odredimo za njih dopunski jednake pravougle trouglove sa po jednom katetom 1. Ako katete dužine 1 shvatimo kao visine ovih trouglova, onda, opet pomoću stavova 43 i 46, sastavljanjem tih trouglova dolazimo do tvrdjenja (str. 57).

Ali, pri daljem sprovodjenju teorije površina, nailazimo na jednu bitnu teškoću. Upravo, naša dosadašnja ispitavanja ostavljaju nerešenim pitanje, da nisu možda s v i poligoni dopunski jednaki. U tom slučaju svi dosada postavljeni stavovi ne bi kazivali ništa i bili bi bez ikakvog značenja. Sa ovim je u vezi pitanje da li dva dopunski jednaka pravougaonika sa jednom zajedničkom stranom moraju imati i druge strane podudarne.

Kao što pokazuje bliže razmatranje, za odgovor na ovo postavljeno pitanje potrebna je inverzija stava 46, koja ovako glasi:

S t a v 48. Ako dva dopunski jednaka trougla imaju jednake osnovice, oni imaju i visine jednake.

Ovaj osnovni stav 48 nalazi se u prvoj knjizi Euklidovih Elemenata kao 39-ti stav; ali, pri dokazivanju ovog stava, Euklid se poziva na opšti stav o veličinama: „$\kappa\alpha\iota\ \tau o\ o\lambda o\nu\ \tau o\nu\ \mu\epsilon\rho o\upsilon\varsigma\ \mu\epsilon\iota\zeta o\nu$ $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$" (celina je veća od svog dela) - postupak koji se svodi na uvodjenje nove geonetrijske aksiome o dopunskoj jednakosti.

Sada se stav 48, a time i učenje o površinama, može zasnovati i bez takve nove aksiome, na način koji smo ovde usvojili, tj. pomoću aksioma ravni i bez upotrebe Arhimedove aksiome. Da bismo ovo uvideli, neophodno je uvesti pojam mere površine.

§20. Mera površine trouglova i poligona

D e f i n i c i j a. U ravnoj geometriji prava AB deli tačke koje ne leže na njoj u dve oblasti tačaka. Za jednu od ovih oblasti reći ćemo da leži desno od poluprave AB koja polazi iz tačke A, odnosno od „usmerene duži AB", i levo od poluprave koja izlazi iz tačke B odnosno od „usmerene duži BA", za drugu oblast kaže se da leži levo od poluprave AB i desno od poluprave BA. U odnosu na dve usmerene duži AB i AC ista oblast leži desno, ako tačke B i C leže na istoj polupravoj koja polazi iz tačke A (i obrnuto). - Ako je za neku polupravu g, koja polazi iz tačke O, desna oblast već definisana i ako poluprava h koja iz tačke O ulazi u ovu oblast, onda ćemo kazati za onu oblast u odnosu na h, koja sadrži g, da leži levo od h. Uvidja se, da su na ovaj način, polazeći od odredjene poluprave AB, u ravnoj geometriji jednoznačno odredjene leva i desna strana u odnosu na svaku polupravu odnosno s v a k u usmerenu duž.

Tačke u unutrašnjosti (str. 9) nekog trougla ABC leže ili levo od strana AB, BC, CA ili levo od strana CB, BA, AC. U prvom slučaju ćemo reći: ABC (ili BCA ili CAB) je pozitivni smer obilaženja, a CBA (ili BAC ili ACB) je negativni smer obilaženja trougla; u drugom slučaju ćemo reći: CBA je pozitivan, a ABC je negativan smer obilaženja trougla.

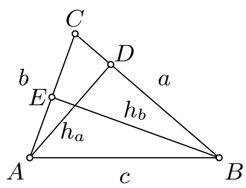
D e f i n i c i j a. Ako u trouglu ABC sa stranama a, b, c konstruišemo dve visine $h_a = AD$ i $h_b = BE$, onda iz sličnosti trouglova BCE i ACD, po stavu 41, sledi proporcija

$$a : h_b = b : h_a,$$

tj.

$$ah_a = bh_b;$$

prema tome je u svakom trouglu proizvod osnovice i njoj odgovarajuće visine nezavisan od toga koja se strana trougla uzme za osnovicu. Dakle, polovina proizvoda osnovice i visine jeste neka za trougao ABC karakteristična duž α.

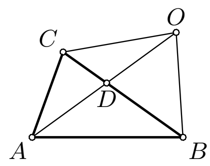


Neka je, na primer, u trouglu ABC smer obilaženja ABC pozitivan. P o z i t i v n u duž α (prema definiciji na strani 54) nazvaćemo sad merom površine trougla ABC pri pozitivnom obilaženju i označavaćemo je sa $[ABC]$; n e g a t i v n u duž - α nazvaćemo merom površine trougla pri negativnom obilaženju i označićemo je sa $[CBA]$.

S t a v 49. Ako tačka O leži van trougla ABC, onda za meru površine trougla važi relacija

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

D o k a z. Pretpostavimo najpre da se duži OA i BC seku u nekoj tački D. Tada, pomoću distributivnog zakona u našem računu dužima, iz definicije mere površine slede ralacije:



$$[OAB] = [ODB] + [DAB],$$

$$[OBC] = \text{-}[OCB] = \text{-}[OCD] \text{ - } [ODB],$$

$$[OCA] = [OCD] + [CAD].$$

Sabiranjem duži naznačenih u ovim jednačinama, ako se pri tome iskoristi jedan od stavova navedenih na strani 54 dobija se:

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [DAB] + [CAD],$$

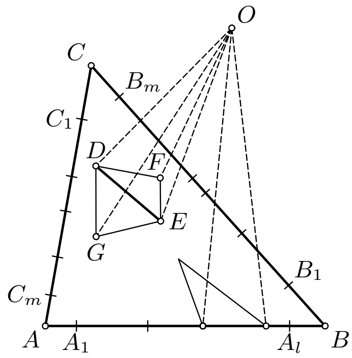
a odatle sledi, opet na osnovu distributivnog zakona,

$$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [ABC].$$

Ostale moguće pretpostavke u odnosu na položaj tačke O, na sličan način dovode do tvrdjenja stava 49.

S t a v 50. Ako se trougao ABC ma kako razloži u konačan broj trouglova Δ_k, onda je mera površine trougla ABC pri njegovom obilaženju u pozitivnom smeru jednaka zbiru mera površina svih trouglova Δ_k pri pozitivnom smeru obilaženja.

D o k a z. Neka je na primer ABC pozitivni smer obilaženja kod trougla ABC i neka je DE duž u unutrašnjosti trougla ABC, kojom se graniče dva trougla DEF i DEG našeg razlaganja.



Neka je na primer DEF pozitivni smer obilaženja trougla DEF; tada je GED pozitivni smer obilaženja trougla DEG. Ako sad uzmemo neku tačku O van trougla ABC, onda prema stavu 49, važe relacije: $[DEF] = [ODE] + [OEF] + [OFD]$, $[GED] = [OGE] + [OED] + [ODG] = [OGD] - [ODE] + [ODG]$.

Sabiranjem ovih dveju segmentnih jednačina otpada na desnoj strani mera površine $[ODE]$.

Izrazimo na ovaj način, prema stavu 49, mere površina svih trouglova Δ_k sa pozitivnim smerom obilaženja i saberimo sve tako dobijene jednačine. Tada za s v a k u duž DE, koja leži u unutrašnjost trougla ABC, sa desne strane jednačine otpada mera površine $[ODE]$. Ako označimo tačke, iskorišćene pri razlaganju trougla ABC, koje leže na njegovim stranama redom kako slede sa $A, A_1, \ldots, A_l, B, B_1, \ldots, B_m, C, C_1, \ldots, C_n$, i označimo zbir mera površina svih trouglova Δ_k pri pozitivnom smeru obilaženja kratko sa Σ, dobija se, što se sada lako vidi, sabirnjem svih segmentnih jednačina:

$$\Sigma = [OAA_1] + \cdots + [OA_1B] + [OBB_1] + \cdots + [OB_mC] + [OCC_1] + \cdots \\ + [OC_nA] = [OAB] + [OBC] + [OCA],$$

odakle, prema stavu 49:

$$\Sigma = [ABC].$$

D e f i n i c i j a. Ako definišemo meru površine $[P]$ prostog poligona pri pozitivnom smeru obilaženja kao zbir mera površina svih trouglova sa pozitivnim smerom obilaženja na koje se raspada dati poligon pri nekom odredjenom razlaganju, onda, na osnovu stava 50, doznajemo sličnim načinom zaključivanja koji smo primenili u §18 pri dokazu stava 43 da je mera površine $[P]$ nezavisna od načina razlaganja poligona u trouglove i stoga se jednoznačno odredjuje samo poligonom.

Iz ove definicije zaključujemo pomoću stava 50 da r a z l o ž i v o j e d n a k i p o l i g o n i i m a j u j e d n a k e m e r e površine (ovde, kao i u nerednim izlaganjima, pod merom površine uvek se razume mera površine za pozitivni smer obilaženja).

Dalje, ako su P i Q dopunski jednaki poligoni, to, prema definiciji, moraju postojati takva po dva i dva razloživo jednaka poligona $P', Q', \ldots, P'', Q''$, da poligon $P + P' + \ldots + P''$ sastavljen od $P, P', \ldots, P''$ bude razloživo jednak poligonu $Q + Q' + \ldots Q''$ sastavljenom od $Q, Q', \ldots, Q''$. Iz jednačina

$$[P + P' + \ldots + P''] = [Q + Q' + \ldots Q'']$$

$$[P'] = [Q']$$

$$\vdots$$

$$[P''] = [Q'']$$

lako zaključujemo da je

$$[P] = [Q],$$

tj. dopunski jednaki poligoni imaju jednake mere površine.

§21. Dopunska jednakost i mera površine

Našli smo u §20 da dopunski jednaki poligoni uvek imaju jednake mere površine. Iz ove činjenice izvodimo neposredno dokaz stava 48. Naime, označimo li jednake osnovice oba trougla sa g, odgovarajuće visine sa h i h' onda iz pretpostavljene dopunske jednakosti oba trougla zaključujemo da ti trouglovi takodje moraju imati jednake mere površina, tj. sledi

$$\tfrac{1}{2}gh = \tfrac{1}{2}gh'$$

i posle deoba sa $\frac{1}{2}g$

$$h = h';$$

ovo je tvrdjenje stava 48.

Sada se može takodje obrnuti iskaz učinjen na kraju §20. Ustvari, neka su P i Q dva poligona sa jednakim merama površine. Konstruišimo, prema stavu 47, dva pravougla trougla Δ i E koja imaju ovo svojstvo: neka svaki ima jednu katetu 1 i neka je dalje trougao Δ dopunski jednak poligonu P, a trougao E - poligonu Q. Iz stava, dokazanog na kraju §20, sledi tada da Δ i P imaju jednake mere površina, a isto tako E i Q. Iz toga sledi, zbog jednakosti mera površina poligona P i Q da i trouglovi Δ i E imaju jednake katete 1, oni moraju imati i druge katete jednake tj. trougli Δ i E su medju sobom podudarni, a stoga su, prema stavu 43, poligoni P i Q medju sobom dopunski jednaki.

Obe činjenice nadjene u ovom i prethodnom paragrafu obuhvatićemo u sledećem stavu:

Stav 51. Dva dopunski jednaka poligona imaju uvek istu meru površine, a dva poligona sa istom merom površine uvek su medju sobom dopunski jednaka.

Naročito dva dopunski jednaka pravougaonika koji imaju jednu zajedničku stranu moraju imati i druge strane jednake. Otuda sledi stav:

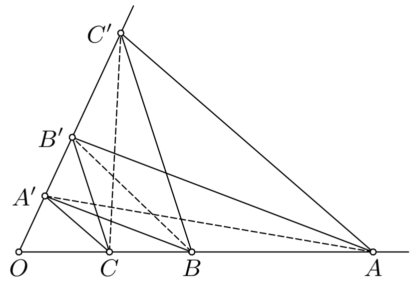
Stav 52. Ako se pravougaonik razloži pomoću pravih u više trouglova i ako se izostavi samo jedan od ovih trouglova, onda se pravougaonik ne može više ispuniti ostalim trouglovima.

Ovaj su stav uzeli Dezolt (*De Zolt*) i O. Štolc (*O. Stolz*) kao aksiomu, a F. Šur i V. Kiling (*W. Killing*) su ga dokazali pomoću Arhimedove aksiome. U prethodnom izlaganju je pokazano da je ova teorema potpuno nezavisna od Arhimedove aksiome.

Za dokaz stavova 48, 50, 51 bitno smo iskoristili račun dužima uveden u trećoj glavi §15, a pošto se ovaj račun dužima uglavnom zasniva na

Paskalovom stavu (stav 40) ili tačnije, na specijalnom slučaju (str. 46) ovog stava, to se pokazuje da je Paskalov stav najvažniji element za izgradnju učenja o površinama.

Lako doznajemo da se i obrnuto Paskalov stav može dobiti iz stavova 46 i 48. Ustvari, iz paralelnosti pravih CB' i $C'B$ sledi, prema stavu 46, dopunska jednakost trouglova OBB' i OCC'; isto tako iz paralelnosti pravih CA' i AC' sledi da su trouglovi OAA' i OCC' dopunski jednaki.



Pošto su, prema tome, i trouglovi OAA' i OBB' dopunski jednaki, to se iz stava 48 dobija da prave BA' i AB' moraju biti paralelne.

Dalje, lako uvidjano da poligon koji ceo leži u unutrašnjasti drugog poligona uvek ima manju meru površine no ovaj drugi i zato, prema stavu 51, ne može biti njemu dopunski jednak. Ova činjenica sadrži stav 52 kao spacijalan slučaj.

Sa ovim smo zasnovali bitne stavove učenja o površinama u ravni.

Još je Gaus (*K. F. Gauss*) obratio pažnju matematičara na slično pitanje za prostor. Izrazio sam pretpostavku da je nemoguće slično zasnivanje učenja o zapreminama i postavio odredjeni zadatak - naći dva tetraedra sa jednakim osnovama i jednakim visinama koji se ne mogu ni na koji način razložiti na kongruentne tetraedre i koji se takodje ne bi mogli dopuniti dodavanjem podudarnih tetraedara do takvih poliedara koji bi se mogli sa svoje strane razložiti na podudarne tetraedre.

M. Den je uspeo da ovo stvarno dokaže; time je on na strog način dokazao nemogućnost da se zasnuje učenje o zapreminama na isti način kako je to gore učinjeno za površine u ravni.

Prema tome za obradu sličnih pitanja za prostor trebalo bi uzeti druga dva pomoćna sredstva, npr. Kavaljerijev princip.

U ovom smislu je V. Zis zasnovao učenje o zapreminama. V. Zis naziva dva tetraedra jednakih visina i dopunski jednakih osnovica jednakim u Kavaljerijevom smislu; najzad, dva poliedra, koja se mogu predstaviti kao razlika u Kavaljerijevom smislu razloživo jednakih poliedara, on naziva razloživo jednakim u Kavaljerijevom smislu.

Može se dokazati, bez upotrebe aksiome neprekidnosti da su jednakost zapremine i dopunska jednakost u Kavaljerijevom smislu—ekvivalentni pojmovi, dok se razloživa jednakost u Kavaljerijevom smislu kod poliedara jednakih zapremina može dokazati samo pomoću Arhimedove aksiome.

Da pomenemo kao noviji naredni rezultat koji je dobio J. P. Sidler (*J. P. Sydler*) : Stav, da su dva i dva dopunski jednaka poligona i pazloživo jednaka, koji se dobiva za ravan iz stava 51 i razmatranja na str. 60 (posle stava 46),može se, pod pretpostavkom Arhimedove aksiome, proširiti na poliedre u prostoru. Ovom rezultatu se dalje priključuje konstatacija da množina klasa ekvivalencije poliedara u odnosu na razloživu jednakost ima moć kontinuuma.

Peta glava

Dezargov stav

§22. Dezargov stav i njegov dokaz u ravni pomoću aksioma podudarnosti

Od aksioma postavljenih u prvoj glavi, sve aksiome grupa $II - V$ delom su linearne, a delom aksiome ravni; aksiome 4–8 grupe I su jedine prostorne aksiome. Da bismo jasno uvideli značaj ovih prostornih aksioma, zamislimo da je data neka r a v n a geometrija i ispitajmo uopšte uslove za to da se ta ravna geometrija može shvatiti kao deo prostorne geometrije, u kojoj su zadovoljene sve aksiome pretpostavljene u ravnoj geometriji, a osim toga prostorne aksiome veze I_{4-8}.

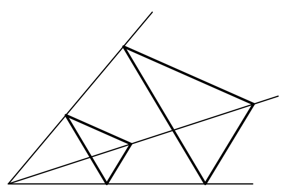
U ovoj i narednoj glavi nećemo se uopšte koristiti aksiomama podudarnosti. Usled toga ovde se mora za osnovu uzeti aksioma paralelnih IV (str. 23) u oštrijoj formulaciji:

IV^* (aksioma paralelnih u oštrijoj formulaciji). Neka je a proizvoljna prava i A tačka koja leži van a: tada u ravni koja je odredjena pravom a i tačkom A postoji jedna i samo jedna prava koja prolazi kroz tačku A i ne preseca pravu a.

Kao što je poznato, na osnovu aksioma grupa $I - II$, IV^*, može se dokazati takozvani Dezargov (*Desargues*) stav; Dezargov stav jeste stav o presečnim tačkama u ravni. Naročito ističemo pravu na kojoj treba da leže presečne tačke odgovarajućih strana oba trougla kao kao takozvanu „beskonačno daleku pravu" i tako dobiveni stav zajedno sa njegovom inverzijom nazvaćemo prosto Dezargovim stavom; ovaj stav glasi:

S t a v 53 (Dezargov stav) Ako dva trougla leže u ravni tako da su im po dve i dve odgovarajuće strane medju sobom paralelne, to prave koje spajaju odgovarajuća temena ili prolaze kroz istu tačku ili su medju sobom paralelne i obrnuto:

Ako dva trougla leže u ravni tako da linije koje spajaju odgovarajuća temena ili prolaze kroz jednu tačku ili su medju sobom paralelne i ako, dalje, imaju dva para odgovarajućih strana medju sobom paralelnih, onda su i treće strane tih trouglova medju sobom paralelne.



Kako je već rečeno, stav 53 je posledica aksioma I, II, IV^*; prema ovoj činjenici važenje Dezargovog stava u ravnoj geometriji svakako je n u ž a n uslov da bi se ova geometrija mogla shvatiti kao deo prostorne geometrije u kojoj su zadovoljene sve aksiome grupa I, II, IV^*.

Uzmimo sad, kao i u trećoj i četvrtoj glavi, r a v n u geometriju, u kojoj važe aksiome I_{1-3} i $II - IV$, i zamislimo prema §15, da je u tu geometriju uveden račun dužima: tada se može, kao što je to izloženo u §17, dodeliti svakoj tački te ravni par duži (x, y) i svakoj pravoj razmera triju duži $(u : v : w)$, pri čemu u, v nisu oba nula, tako da linearna jednačina

$$ux + vy + w = 0$$

predstavlja uslov incidencije tačke i prave. Sistem svih duži u našoj geomatriji obrazuje, prema §17, brojno područje, za koje važe svojstva 1–16 nabrojana u §13; i zato možemo pomoću ovog brojnog područja konstruisati prostornu geometriju slično onome što je uradjeno u §9 ili §12 pomoću brojnih sistema Ω i $\Omega(t)$; zbog toga uzmimo da sistem triju duži (x, y, z) pretstavlja tačku, a razmera četiri duži (u, v, w, r), u kome u, v, w nisu istovremeno jednake nuli, pretstavlja ravan, dok bi prave bile definisane preseci dveju ravni; pri tome linearna jednačina

$$ux + vy + wz + r = 0$$

izražava da tačka (x, y, z) leži u ravni $(u : v : w : r)$. Najzad što se tiče rasporeda tačaka na pravoj ili rasporeda tačaka ravni u odnosu na pravu u njoj ili, najzad, rasporeda tačaka u odnosu na ravan u prostoru, on se odredjuje pomoću nejednačina medju dužima na sličan način kako je to uradjeno u §9 za ravan.

Pošto unošenjem vrednosti $z = 0$ opet dobivamo prvobitnu ravnu geometriju, uvidjamo da se naša ravna geometrija može smatrati kao deo prostorne geometrije. No, prema gornjim izlaganjima, za to je nužan uslov važenje Dezargovog stava, a otuda proizilazi da u usvojenoj ravnoj geometriji mora važiti Dezargov stav. Ovaj stav je, dakle, posledica aksioma $I_{1-3}, II - IV$.

Primetimo da se ova sad nadjena činjenica može bez muke i direktno izvesti iz stava 42 o učenju o proporcijama ili iz stava 61.

§23. Nemogućnost dokaza Dezargovog stava u ravni bez aksioma podudarnosti

Sada ćemo razmotriti pitanje da li se Dezargov stav može dokazati i bez upotrebe aksioma podudarnosti. Pri tome ćemo dospeti do nared-nog rezultata:

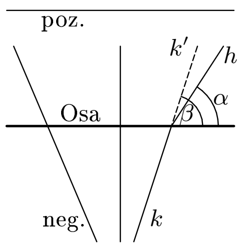
S t a v 54. Postoji ravna geometrija u kojoj su zadovoljene aksiome $I_{1-3}, II, III_{1-4}, IV^*, V$, tj. sve linearne aksiome i aksiome ravni, izuzev aksiome podudarnosti III_5, a Dezargov stav ne važi (stav 53). Dezargov stav se, prema tome, ne može izvesti samo iz pomenutih aksioma; za njegov dokaz neophodne su ili prostorne aksiome ili aksioma III_5 o podudarnosti trouglova.

D o k a z. U običnoj ravnoj Dekartovoj geometriji, čiju smo mogućnost već dokazali u drugoj glavi §9, primenićemo definiciju pravih linija i uglova na ovaj način. Uzmimo ma koju pravu Dekartove geometrije kao osu i razlikujmo na ovoj osi pozitivni i negativni smer, kao i pozitivnu i negativnu poluravan u odnosu na ovu osu.

Uzmimo sada kao pravu naše nove geometrije osu i svaku prema njoj paralelnu pravu Dekartove geometrije, zatim svaku pravu Dekartove geometrije, čija poluprava koja leži u pozitivnoj poluravni obrazuje sa pozitibnim smerom ose prav ili tup ugao, i, najzad, svaki sistm dveju polupravih h, k Dekartove geometrije koji ima ovo svojstvo: zajedničko teme od h i k leži na osi; poluprava h, koja leži u negativnoj poluravni, obrazuje sa pozitivnim smerom ose oštar ugao α, a produženje k' poluprave k, koja leži u negativnoj poluravni, obrazuje sa pozitivnim smerom ose ugao β tako da u Dekartovoj geometriji važi relacija

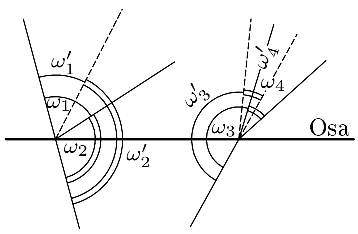
$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 2.$$

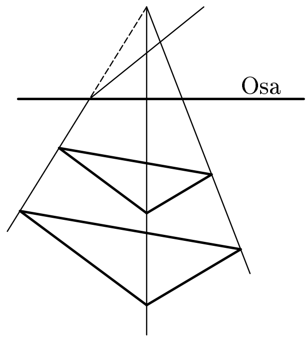
Raspored tačaka i dužine duži i na onim pravima koje se u Dekartovoj ravni pretstavljaju kao sistem dve poluprave definišu se na očigledan način, kao i obično. U tako definisanoj geometriji, što se lako uvidja, važe aksiome $I_{1-3}, II, III_{1-8}, IV^*$; napr. neposredno je jasno da prave koje prolaze kroz jednu tačku jednostruko pokrivaju ravan. Osim toga u jednoj geometriji važe i aksiome V.



Svi uglovi koji nemaju n i j e d a n krak koji ide od ose po pozitivnoj poluravni i obrazuje sa pozitivnim smerom ose oštar ugao, mere se obično kao i u Dekartovoj geometriji. Ako je pak bar jedan krak ugla ω poluprava k sa maločas navedenim svojstvima, onda ćemo kao veličinu ugla ω u novoj geometriji definisati veličinu onog ugla ω' Dekartove geometrije, koji ima za krak polupravu k' mesto h (videti prethodnu sliku). Ovaj postupak definisanja za dva para uporednoh uglova pokazuje figura levo. Na osnovu naše definicije uglova važi i aksioma III_4; naročito za svaki ugao $\angle(l,m)$ važi:

$$\angle(l,m) \equiv \angle(m,l).$$





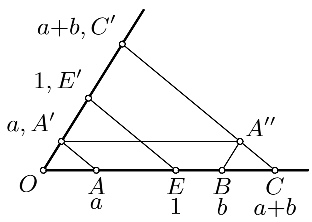
Naprotiv, kao što pokazuje slika desno i što se lako računom potvrdjuje, *Dezargov stav u novoj ravnoj geometriji ne važi.* Osim toga, isto je tako lako nacrtati figuru koja pokazuje da ni Paskalov stav ne važi.

Ovde izložena ravna „nedezargovska” geometrija služi istovremeno kao primer ravne geometrije, u kojoj važe aksiome I_{1-3}, II, III_{1-4}, IV^*, V i koja se ipak ne može smatrati kao deo prostorne geometrije

§24. Uvodjenje segmentnog računa bez upotrebe aksioma podudarnosti na osnovu Dezargovog stava

Da bismo potpuno uvideli značaj Dezargovog stava (stav 53), uzmimo za osnovu ravnu geometriju u kojoj važe aksiome I_{1-3}, II, IV^* , tj. sve linearne aksiome i aksiome ravni, osim aksioma podudarnosti i neorekidnosti, i uvedimo u ovu geometriju novi račun dužima, *nezavisno od aksioma podudarnosti*, na ovaj način:

Uzmimo u ravni dve stalne prave, koje se seku u tački O, i u daljim izlaganjima računajmo da samo takvim dužima, čija je početna tačka O i čije krajnje tačke proizvoljno leže na jednoj od ovih dveju stalnih pravih. I samu tačku O smatrajmo kao duž O, što ćemo označiti ovako:



$$OO = 0 \text{ ili } 0 = OO.$$

Neka su E i E' po jedna odredjena tačka na stalnim pravima koje prolaze kroz tačku O; tada ćemo smatrati obe duži OE i OE' kao duži 1; u znacima:

$$OE = OE' = 1$$

ili

$$1 = OE = OE'.$$

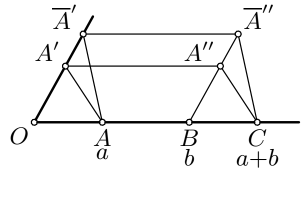
Pravu EE' kratko nazivamo j e d i n i č n o m   p r a v o m. Dalje, ako su A i A' tačke na pravima OE odn.OE' i ako je pri tome prava koja spaja AA' paralelna prema EE', onda ćemo duži OA i OA' nazvati jednakim i to ćemo označiti ovako:

$$OA = OA' \text{ ili } OA' = OA.$$

Da bismo najpre definisali zbir duži $a = OA'$ i $b = OB$, koje leže na OE, konstruišimo AA' paralelno prema jediničnoj pravoj EE' i povucimo zatim kroz A' pravu paralelnu prema OE i kroz B pravu paralelnu prema OE'. Ove će se dve paralelne seći u nekoj tački A''. Najzad, povucimo kroz tačku A'' pravu paralelnu prema jediničnoj pravoj EE'; ona preseca stalne prave OE i OE' u po jednoj tački, C i C'; tada ćemo duž $c = OC = OC'$ nazvati z b i r o m duži $a = OA$ i $b = OB$, što ćemo označiti ovako:

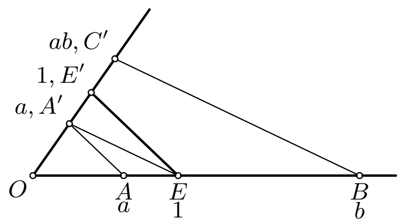
$$c = a + b \text{ ili } a + b = c.$$

Pre nego što predjemo dalje, pokazaćemo da, kad se pretpostavi da važi Dezargov stav (stav 53), zbir dveju duži se može dobiti i na opštiji način: tačka C, koja odredjuje zbir $a+b$ na onoj pravoj, na kojoj leže tačke A i B, ne zavisi od jedinične prave EE' od koje smo pošli, tj. mi ćemo dobiti ovu tačku C i pomoću naredne konstrukcije:



Odaberimo na pravoj OA' ma koju tačku $\bar{A}'$ i povucimo kroz tačku B paralelnu prema $O\bar{A}'$ i kroz tačku $\bar{A}'$ paralelnu prema OB. Ove se dve prave seku u nekoj tački $\bar{A}''$. Prava povučena posle toga kroz tačku $\bar{A}''$ paralelno prema $A\bar{A}'$ preseca pravu OA u tački C, koja odredjuje zbir $a + b$.

Radi dokaza pretpostavimo da su kako tačke A' i A'' tako i tačke $\bar{A}'$ i $\bar{A}''$ dobivene na navedeni način i da je tačka C na pravoj OA tako odredjena, da prava CA'' bude paralelna prema AA'. Treba dokazati da je i $C\bar{A}'$ paralelno sa $A\bar{A}'$. Trouglovi $AA'\bar{A}'$ i $CA''\bar{A}''$ leže tako da su linije koje spajaju odgovarajuća temena tih trouglova paralelne, a pošto su, sem toga, odgovarajuće strane dvaju parova, naime $A'\bar{A}'$ i $A''\bar{A}''$ kao i AA' i CA'', paralelne, to su u stvari, prema drugom iskazu Dezargovog stava, i treće strane $A\bar{A}'$ i $C\bar{A}''$ medju sobom paralelne.



Da bismo definisali proizvod duži $a = OA$ i duži $b = OB$, poslužićemo se potpuno istom konstrukcijom datom u §15, samo ćemo ovde uzeti umesto krakova pravog ugla obe stalne prave OE i OE'. Konstrukcija je prema tome sledeća: odredi se na pravoj OE tačka A', tako da je AA' paralelno jediničnoj pravoj EE'; tačka E se spoji sa tačkom A' i povuče kroz tačku B paralelna prema EA'; ova paralelna preseca stalnu pravu OE' u nekoj tački C'; duž $c = OC'$ nazvaćemo p r o i z v o d o m duži $a = OA$ i duži $b = OB$ i pisati:

$$c = ab \text{ ili } ab = c.$$

§25. Komutativni i asocijativni zakon sabiranja u novom segmentnom računu

Za naš novi račun dužima, u što se lako uveravamo, važe svi stavovi veze postavljeni u §13; sada ćemo ispitati koja od računskih pravila postavljenih tamo važe u našem novom računu dužima, ako se za osnovu uzme ravna geometrija, u kojoj su zadovoljene aksiome I_{1-3}, II, IV^* i osim toga važi Dezargov stav.

Pokazaćemo pre svega, da za sabiranje duži definisano u §24 važi k o m u t a t i v n i zakon

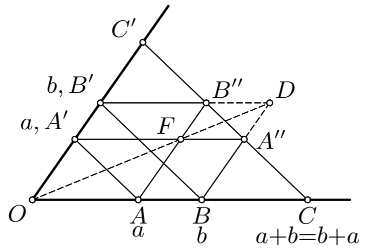
$$a + b = b + a.$$

Neka je

$$a = OA = OA',$$

$$b = OB = OB',$$

pri čemu su, shodno našim postavkama, AA' i BB' paralelne jediničnoj pravoj. Konstruišimo sad tačke A'' i B'', povlačeći $A'A''$ i $B'B''$ paralelno prema OA i dalje AB'' i BA'' paralelno prema OA'; kao što se odmah vidi, tada naše tvrdjenje iskazuje da je spojna prava $A''B''$ paralelna prema AA'.



Tačnost ovog tvrdjenja uvidjamo na osnovu Dezargovog stava (stav 53) na ovaj način: označimo presečnu tačku pravih AB'' i $A'A''$ sa F, a presečnu tačku pravih BA'' i $B'B''$ sa D; tada će u trouglima $AA'F$ i $BB'D$ odgovarajuće strane biti medju sobom paralelne. Pomoću Dezargovog stava odatle zaključujemo da tri tačke O, F, D, leže na jednoj pravoj. Usled ove okolnosti trougli OAA' i $DB''A''$ leže tako da prave koje spajaju odgovarajuća temena prolaze kroz istu tačku F. Pošto su, osim toga, odgovarararajuće strane dvaju parova, naime OA i DB'' kao i OA' i DA'', paralelne, biće, prema drugom iskazu Dezargovog stava (stav 53), i treće strane AA' i $B''A''$ paralelne. Istovremeno iz ovog dokaza sledi da je potpuno svejedno od koje se od dveju stalnih pravih polazi pri konstrukciji zbira dveju duži.

Dalje važi a s o s i j a t i v n i zakon sabiranja:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

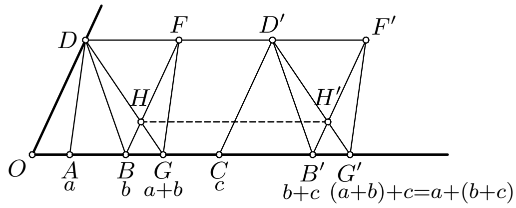
Neka su na pravoj OE date duži

$$a = OA, b = OB, c = OC.$$

Na osnovu opšteg pravila sabiranja datog u prethodnom paragrafu mogu se zbirovi

$$a + b = OG,\ b + c = OB',\ (a + b) + c = OG'$$

konstruisati na ovaj način: izaberimo proizvoljno na pravoj OE' tačku D i spojimo je sa tačkama A i B. Pravu povučenu paralelno kroz tačku D prema OA presecaju obe paralelne prema OD, povučene kroz tačke B i C, u po jednoj tački F odn. D'. Prave povučene paralelno kroz tačku F prema AD odn. kroz tačku D' paralelno prema BD presecaju sada pravu OA u gore pomenutim tačkama G odn. B'; dalje, prava povučena kroz tačku D' paralelno prema GD preseca pravu OA u isto tako pomenutoj tački G'. Najzad se zbir $a + (b + c)$ dobiva kad najpre povučemo kroz tačku B' paralelnu prema



OD koju prava DD' preseca u nekoj tački F', i kad povučemo kroz tačku F' paralelnnu prema AD. Prema tome treba dokazati da je prava $G'F'$ paralelna prema pravoj AD. Označimo sada presečnu tačku pravih BF i GD sa H i presečnu tačku pravih $B'F'$ i $G'D'$ sa H'. Tada su u trouglima BDH i $B'D'H'$ odgovarajuće strane paralelne; a pošto su, dalje, prave BB' i DD' medju sobom paralelne, to je, prema Dezargovom stavu, i prava HH' paralelna ovim dvema pravima. Prema tome možemo primeniti drugi iskaz Dezargovog stava na trougle GFH i $G'F'H'$ pa iz toga saznati da je prava $G'F'$ paralelna prema GF, a zato, svakako, i prema AD.

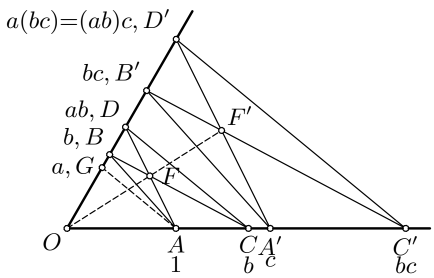
§26. Asocijativni zakon množenja i dva distributivna zakona u novom segmentnom računu.

Pri našim pretpostavkama i za množenje duži važi asocijativni zakon:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Neka su na prvoj od dveju stalnih pravih kroz tačku O date duži

$$1 = OA,\ b = OC,\ c = OA',$$



a na drugoj pravoj duži

$$a = OG \text{ i } b = OB.$$

Da bismo, prema pravilu u §24. redom konstruisali duži

$$bc = OB' \text{ i } bc = OC',$$

$$ab = OD,$$

$$(ab)c = OD',$$

povucimo $A'B'$ paralelno sa AB, $B'C'$ paralelno sa BC, CD paralelno sa AG, kao i $A'D'$ paralelno sa AD; kako se odmah vidi, tada se naše tvrdjenje svodi na to da i CD mora biti paralelno sa $C'D'$. Označimo li sada presečnu tačku pravih AD i BC sa F, a presečnu tačku pravih $A'D'$ i $B'C'$ sa F', to će u trouglima ABF i $A'B'F'$ odgovarajuće strane biti medju sobom paralelne; otuda, prema Dezargovom stavu, tri tačke O, F, F' leže na jednoj pravoj. Zahvaljujući ovoj okolnosti, možemo primeniti drugi iskaz Dezargovog stava na trougle CDF i $C'D'F'$ i odatle uvideti da je ustvari CD paralelno sa $C'D'$.

Najzad ćemo dokazati u našem računu dužima na osnovu Dezargovog stava oba distributivna zakona

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca.$$

Radi dokaza prvog distributivnog zakona

$$a(b + c) = ab + ac$$

pretpostavimo da su na prvoj od dveju stalnih pravih date duži:

$$1 = OE, \ b = OB, \ c = OC,$$

a na drugoj:

$$a = OA.$$

Prave koje su povučene paralelno prema pravoj EA kroz tačke B i C presecaju pravu OA u po jednoj tački, D odn. F. Tada je na osnovu pravila o množenju (§23),

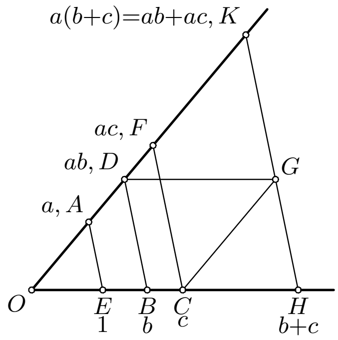
$$OD = ab, \ OF = ac.$$

prema opštijem pravilu sabiranja u §24 zbir

$$OH = b + c$$

dobivamo ako povučemo kroz tačku C paralelnu prema OD i kroz D paralelnu prema OC, pa zatim kroz presečnu tačku G ovih dveju pravih paralelnu prema BD, koja preseca pravu OC u već pomenutoj tački H i pravu OD u nekoj tački K. Pošto je $OH = b + c$, na osnovu pravila o množenju važi

$$OK = a(b + c).$$



Na osnovu opštijeg pravila o sabiranju i na osnovu onoga što je dokazano na str. 74, da stalne prave OE i OE' mogu razmeniti uloge pri konstrukciji zbira, može se najzad konstruisati zbir $ac + ab$ na ovaj način: povucimo ma kroz koju tačku prave OE, napr. kroz C, pravu CG, paralelnu prema OD, zatim kroz tačku D paralelnu DG prema OC i, najzad, kroz tačku G paralelnu GK prema CF.

Dakle, važi

$$OK = ac + ab,$$

a otuda se pomoću komutativnog zakona sabiranja izvodi prvi distributivni zakon.

Najzad, da bismo dokazali drugi distributivni zakon, pretpostavimo da su na prvoj od dveju stalnih pravih date duži:

$$1 = OE,\ a = OA,$$

a na drugoj stalnoj pravoj duži:

$$b = OB, c = OC.$$

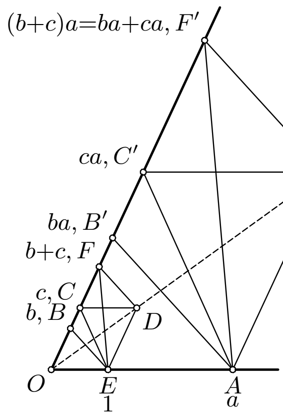
Prava AB' paralelna prema EB i prava AC' paralelna prema EC odredjuju duži

$$OB' = ba,\ OC' = ca.$$

Konstruišimo duži

$$OF = b + c,\ OF' = ba + ca$$

opet na stalnoj pravoj OB prema opštijem pravilu sabiranju na ovaj način:



Povucimo paralelne kroz tačku C prema OE i kroz tačku E prema OC. One se seku u nekoj tački D, kroz koju povucimo paralelnu prema EB, koju OA preseca u gore pomenutoj tački F. Isto tako povucimo kroz tačku A paralelnu prema OC', a kroz C' paralelnu prema OA. One se seku u nekoj tački D'; kroz ovu tačku povucimo paralelnu prema AB', koju OA preseca u pomenutoj tački F'.

Prema pravilu množenja drugi distributivni zakon biće dokazan ako se pokaže da je prava AF' paralelna prema pravoj EF.

U trouglima ECD i $A'C'D'$ odgovarajuće strane su medju sobom paralelne; zato, prema Dezargovom stavu, tri tačke O, D, D' leže na jednoj pravoj. Stoga možemo primeniti drugi iskaz Dezargovog stava na trougle EDF i $AD'F'$ i uvideti da su prave AF' i EF zaista paralelne.

§27. Jednačina prave na osnovu novog segmentnog računa

Mi smo uveli segmentni račun od §24 do §26 pomoću aksioma navedenih u §24 i pretpostavljajući važenje Dezargovog stava za ravan. U ovom računu dužima važe, osim stavova veze postavljenih u §13, asocijativni zakon sabiranja i množenja, kao i oba distributivna zakona. Da komutativni zakon nije neophodan, videćemo u §33. Pokazaćemo u ovom paragrafu na koji način je moguće analitičko pretstavljanje tačaka i pravih u ravni na osnovu ovog računa dužima.

D e f i n i c i j a. Dve stalne prave uzete u ravni kroz tačku O nazvaćemo osama X i Y i zamislićemo da je svaka tačka P u ravni odredjena dužima x, y, koje se dobivaju na osama X i Y, povlačeći kroz tačku P paralelne prema ovim osama. Ove duži x, y nazvaćemo koordinatama tačke P.

Na osnovu novog segmentnog računa i pomoću Dezargovog stava dospevamo do naredne činjenice:

S t a v 55. Koordinate x, y tačke na proizvoljnoj pravoj uvek zadovoljavaju segmentnu jednačinu narednog oblika:

$$ax + by + c = 0;$$

u ovoj jednačini moraju stajati duži a, b sa leve strane od koordinata x, y; duži a, b nikad nisu istovremeno nula, i c je proizvoljna duž.

Obrnuto: svaka segmentna jednačina opisane vrste pretstavlja uvek pravu u razmatranoj ravnoj geometriji.

D o k a z. Apscisa x ma koje tačke P na osi Y ili prema njoj paralelne prave ne zavisi od izbora tačke P na toj pravoj, tj. takva se prava može pretstaviti u obliku:

$$x = \bar{c}.$$

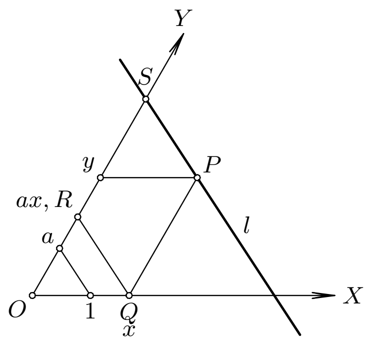
Duži $\bar{c}$ odgovara duž c, tako da je

$$\bar{c} + c = 0,$$

a stoga važi i

$$x + c = 0.$$

Ova jednačina ima oblik tražene vrste. Neka je sad l prava koja preseca Y-osu u nekoj tački S. Povucimo kroz proizvoljnu tačku P ove prave paralelnu prema Y-osi koja preseca X-osu u tački Q.



Duž $OQ = x$ je apscisa tačke P. paralelna prema l kroz tačku Q otseca na Y-osi duž OR, a prema definiciji množenja važi

$$OR = ax,$$

gde je a duž, koja zavisi samo od položaja prave l, a ne zavisi od izbora tačke P na l. Neka je y ordinata od P. Prema proširenoj definiciji zbira na str. 73–74 i usled već na str. 74 dokazane mogućnosti da se konstruiše zbir polazeći od Y-ose, duž OS sada pretstavlja zbir $ax + y$. Duž $OS = \bar{c}$ je duž koja je odredjena samo položalem prave l. Iz jednačine

$$ax + y = \bar{c}$$

sledi

$$ax + y + c = 0,$$

gde je c opet duž koja je odredjena jednačinom $\bar{c}+c = 0$. Poslednja jednačina prave $ax + y + c = 0$ ima zahtevani oblik.

Lako se vidi da koordinate one tačke koja ne leži na pravoj l ne zadovoljavaju ovu jednačinu.

Isto tako je lako dokazati drugi deo stava 55. Naime, ako je data segmentna jednačina

$$a'x + b'y + c' = 0,$$

u kojoj duži a' i b' nisu obe nula, pomnožićemo, u slučaju da je $b' = 0$, sleva članove jednačine sa duži a, koja je odredjena relacijom $aa' = 1$, u slučaju pak da bude $b' \neq 0$,– sa duži b, koja je odredjena relacijom $bb' = 1$. Tada ćemo, na osnovu pravila računa, dobiti jednu od maločas izvedenih jednačin pravih i možemo lako u posmatranoj ravnoj geometriji konstruisati pravu koja zadovoljava ovu jednačinu.

Treba izričito primetiti da pri našim pretpostavkama segmentna jednačina oblika

$$xa + yb + c = 0,$$

u kojoj duži a, b stoje desno od koordinata x, y, uopšte ne pretstavljaju pravu.

U §30 imaćemo važnu primenu stava 55.

§28. Ukupnost duži shvaćena kao kompleksni brojni sistem

Pomenuli smo već da su u našem novom računu dužima, zasnovanom u §24, zadovoljeni stavovi 1–6 u §13.

Dalje, u §25 i §26 uvideli smo pomoću Dezargovog stava, da za ovaj račun dužima važe zakoni računa 7–11 u §13; prema tome, postoje svi stavovi veze i pravila računa, izuzev komutativnog zakona množenja.

Najzad, da bismo omogućili raspored duži, ustanovićemo ovo: neka su A i B dve ma koje različite tačke prave OE; poredjajmo sada četiri tačke O, E, A, B, prema stavu 5 tako, da tačka E stoji iza tačke O. Stoji li u ovom poretku i tačka B iza tačke A, reći ćemo da je duž $a = OA$ manja od duži $b = OB$, što ćemo označiti:

$$a < b;$$

naprotiv, stoji li u pomenutom poretku tačka A iza B, reći ćemo da je duž $a = OA$ veća od duži $b = OB$; u znacima:

$$a > b$$

Lako uvidjamo da su sad u našem segmentnom računu, na osnovu aksiome II, zadovoljeni zakoni računa 13–16; prema tome, ukupnost svih različitih duži obrazuje kompleksni brojni sistem, za koji važe zakoni 1–11, 13–16 i §13, tj. sva pravila osim komutativnog zakona množenja i stavova o neprekidnosti; u da ljim izlaganjima takav brojni sistem zvaćemo kratko Dezargovim brojnim sistemom.

§29. Izgradjivanje prostorne geometrije pomoću Dezargovog brojnog sistema

Neka je dat ma koji Dezargov brojni sistem D; ovaj nam sistem omogućava da izgradimo prostornu geometriju, u kojoj su zadovoljene sve aksiome I, II, IV^*.

Da bismo ovo uvideli, zamislimo sistem ma koja tri broja (x, y, z) Dezargovog brojnog sistema D kao tačku, a sistem ma koja četiri broja $(u : v : w : r)$ sistema D, od kojih prva tri nisu istivremeno 0, kao ravan; ali, neka sistemi $(u : v : w : r)$ i $(au : av : aw : ar)$, gde a znači ma koji broj različit od 0 u sistemu D, pretstavljaju istu ravan. Neka postojanje jednačine

$$ux + vy + wz + r = 0$$

izražava da tačka (x, y, z) leži u ravni $(u : v : w : r)$. Najzad, definišimo pravu pomoću sistema dveju ravni $(u' : v' : w' : r')$ i $(u'' : v'' : w'' : r'')$, ako se u sistemu D ne može naći broj a različit od 0, tako da istovremeno bude

$$au' = u'',\ av' = v'',\ aw' = w''.$$

Reći će se da tačka (x, y, z) leži na ovoj pravoj

$$[(u' : v' : w' : r'),\ (u'' : v'' : w'' : r'')],$$

ako je zajednička za obe ravni $(u' : v' : w' : r')$ i $(u'' : v'' : w'' : r'')$. Smatra se da dve prave koje sadrže iste tačke nisu različite.

Primenjujući zakone računa 1–11 u §13, koji treba da važe prema pretpostavci za brojeve sistema D, dospećemo bez teškoća do rezultata: da su u maločas postavljenoj prostornoj geometriji sve aksiome I i IV^* zadovoljene.

Da bi i aksiome II rasporeda bile zadovoljene, usvojimo naredne postavke. Neka su

$$(x_1, y_1, z_1)\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3, z_3)$$

ma koje tri tačke na pravoj

$$[(u' : v' : w' : r'),\ (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

reći ćemo da tačka (x_2, y_2, z_2) leži izmedju one druge dve
tačke ako je zadovoljen bar jedan od šest pari narednih jednačina:

$$x_1 < x_2 < x_3,\ x_1 > x_2 > x_3 \tag{1}$$

$$y_1 < y_2 < y_3,\ y_1 > y_2 > y_3 \tag{2}$$

$$z_1 < z_2 < z_3,\ z_1 > z_2 > z_3. \tag{3}$$

Ako napr. važi jedna od dveju dvostrukih nejednačina (1), lako zaključujemo da mora važiti ili $y_1 = y_2 = y_3$ ili jedna od dvostrukih nejednačina (2), i da isto tako važi ili $z_1 = z_2 = z_3$ ili jedna od dvostrukih nejednačina (3). Ustvari, množeći sleva jednačine

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0,$$

$$u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0,$$

$$i = 1, 2, 3$$

sa podesno izabranim brojevima sistema D, koji su $\neq 0$, i zatim sabirajući dobivene jednačine, izvodimo sistem jednačina oblika

$$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0 \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Ovde sigurno koeficijent v''' nije 0, pošto bi se inače dobila jednakost triju brojeva x_1, x_2, x_3. U slučaju da je $u''' = 0$, dobiva se

$$y_1 = y_2 = y_3.$$

Ako je pak $u''' \neq 0$, onda iz

$$x_1 < (>) x_2 < (>) x_3$$

izvodimo dvostruku nejednačinu

$$u'''x_1 < (>) u'''x_2 < (>) u'''x_3,$$

pa stoga, na osnovu (4):

$$v'''y_1 + r''' < (>) v'''y_2 + r''' < (>) v'''y_3 + r''',$$

i otuda

$$v'''y_1 < (>) v'''y_2 < (>) v'''y_3,$$

pa kako v''' nije 0, imamo

$$y_1 < (>) y_2 < (>) y_3;$$

u svakoj od ovih dvostrukih nejednačina treba svuda da važi ili levi ili desni znak.

Prethodna razmatranja pokazuju da u našoj geometriji važe aksiome rasporeda II_{1-3}. Ostaje još da se pokaže da u našoj geometriji važi aksioma ravni II_4. U tu svrhu neka nam je data ravan $(u : v : w : r)$ i u njoj prava $[(u : v : w : r),\ (u' : v' : w' :')]$. Uzmimo da sve tačke (x, y, z) koje leže u ravni $(u : v : w : r)$, za koje je izraz $u'x + v'y + w'z + r'$ veći ili manji od 0, leže na jednoj odn. drugoj strani date prave. Tada treba dokazati da je ova postavka jednoznačna i da je u saglasnosti sa postavkom na str. 8. Ovaj se dokaz može lako izvesti.

Tako smo doznali da su zadovoljene sve aksiome I, II, IV^* u ovoj prostornoj geometriji, koja na gore izložen način proizilazi iz Deza-rgovog brojnog sistema D.

Kako je Dezargov stav posledica aksioma I_{1-8}, II, IV^*, to doznajemo ovo: Na jednom Dezargovom brojnom sistemu D može se na pokazani način izgraditi ravna geometrija, i kojoj brojeve sistema D obrazuju elementi računa dužima, uvedenog prema §24, i u kojoj su zadovoljene aksiome I_{1-3}, II, IV^*; u takvoj ravnoj geometriji uvek važi i Dezargov stav.

Ova činjenica je inverzija rezultata do koga smo došli u §24 i koji možemo rezimirati na ovaj način: U ravnoj geometriji, u kojoj osim aksioma I_{1-3}, II, IV^*; važi i Dezargov stav, može se, prema §24, uvesti računu dužima; tada elementi ovog računa dužima obrazuju, pri podesnoj postavci rasporeda, uvek Dezargov brojni sistem.

§30. Značaj Dezargovog stava

Kad su u nekoj ravnoj geometriji zadovoljene aksiome I_{1-3}, II, IV^* i, osim toga, važi Dezargov stav, onda je, prema poslednjem stavu, uvek moguće u ovoj geometriji uvesti segmentni račun, za koji važe pravila 1–11, 13–16 u §13. Posmatraćemo dalje, ukupnost ovih duži kao kompleksni brojni sistem i od njega ćemo izgraditi, prema izlaganjima u §29, prostornu geometriju, u kojoj važe sve aksiome I, II, IV^*.

Ako u ovoj prostornoj geometriji posmatramo isključivo tačke $(x, y, 0)$ i one prave na kojima leže samo takve tačke, dobićemo ravnu geometriju. Ako pak uzmemo u obzir stav 55, izveden u §27, jasno je da se ova ravna geometrija mora poklopiti sa ravnom geometrijom, izloženom u početku, tj. elementi dveju geometrija mogu se uzajamno jednoznačno dodeliti, održavajući pri tome odnose veze i rasporeda. Time dobivamo naredni stav, koji treba smatrati kao krajnji cilj izlaganja ovog odeljka:

S t a v 56. Neka su u nekoj ravnoj geometriji zadovoljene aksiome I_{1-3}, II, IV^*; tada je važenje Dezargovog stava potreban i dovoljan uslov za to, da se ova ravna geometrija može smatrati kao deo prostorne geometrije, u kojoj su zadovoljene sve aksiome I, II, IV^*.

Tako se Dezargov stav za ravnu geometriju može u izvesnom smislu karakterisati kao rezultat eliminacije prostornih aksioma.

Nadjeni rezultati takodje nam omogućavaju da uvidimo da se svaka prostorna geometrija, u kojoj su zadovoljene sve aksiome I, II, IV^*, može uvek shvatiti kao deo neke „geometrije od proizvoljno mnogo dimenzija"; pri tome treba da se pod geometrijom sa proizvoljno mnogo dimenzija razume ukupnost tačaka, pravih i ravni i još drugih elemenata, za koje su zadovoljene na odgovarajući način proširene aksiome veze, rasporeda, kao i aksioma paralelnih.

Šesta glava

Paskalov stav

§31. Dva stava o mogućnosti dokaza Paskalovog stava

Kao što je već pomenuto, Dezargov stav (stav 53) se može dokazati iz aksioma I, II, IV^*, tj. koristeći bitno prostorne aksiome, no bez upotrebe aksioma podudarnosti; pokazao sam u §23, da se ovaj stav ne može dokazati bez prostornih aksioma grupe I i bez aksioma podudarnosti III, čak ako se i dopusti upotreba aksioma neprekidnosti.

U §14 smo izveli Paskalov stav, a u §22 i Dezargov stav, iz aksioma I_{1-3}, $II - IV$, dakle bez prostornih aksioma, no koristeći se bitno aksiomama podudarnosti. Nastaje pitanje da li se može dokazati i Paskalov stav, oslanjajući se na prostorne aksiome veze, a ne koristeći se aksiomama podudarnosti. Naše ispitivanje će pokazati da se Paskalov stav u ovom pogledu potpuno razlikuje od Dezargovog stava, jer pri dokazu Paskalovog stava je od odlučujućeg značaja za njegovo važenje usvajanje ili isključenje Arhimedove aksiome. Pošto u ovoj glavi uopšte nisu pretpostavljene aksiome podudarnosti,to se u njoj mora uzeti za osnovu Arhimedova aksioma u narednoj formulaciji:

V_1^* (Arhimedova aksioma za račun dužima). Neka su date na pravoj g duž a i dve tačke A i B. Tada se uvek može naći neki broj tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, tako da tačka B leži izmedju tačaka A i A_n i da su duži AA_1,A_1A_2,$\ldots$,$A_{n-1}A_n$ jednake duži a u smislu računa dužima, koji se može uvesti na pravoj g prema §24,na osnovu aksioma I, II, IV^* i Dezargovog stava. Glavne rezultate ovog ispitivanja obuhvatićemo u dva naredna stava:

Stav 57. Paskalov stav (stav 40) se može dokazati na osnovu aksioma I, II, IV^*, V_1^*, tj. isključujući aksiome podudarnosti, a oslonjajući se na Arhimedovu aksiomu.

Stav 58. Paskalov stav (stav 40) se ne može dokazati na osnovu aksioma I, II, IV^*, tj. kad se isključe i aksiome podudarnosti i Arhimedova aksioma.

U formulaciji ova dva stava, na osnovu opšteg stava 56, mogu se prostorne aksiome I_{4-8} zameniti i zahtevom ravne geometrije da važi Dezargov stav(stav 53).

§32. Komutativni zakon množenja u Arhimedovom brojnom sistemu

Dokazi stavova 57 i 58 zasnivaju se bitno na izvesnim uzajamnim odnosima, koji postoje za pravila računa i osnovne činjenice aritmetike i čije je upoznavanje i samo po sebi od interesa. Utvrdićemo tačnost ova dva stava:

S t a v 59. U Arhimedovom brojnom sistemu je komutativni zakon množenja nužna posledica ostalih zakona računa, to znači, ako brojni sistem ima osobine 1-11, 13-17, nabrojane u §13, onda nužno sledi da u njemu važi i formula 12.

D o k a z. Najpre primetimo: ako je a proizvoljan broj našeg brojnog sistema i ako je

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1$$

pozitivan ceo racionalan broj, onda za a i n uvek važi komutativni zakon množenja; naime biće

$$an = a(1 + 1 + \ldots + 1) = a \cdot 1 + a \cdot 1 + \ldots + a \cdot 1$$

i isto tako

$$na = (1 + 1 + \ldots + 1)a = 1 \cdot a + 1 \cdot a + \ldots + 1 \cdot a.$$

Neka medjutim, nasuprot našem tvrdjenju, postoje dva broja a, b u našem brojnom sistemu za koje ne važi komutativni zakon množenja. Tada smemo, što se lako vidi, da napravimo ove pretpostavke:

$$a > 0, b > 0, ab - ba > 0.$$

Na osnovu zahteva 5 u §13 postoji broj $c(> 0)$, tako da je

$$(a + b + 1)c = ab - ba.$$

Najzad odaberimo broj d koji bi istovremeno zadovoljavao nejednačine

$$d > 0, d < 1, d < c,$$

i označimo sa m i n dva cela racionalna broja ≥ 0 za koja je

$$md < a \leq (m + 1)d$$

odn.

$$nd < b \leq (n + 1)d.$$

Postojanje ovih brojeva m, n jeste neposredna posledica Arhimedovog stava (stav 17 u §13). S obzirom na primedbu u početku ovog dokaza, dobićemo iz poslednjih nejednačina množenjem:

$$ab \leq mnd^2 + (m + n + 1)d^2,$$

$$ba > mnd^2,$$

i oduzimanjem

$$ab - ba < (m + n + 1)d^2.$$

Sad je

$$md < a, nd < b, d < 1$$

i zato

$$(m + n + 1)d < a + b + 1,$$

tj.

$$ab - ba < (a + b + 1)d$$

ili zbog $d < c$

$$ab - ba < (a + b + 1)c.$$

Ova poslednja nejednačina protivureči odredbi broja c, a time je stav 59 dokazan.

§33. Komutativni zakon množenja u ne-arhimedovom brojnom sistemu

S t a v 60. Za ne-arhimedov brojni sistem komutativni zakon množenja nije nužna posledica ostalih zakona računa; to znači, postoji brojni sistem koji ima u §13 nabrojane osobine 1-11,13-16-Dezargov brojni sistem prema §28-, u kome ne važi komutativni zakon množenja (12).

D o k a z. Neka je t parametar, a T ma koji izraz sa konačnim ili beskonačnim brojem članova oblika:

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + \dots ;$$

neka u njemu $r_0 (\neq 0), r_1, r_2, \dots$ znače proizvoljne racionalne brojeve i neka je n proizvoljan ceo racionalan broj $< (>, =) 0$. Području ovih izraza T dodajmo broj 0. Dva izraza oblika T nzivaju se tada jednakim ako su u njima svi brojevi $n, r_0, r_1, r_2 \dots$ jednaki medju sobom po dva i dva. Dalje, neka je s drugi parametar, a S ma koji izraz sa konačnim ili beskonačnim brojem članova oblika:

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \dots ;$$

neka u njemu $T_0 (\neq 0), T_1, T_2, \dots$ označavaju proizvoljne izraze oblika T, a neka je m opet proizvoljan ceo racionalan broj $> (=, <) 0$. Ukupnost svuh izraza oblika S, kome je još dodata o, smatraćemo kao kompleksni brojni sistem $\Omega(s, t)$, u kome ćemo postaviti naredna pravila računa.

Pre svega sa samim parametrima s i t računaćemo po pravilima 7-11 iz §13, dok ćemo mesto pravila 12 stalno primenjivati obrazac (1)

$$ts = 2st.$$

Lako se uveravamo da je ova postavka neprotivurečna.

Ako su sad $S^{'}, S^{''}$ dva ma koja izraza oblika S:

$$S^{'} = s^{m'}T_0' + s^{m'+1}T_1' + s^{m'+2}T_2' + \dots,$$

$$S^{''} = s^{m''}T_0^{''} + s^{m''+1}T_1^{''} + s^{m''+2}T_2^{''} + \dots,$$

može se, očigledno, sabiranjem član po član obrazovati novi izraz $S' + S$", koji je opet oblika S i koji je istovremeno jednoznačno odredjen; ovaj se izraz $S' + S''$ naziva zbirom brojeva predstavljenih izrazima S' i S''.

Običnim formalnim moženjem član po član oba izraza S', S'', dolazimo najpre do izraza oblika:

$$S'S^{''} = s^{m'}T_0's^{m''}T_0^{''} + (s^{m'}T_0's^{m''+1}T_1^{''} + s^{m'+1}T_1's^{m''}T_0^{''}) +$$

$$+(s^{m'}T_0's^{m''+2}T_2^{''} + s^{m'+1}T_1's^{m''+1}T_1^{''} + s^{m'+2}T_2's^{m''}T_0^{''}) + \dots$$

Ovaj izraz, ako upotrebimo formulu (1), postaje, očigledno, jednoznačno odredjen izraz oblika S; poslednji će se nazvati proizvodom broja predstavljenog sa S' i broja predstavljenog sa S''.

Pri tako postavljenom načinu računa neposredno jasno je važenje pravila računa 1-4 i 6-11 u §13. Takodje nije teško uvideti važenje pravila 5 u §13. Radi toga pretpostavimo da su npr.

$$S^{'} = s^{m'}T_0' + s^{m'+1}T_1' + s^{m'+2}T_2' + \dots$$

i

$$S^{''''} = s^{m''''}T_0^{''''} + s^{m''''+1}T_1^{''''} + s^{m''''+2}T_2^{''''} + \dots$$

dati izrazi oblika S i primetimo da, saglasno našim postavkama, prvi koeficijent r_0' iz T_0' mora biti različit od nule. Uporedjujući sada iste stepene od s na obema stranama jednačine

$$(2) S^{'}S^{''} = S^{'''},$$

nalazimo na jednoznačno odredjen način najpre ceo broj $m^{''}$ kao izložilac, a zatim takve izraze

$$T_0^{''}, T_1^{''}, T_2^{''}, \dots$$

tako da izraz

$$S^{''} = s^{m''}T_0^{''} + s^{m''+1}T_1^{''} + s^{m''+2}T_2^{''} + \dots$$

zadovoljava jednačinu (2) pri upotrebi obrasca (1). Slično važi za jednačinu

$$S^{'''}S^{'} = S^{''''}.$$

Ovim je traženi dokaz izveden.

Najzad, da bismo omogućili raspored brojeva našeg brojnog sistema $\Omega(s,t)$, usvojimo ove postavke: za neki broj ovog sistema se kaže da je $<$ ili >0, prema tome da li je u izrazu S koji ga predstavlja prvi koeficijent r_0 od $T_0 <$ ili > 0. Ako su data ma koja dva broja a i b tog kompleksnog brojnog sistema,onda se kaže da je $a < b$ odn. $a > b$, prema tome da li je $a - b <$ ili > 0. Neposredno je jasno da pri ovim postavkama takodje važe pravila 13-16 u §13, tj. da je $\Omega(s,t)$ Dezargov brojni sistem (up. §28).

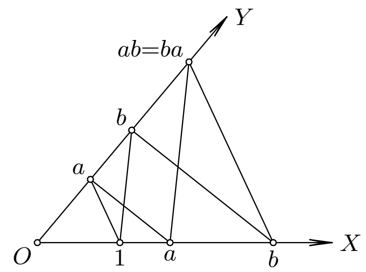
Pravilo 12 u §13, što pokazuje jednačina (1), nije zadovoljeno u našem kompleksnom brojnom sistemu $\Omega(s,t)$, a time je potpuno dokazna tačnost stava 60.

U saglasnosti sa stavom 59, ne važi Arhimedov stav (stav 17 §13) za maločas postavljeni brojni sistem $\Omega(s,t)$.

§34. Dokaz oba stava o Paskalovom stavu (Nepaskalska geometrija)

Ako su u prostornoj geometriji zadovoljene sve aksiome I, II, IV^*, onda u toj geometriji važi i Dezargov stav (stav 53) i stoga je, prema poslednjem stavu u §28, u toj geometriji moguće na svakom paru pravih koje se seku uvesti račun dužima, za koji važe pravila 1-11, 13-16 u §13.

Pretpostavimo li pak Arhimedovu aksiomu V_1^* u našoj geometriji, onda očigledno za segmentni račun važi Arhimedov



stav (stav 17 u §13), a stoga, prema stavu 59, važi i komutativni zakon množenja. Iz figure koja je sa strane neposredno je jasno da komutativni zakon množenja ne predstavlja ništa drugo do Paskalov stav za obe ose. Time je tačnost stava 57 dokazana.

Da bismo dokazli stav 58, uočimo Dezargov brojni sistem $\Omega(s,t)$ uveden u §33, konstruišimo pomoću ovog sistema prostornu geometriju na način opisan u §29, u kojoj su zadovoljene sve aksiome I, II, IV^*. Pa ipak Paskalov stav ne važi u ovoj geometriji, pošto komutativni zakon množenja ne postoji u Dezargovom brojnom sistemu $\Omega(s,t)$. Tako izgradjena „nepaskalska"geometrija,u saglasnosti sa malopre dokazanim stavom 57, nužno je u isto vreme i „ne-arhimedska"geometrija.

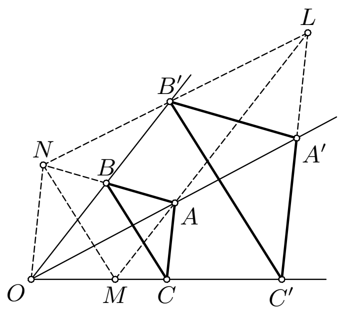
Očigledno da se Paskalov stav ne može dokazati pri našim pretpostavkama ni tada kad se prostorna geometrija shvati kao deo geometrije od proizvoljno mnogo dimenzija, u kojoj osim tačaka, pravih i ravni postoje i drugi elementi koji su zasnovani na odgovarajućem sistemu aksioma veze i rasporeda, kao i na aksiomi paralelnih.

§35. Dokaz proizvoljnog stava o tačkama preseka pomoću Paskalovog stava

Dokažimo najpre važnu činjenicu:

S t a v 61. Dezargov stav (stav 53) se može dokazati iz Paskalovog stava (stav 40) samo pomoću aksioma I_{1-3} ,II, IV^*, dakle, bez pomoći aksioma podudarnosti i aksioma neprekidnosti.

D o k a z.Očigledno da oba delimična iskaza iz kojih se sastoji stav 53 neposredno slede jedan iz drugog. Dovoljno je, dakle, dokazati napr. Drugi iskaz stava 53. Izvešćemo dokaz uz izvesne sporedne pretpostavke. Neka su dva trougla ABC i $A'B'C'$ tako položena da linije koje spajaju odgovarajuća temena prolaze kroz jednu



tačku O i neka je, dalje, prava AB paralelna sa $A'B'$, a prava AC paralelna sa $A'C'$. Pretpostavimo, dalje, da ni prave OB' i $A'C'$ ni prave OC' i $A'B'$ nisu medju sobom paralelne.

Povucimo onda kroz tačku A paralelnu prema OB' koju preseca prava $A'C'$ u nekoj tački L, a prava OC' u nekoj tački M. Neka, dalje, prava LB' nije paralelna ni prema OA, ni prema OC. Prave AB i LB' sigurno nisu paralelne, tj. one se seku u nekoj tački N, koju ćemo spojiti sa tačkama M i O.

Prema konstrukciji može se Paskalov stav primeniti na konfiguraciju $ONALA'B'$ i tako se može doznati da je ON paralelno sa $A'L$, pa zato paralelno i prema CA. Sada se Paskalov stav može primeniti i na konfiguracije $ONMACB$ i $ONMLC'B'$ i dobiti da je MN paralelno kako prema CB, tako i prema $C'B'$. Dakle, strane CB i $C'B'$ su zaista medju sobom paralelne.

Sporedne pretpostavke učinjene pri dokazu, dadu se sada redom odstraniti. Ovde ćemo izostaviti dokaz ovog svodjenja.

Neka je sad data ravna geometrija u kojoj, osim aksioma I_{1-3} ,II, IV^*, važi Paskalov stav. Stav 61 uči da u ovoj geometriji važi i Dezargov stav. Zato možemo, prema §24, u nju uvesti račun dužima i u ovom računu dužima važi, prema §34, zajedno sa Paskalovim stavom i komutativni zakon množenja, tj. važe u njemu svi zakoni računa 1-12 u §13.

Nazovemo li figuru koja odgovara sadržini Paskalovog odn. Dezargovog stava, Paskalovom odn. Dezargovom konfiguracijom, onda možemo rezultat §§24-26 i 34 ovako rezimirati: svaka primena računskih zakona (stav 1-12 u §13) u našem segmentnom računu pokazuje se kao kombinacija konačnog broja Paskalovih ili Dezargovih konfiguracija; a kako se Dezargova konfiguracija, shodno dokazu stava 61, može predstaviti konstrukcijom podesnih pomoćnih tačaka i pomoćnih pravih kao kombinacija Paskalovih konfiguracija, to se svaka primena pomenutih zakona računa pokazuje u našem računu dužima kao kombinacija konačno mnogo Paskalovih konfiguracija.

Prema §27 i na osnovu komutativnog zakona množenja u ovom računu dužima tačku predstavlja par realnih brojeva (x, y), a pravu odnos triju realnih brojeva $(u : v : w)$, od kojih dva prva ne iščezavaju istovremeno. Incidencija tačke i prave označava se jednačinom

$$ux + vy + w = 0,$$

a paralelnost pravih $(u : v : w)$ i $(u' : v' : w')$ proporcijom

$$u : v = u' : v'.$$

Neka u datoj geometriji postoji sada čist stav o presečnim tačkama. Pod čistim stavom o presečnim tačkama razumemo ovde stav koji sadrži neki iskaz o incidenciji tačaka i pravih i o paralelnosti pravih, pri čemu se ne iskorišćavaju drugi odnosi, kao napr. podudarnost ili upravnost. Svaki takav čist stav o tačkama preseka ravne geometrije može se svesti na naredni oblik:

Neka se najpre proizvoljno odabere sistem od konačno mnogo tačaka i pravih; zatim neka se povuku, na ranije propisani način, prema izvesnim od ovih pravih proizvoljne paralelne, neka se odaberu na izvesnim pravima proizvoljne tačke i povuku kroz izvesne tačke proizvoljne prave; ako se tada na propisani način konstruišu spojne prave, presečne tačke kao i paralelne kroz već postojeće tačke, dolazi se najzad do odredjenog sistema konačno mnogo pravih, o kojima stav iskazuje da one prolaze kroz istu tačku odn. da su paralelne.

Koordinate tačaka i pravih, koje smo najpre sasvim proizvoljno odabrali, posmatraćemo kao parametre $p_1, \ldots, p_n$; neke koordinate tačaka i pravih,odabranih zatim sa ograničenom proizvoljnošću, mogu se posmatrati kao dalji parametri $p_{n+1}, \ldots, p_r$,a ostale njihove koordinate će biti izražene parametrima $p_1, \ldots, p_r$. Koordinate svih spojnih pravih, presečnih tačaka i paralelnih, koje se sada dalje konstruišu, biće izrazi $A(p_1, \ldots, p_r)$ racionalno zavisni od ovih parametara. Iskaz datog stava o presečnim tačkama svodi se na tvrdjenje da izvesni takvi izrazi za iste vrednosti parametara daju iste vrednosti; to znači, stav o presečnim tačkama iskazuje da da odredjeni izrazi $R(p_1, \ldots, p_r)$, racionalno zavisni od parametara $p_1, \ldots, p_r$, uvek isčezavaju kad se mesto ovih parametara unesu ma kakvi elementi segmentnog računa, uvedenog u datu geometriju. Pošto je područje ovih elemenata beskonačno, to zaključujemo, prema poznatom stavu algebre da izrazi $R(p_1, \ldots, p_r)$, na osnovu zakona računa 1-12 u §13, moraju identično iščeznuti. Ali, da bismo u našem računu dužima dokazali identično isčezavanje izraza $R(p_1, \ldots, p_r)$ dovoljna je, prema onom što je gore dokazano za primenu zakona računa, primena Paskalovog stava. Tako dolazimo do narednog stava:

S t a v 62. Svaki čist stav o tačkama preseka koji važi u ravnoj geometriji, u kojoj važe aksiome I_{1-3}, II, IV^* i Paskalov stav, pokazuje se konstrukcijom podesnih pomoćnih tačaka i pomoćnih pravih kao kombinacija konačno mnogo Paskalovih konfiguracija.

Za dokaz tačnosti stava o presečnim tačkama nije potrebno, dakle, kad se upotrebi Paskalov stav, pribegavati aksiomama podudarnosti i neprekidnosti.

Sedma glava

Geometrijske konstrukcije na osnovu aksioma $I - IV$

§36. Geometrijske konstrukcije pomoću lenjira i prenosioca duži

Neka je data prostorna geometrija u kojoj važe sve aksiome $I - IV$; u ovoj glavi radi veće uprošćenosti, uočićemo samo ravnu geometriju koja je sadržana u ovoj prostornoj geometriji i tada ćemo razmotriti pitanje koji se elementarni konstruktivni zadaci (pretpostavljajući podesna praktična sredstva) mogu izvesti.

Na osnovu aksioma I, II, IV uvek se može rešiti naredni zadatak:

Z a d a t a k 1. Spojiti dve tačke pravom i naći presečnu tačku dveju pravih, u slučaju da prave nisu paralelne.

Na osnovu aksioma podudarnosti III moguće je prenošenje duži i uglova, tj. u datoj geometriji mogu se rešiti ovi zadaci:

Z a d a t a k 2. Preneti datu duž na datu pravu od neke tačke a sa date strane od te tačke.

Z a d a t a k 3. Preneti dati ugao na datu pravu u datoj tački sa date strane od te prave ili konstruisati pravu koja datu pravu seče u datoj tački pod datim uglom.

Vidimo da se, ako se uzmu za osnovu aksiome $I - IV$, mogu rešiti samo oni konstruktivni zadaci koji se mogu svesti na gore pomenute zadatke 1-3.

Osnovnim zadacima 1-3 dodaćemo još ova dva:

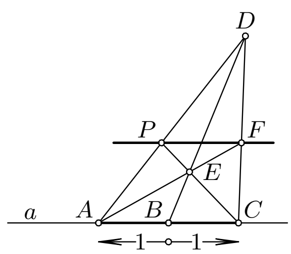
Z a d a t a k 4. Kroz datu tačku povući paralelnu prema datoj pravoj.

Z a d a t a k 5. Povući normalu na datu pravu.

Neposredno vidimo da se oba ova zadatka mogu rešiti na razne načine pomoću zadataka 1-3.

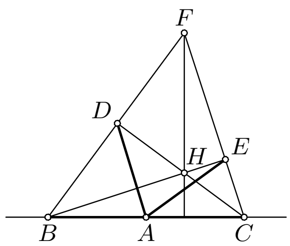
Za izvodjenje zadatka 1, potreban nam je lenjir. Da bismo izveli zadatke 2-5, dovoljno je, što će u narednim izlaganjima biti pokazano, pored lenjira primeniti prenosilac duži-instrument koji omogućava prenošenje jedne jedine odredjene duži, napr. jedinične duži. Na taj način dolazimo do ovog rezultata:

S t a v 63. Oni geometrijski konstruktivni zadaci koji se mogu rešiti na osnovu aksioma $I - IV$ dadu se rešiti pomoću lenjira i prenosioca duži.



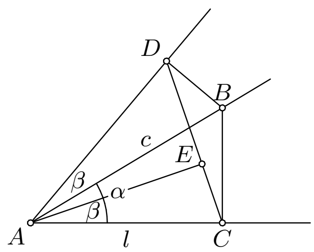
D o k a z. Da bismo izveli zadatak 4, spojimo datu tačku P ma kojom tačkom A date prave a i prenesimo jediničnu duž pomoću prenosioca duži na pravu a od tačke A dva puta jedno za drugim, recimo prvo do tačke B, a zatim od B do C. Neka je sad D ma koja tačka na AP koja je različita od A i P i da pri tome BD nije paralelno sa PC. Tada se prave CP i BD presecaju u tački E, a prave AE i CD u tački F. PF je prema Štajneru (*Steiner*) tražena paralelna prema pravoj a.

Zadatak 5 ćemo rešiti na sledeći način. Neka je A tačka date prave; tada prenosimo pomoću prenosioca duži na ovu pravu sa obe strane od tačke A jedinične duži AB i AC i zatim odredimo na dvema proizvoljnim drugim pravima, koje prolaze kroz tačku A, tačke E i D tako da i duži AD i AE budu jednake jediničnoj duži. Prave BD i CE seku se u tački F, prave BE i CD u tački H, a prava FH je tražena normala. Ustvari, uglovi $\angle BDC$ i $\angle BEC$ su kao uglovi u polukrugu nad BC, pravi, i zato će, prema stavu o presečnoj tački visina kod trougla, koji primenjujemo na trougao BCF, i prava FH biti normalna na BC.



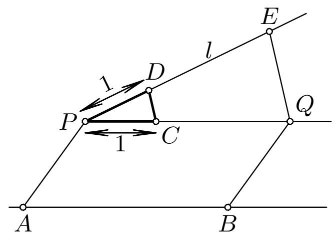
Na osnovu zadataka 4 i 5 uvek je moguće spustiti upravnu na datu pravu a iz date tačke D koja ne leži na njoj ili na nju podići normalu u tački koja leži na njoj.

Sad možemo i zadatak 3 lako rešiti samo pomoću lenjira i prenosioca duži; upotrebićemo, na primer naredni postupak koji zahteva samo povlačenje paralelnih i spuštanje normala: neka β bude ugao koji se prenosi i A teme ovog ugla.



Povucimo kroz tačku A pravu l paralelno prema datoj pravoj, na koju treba preneti dati ugao β. Iz proizvoljne tačke B jednog kraka ugla β spustimo normale na drugi krak ugla β i na pravu l. Neka su podnožja ovih normala D i C. Tačke C i D se razlikuju jedna od druge, a tačka A ne leži na pravoj CD. Stoga možemo iz tačke A spustiti normalu na CD; neka je njeno podnožje E. Prema dokazu izvedenom na str. 44 biće $\angle CAE = \beta$. Ako tačku B izaberemo na drugom kraku datog ugla,tačka E pada na drugu stranu prave l. Kroz datu tačku na datoj pravoj povucimo paralelnu prema AE; time je rešen zadatak 3.

Da bismo, najzad, rešili zadatak 2, iskoristimo narednu prostu konstrukciju koju je dao Kiršak. Neka je AB duž koju treba preneti, a P data tačka na pravoj l. Neka se povuče kroz tačku P paralelna prema AB i prenese pomoću prenosioca duži na nju od tačke P, na onu stranu od AP, na kojoj leži tačka B, jedinična duž, recimo do C; dalje, preneti na pravu l od tačke P sa date strane jediničnu duž do tačke D.



Neka prava povučena kroz B paralelno prema AP preseca pravu PC u tački Q, a prava povučena paralelno prema CD kroz tačku Q preseca pravu l u tački E. Tada je $PE = AB$. U slučaju da se prava l poklapa sa PQ, a tačka Q ne leži na datoj strani, treba konstrukciju na prost način proširiti.

Tako je pokazano da se svi zadaci 1-5 mogu rešiti lenjirom i prenosiocem duži i, stoga je, stav 63 potpuno dokazan.

§37. Kriterijum za izvodljivost geometriskih konstukcija pomoću lenjira i prenosioca duži

Osim elementarnih geometrijskih zadataka obradjenih u §36, postoji još veliki broj drugih zadataka za čije je rešenje potrebno samo povlačenje i prenošenje duži. Da bismo mogli pregledati oblast svih zadataka koji se mogu rešiti na ovaj način, uzmimo za osnovu daljih posmatranja pravougli koordinatni sistem i zamislimo koordinate tačaka na običan način-kao realne brojeve ili funkcije izvesnih proizvoljnih parametara. Da bismo odgovorili na pitanje o ukupnosti svin tačaka koje se na ovaj način mogu konstruisati, pribeći ćemo ovom razmišljanju.

Neka je dat sistem odredjenih tačaka; obrazujmo od koordinata ovih tačaka područje racionalnosti R; ono sadrži izvesne realne brojeve i izvesne proizvoljne parametre p. Zamislimo sada ukupnost svih onih tačaka koje se mogu konstruisati od datog sistema tačaka povlačenjem pravih i prenošenjem duži. Područje, obrazovano od koordinata ovih tačaka, nazvaćemo $\Omega(R)$; ono sadrži izvesne realne brojeve i funkcije proizvoljnih parametara p.

Naša posmatranja u §17 pokazuju da se povlačenje pravih i paralelnih svodi analitički na primenu sabiranja, množenja, oduzimanja i deljenja duži; dalje, poznata formula za obrtanje, postavljena u §9, uči da prenošenje duži na proizvoljnu pravu ne zahteva nikakvu drugu analitičku operaciju osim izvlačenja kvadratnog korena iz zbira dva kvadrata čije su osnove već konstruisane.

Obrnuto, na osnovu Pitagorine teoreme pomoću pravouglog trougla može se uvek konstruisati kvadratni koren iz zbira dvaju segmentnih kvadrata prenošenjem duži.

Iz ovih posmatranja sledi da područje $\Omega(R)$ sadrži sve one i samo takve realne brojeve i funkcije parametra p koji proizilaze iz brojeva i parametara u području R primenom konačno puta pet računskih operacija, naime četiri elementarne operacije računa i pete operacije, koja se smatra kao izvlačenje kvadratnog korena iz zbira dva kvadrata. Ovaj rezultat ćemo izraziti ovako:

S t a v 64. Jedan geometrijski konstruktivni zadatak može se tada i samo tada rešiti povlačenjem pravih i prenošenjem duži, tj. pomoću lenjira i prenosioca duži, ako su pri analitičkoj obradi zadatka koordinate traženih tačaka takve funkcije koordinata datih tačaka čije izražavanje zahteva samo racionalne operacije i operaciju izvlačenja kvadratnog korena iz zbira dva kvadrata - i to samo konačan broj primena ovih pet operacija.

Iz ovog stava odmah možemo uvideti da se ne može svaki zadatak koji se rešava šestarom,rešiti samo lenjirom i prenosiocem duži. Radi toga podjimo od one geometrije koja je izgradjena u §9 pomoću algebarskog brojnog područja Ω; u ovoj geometriji postoje isključivo takve duži koje se mogu konstruisati pomoću lenjira i prenosioca duži, naime duži odredjene brojevima područja Ω.

Ako je sad ω ma koji broj područja Ω, to lako doznajemo iz definicije područja Ω da se i svaki algebarski broj, konjugovan sa ω, mora nalaziti u području Ω, a pošto su brojevi područja Ω, očigledno, svi realni, odatle sledi da područje Ω može sadržati samo takve realne algebarske brojeve,čiji su konjugovani brojevi isto tako realni, tj. brojevi područja Ω su potpuno stvarni.

Postavimo sada zadatak da se konstruiše pravougli trougao čija je hipotenuza 1 i jedna kateta $|\sqrt{2}| - 1$. Medjutim, algebarski broj $\sqrt{2|\sqrt{2}| - 2}$, koji izražava brojnu vrednost druge katete, ne nalazi se u brojnoj oblasti Ω, pošto je njemu konjugovan broj $\sqrt{-2|\sqrt{2}| - 2}$ imaginaran. Prema tome, postavljeni se zadatak ne može rešiti u takvoj geometriji i zato se ne može uopšte rešiti pomoću lenjira i prenosioca duži, mada je konstrukcija pomoću šestara neposredno izvodljiva.

Naše posmatranje se može takodje obrnuti, tj. važi stav:

Svaki potpuno stvarni broj leži u području Ω. Zato se svaka duž, odredjena potpuno realnim brojem, može konstruisati pomoću lenjira i prenosioca duži. Dokaz ovog stava dobijamo iz opštijeg posmatranja. Naime, može se naći kriterijum koji, za geometrijske konstruktivne zadatke rešive pomoću lenjira i šestara, dopušta da se proceni iz analitičke prirode zadatka i njihovih rešenja da li je konstrukcija izvodljiva i samo pomoću lenjira i prenosioca duži. Ovo daje naredni stav:

S t a v 65. Neka je dat geometrijski konstruktivni zadatak takve vrste da se pri njegovom analitičkom rešenju koordinate traženih tačaka mogu dobiti iz koordinata datih tačaka jedino pomoću racionalnih operacija i pomoću izvlačenja kvadratnog korena; neka je n najmanji broj kvadratnih korena koji su pri tome dovoljni za izračunavanje koordinata tačaka; tada je, da bi dati konstruktivni zadatak mogao biti rešen samo povlačenjem pravih i prenošenjem duži potrebno i dovoljno da taj geometrijski zadatak pri uvodjenju beskonačno udaljenih elemenata ima tačno 2^n realnih rešenja, i to za sve položaje datih tačaka, tj. za sve vrednosti proizvoljnih parametara koji se javljaju u koordinatama datih tačaka.

Na osnovu razmatranja izvedenih u početku ovog paragrafa, neposredno je jasno da je postavljeni kriterijum potreban. Tvrdjenje da je taj kriterijum i dovoljan, svodi se na ovaj aritmetički stav:

S t a v 66. Neka je funkcija $f(p_1, \ldots, p_n)$ obrazovana od parametara $p_1, \ldots, p_n$ pomoću racionalnih operacija i izvlačenja kvadratnog korena. Ako ova funkcija za svaki realni sistem vrednosti parametara predstavlja potpuno stvaran broj, to ona pripada području Ω, koje se dobiva polazeći od $1, p_1, \ldots, p_n$ pomoću elementarnih operacija računa i izvlačenja kvadratnog korena iz zbira dva kvadrata. Prethodno ćemo primetiti da se u definiciji područja $\Omega(R)$ može odstraniti ograničenje na dvočlani zbir kvadrata.

Ustvari, formule

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2+d^2}$$

pokazuju da se uopšte izvlačenje kvadratnog korena iz zbira proizvoljno mnogo kvadrata uvek može svesti na ponovljeno izvlačenje kvadratnog korena iz zbira dva kvadrata.

Shodno tome, posmatrajući područja racionalnosti koja se javljaju pri konstrukciji funkcije $f(p_1, \ldots, p_n)$ jedno za drugim sukcesivnim dodavanjem kvadratnih korena koji ulaze u tu funkciju, dovoljno je dokazati da radikand svakog od ovih korena predstavlja zbir kvadrata u prethodnom području racionalnosti. Pri ovom dokazu oslonićemo se na ovaj algebarski stav:

S t a v 67. Svaka racionalna funkcija $\rho(p_1, \ldots, p_n)$ sa racionalnim koeficijentima koja za realne vrednosti parametara nikada ne postaje negativna, može se predstaviti kao zbir kvadrata racionalnih funkcija promenljivih $p_1, \ldots, p_n$ sa racionalnim koeficijentima.

Ovom ćemo stavu dati ovu formulaciju:

S t a v 68. U području racionalnosti odredjenom sa $1, p_1, \ldots, p_n$ svaka funkcija koja nije nikad negativna, tj. ni za jedan realni sistem vrednosti promenljivih, zbir je kvadrata.

Neka je sad data funkcija $f(p_1, \ldots, p_n)$ sa osobinama navedenim u stavu 66. Proširimo poslednje tvrdjenje na ona područja koja se dobivaju sukcesivnim dodavanjem onih kvadratnih korena koji su potrebni za izgradjivanje funkcije f. Za ova područja važi da se svaka funkcija koja zajedno sa svojom konjugovanom funkcijom nije nikad negativna može predstaviti kao zbir kvadrata dotičnog područja.

Dokaz ćemo izvesti potpunom indukcijom. Posmatrajmo najpre oblast koja proizilazi iz R dodavanjem jednog kvadratnog korena koji je najdublje u funkciji. Potkorena količina ovog kvadratnog korena je racionalna funkcija $f_1(p_1, \ldots, p_n)$. Neka je $f_2(p_1, \ldots, p_n)$ funkcija iz područja $(R, \sqrt{f_1})$ dobivenog dodavanjem, koja sa svojom konjugovanom funkcijom nikada ne dobiva negativnu vrednost i takodje ne iščezava identično; ova funkcija ima oblik $a+b\sqrt{f_1}$, gde su a i b, kao i f_1, racionalne funkcije. Iz pretpostavki učinjenih u odnosu na f_2 sledi, da zbir φ i proizvod ψ funkcija $a+b\sqrt{f_1}, a-b\sqrt{f_1}$ nikada ne dobivaju negativnu vrednost. Funkcije

$$\varphi = 2a, \psi = a^2 - b^2 f_1$$

su, povrh toga, racionalne, dakle mogu se predstaviti, prema stavu 68, kao zbir kvadrata funkcija iz područja R. Osim toga φ se ne može identično anulirati.

Iz jednačine koja važi za f_2

$$f_2^2 - \varphi f_2 + \psi = 0$$

dobivamo

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi}{\varphi} = (\frac{f_2}{\varphi})^2 \cdot \varphi + \frac{\varphi\psi}{\varphi^2}.$$

Dakle, prema rečenom o φ i ψ, može se funkcija f_2 predstaviti kao zbir kvadrata funkcija iz područja $(R, \sqrt{f_1})$. Rezultat ovako dobijen za područje $(R, \sqrt{f_1})$ odgovara stavu 68, koji važi za područje R. Ponavljajući maločas primenjeni postupak pri daljim dodavanjima, doći ćemo, najzad, do rezultata da u svakom od područja, do kojih dolazimo pri konstrukciji funkcije f, svaka funkcija koja zajedno sa svojom konjugovanom funkcijom nije nikad negativna jeste zbir kvadrata funkcija dotičnog područja. Posmatrajmo sad ma koji kvadratni koren koji se javlja u f. On je, sa svojom konjugovanom funkcijom, u svakom slučaju, realan, a zato je njegova potkorena količina u području u kome se prikazuje, sa svojom konjugovanom funkcijom, funkcija koja nije nikad negativna i, prema tome,predstavlja se u ovom području kao zbir kvadrata. Prema tome stav 66 je dokazan; navedeni kriterijum u stavu 65 je, dakle, i dovoljan.

Kao primer za primenu stava 65 mogu služiti pravilni mnogougli koji se mogu konstruisati pomoću šestara; u ovom slučaju se ne javlja proizvoljni parametar p; svi izrazi koje treba konstruisati predstavljaju algebarske brojeve. Lako se vidi da je kriterijum stava 65 zadovoljen i, prema tome, dobija se da se ovi pravilni mnogougli mogu konstruisati i samo pomoću povlačenja pravih i prenošenja duži-rezultat koji se može i direktno izvesti iz teorije deobe kruga.

Što se tiče drugih poznatih konstruktivnih zadataka elementarne geometrije, neka je ovde samo pomenuto da se Malfatijev ($Malfatti$) problem može rešiti samo pomoću lenjira i prenosioca duži, ali ne i Apolonijev zadatak o dodiru kruga.

Zaključak

Ovaj rad predstavlja kritičko istraživanje principa geometrije; u ovom istraživanju rukovodili smo se načelom da svako pitanje koje se pojavi raspravimo tako da pri tome ispitamo da li se na njega može dobiti odgovor na prethodno propisanom putu sa izvesnim ograničenim sredstvima.

Ovo načelo sadrži, izgleda mi, opšte i prirodno pravilo; ustvari, kada mi pri našim matematičkim ispitivanjima naidjemo na neki problem ili pretpostavljamo tačnost nekog stava, naš nagon za saznanjem je tek tada zadovoljen kad nam uspe ili da potpuno rešimo taj problem i strogo dokažemo ovaj stav, ili tada ako jasno saznamo razlog zašto se ne može uspeti, a time istovremeno uvidimo i nužnost neuspeha.

Tako u modernoj matematici pitanje o nemogućnosti izvesnih rešenja ili problema igra vidnu ulogu i težnja da se odgovori na ovakvo pitanje često je bila povod za otkriće novih i plodnih oblasti ispitivanja. Setimo se samo Abelovog (*N. H. Abel*) dokaza za nemogućnost rešenja jednačina petog stepena pomoću izvlačenja korena, dalje, saznanja o nemogućnosti dokaza aksiome paralelnih, najzad Ermitovih (*Hermite*) i Lindemanovih (*Lindemann*) stavova o nemogućnosti konstrukcije brojeva e i π algebarskim putem.

Načelo pomoću koga treba svuda raspraviti principe mogućnosti dokaza tesno je vezano i sa zahtevom „čistote"metode dokaza, zahtevom koji je od mnogih matematičara jako istican. Ovaj zahtev u osnovi nije ništa drugo do subjektivni izraz načela koga smo se ovde držali. Ustvari, cilj prethodnog geometriskog istraživanja jeste uopšte u tome da se objasni koje su aksiome, pretpostavke ili pomoćna sredstva neophodni za dokaz neke istine elementarne geometrije, i tada ostaje da se u svakom datom slučaju proceni koja metoda dokaza sa usvojenog stanovišta ima prednost.

Dodatak I

O pravoj kao najkraćem putu izmedju dveju tačaka

[Preštampano iz $Math.Ann$; knj. 46]

(Iz pisma upućenog F.Klajnu)

Ako se tačke, prave i ravni uzmu za elemente, mogu za zasnivanje geometrije služiti ove aksiome:

1. Aksiome koje se odnose na medjusobnu vezu ovih elemenata; kratko formulisane ove aksiome glase:

- Ma koje dve tačke A i B odredjuju uvek jednu pravu a.

- Ma koje tri tačke A, B, C koje leže na jednoj pravoj odredjuju jednu ravan α. Ako dve tačke A, B prave a leže u ravni α, onda prava a cela leži u ravni α.

- Ako dve ravni α, β imaju zajedničku tačku A, onda one imaju najmanje još jednu drugu zajedničku tačku B.

-Na svakoj pravoj postoje najmanje dve tačke; u svakoj ravni postoje najmanje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj, a u prostoru postoje najmanje četiri tačke koje ne leže u jednoj ravni.

2. Aksiome pomoću kojih se uvodi pojam duži i pojam rasporeda tačaka na pravoj. Ove je aksiome prvi postavio i sistematski ispitao M.Paš; uglavnom to su:

- Izmedju dveju tačaka A, B jedne prave uvek postoji najmanje jedna treća tačka C te prave.

- Od triju tačaka jedne prave uvek postoji jedna i samo jedna koja leži izmedju drugih dveju.

- Ako tačke A, B leže na pravoj a, onda uvek postoji tačka C na istoj pravoj a, tako da tačka B leži izmedju tačaka A i C.

- Ma koje četiri tačke A_1, A_2, A_3, A_4 neke prave mogu se uvek rasporediti na taj način da tačka A_i leži izmedju tačaka A_h i A_k svaki put kad je indeks h manji, a indeks k veći od indeksa i.

- Svaka prava a koja leži u ravni α, razdvaja tačke ove ravni α u dve oblasti koje imaju naredno svojstvo: ma koja tačka A jedne oblasti zajedno ma sa kojom tačkom $A^{'}$ druge oblasti odredjuju duž $AA^{'}$ koja u sebi sadrži jednu tačku prave a; naprotiv, ma koje dve tačke A i B iste oblasti odredjuju duž AB koja ne sadrži nijednu tačku prave a.

3. Aksioma neprekidnosti, kojoj dajem ovu formulaciju:

Ako je $A_1, A_2, A_3, \ldots$ beskonačni niz tačaka prave a, i B jedna druga tačka na a takve vrste da uopšte tačka A_i, leži izmedju A_h i B, svaki put kad je indeks h manji od indeksa i, onda postoji tačka C koja ima svojstvo: sve tačke beskonačnog niza $A_2, A_3, A_4, \ldots$ leže izmedju A_1 i C, a svaka druga tačka $C^{'}$, za koju ovo isto tako važi, leži izmedju C i B.

Na ovim aksiomama može se sa punom strogošću zasnovati teorija harmonijskih tačaka i ako se njom poslužimo na sličan način kao što je to činio Lindeman, doći ćemo do ovog stava:

Svakoj se tački mogu dodeliti tri konačna realna broja x, y, z, a svakoj ravni linearna relacija izmedju ova tri broja x, y, z tako da sve tačke, za koje tri broja x, y, z zadovoljavaju tu linearnu relaciju, leže u dotičnoj ravni, i obrnuto, svim tačkama koje leže u ovoj ravni odgovaraju brojevi x, y, z koji zadovoljavaju linearnu relaciju. Ako se sada x, y, z protumače kao pravougle koordinate tačke u običnom Euklidovom prostoru, tada će tačkama prvobitnog prostora odgovarati tačke unutrašnjosti nekog nigde konkavnog tela Euklidovog prostora, i obrnuto, svim unutrašnjim tačkama ovog tela koje nije nigde konkavno odgovaraće tačke našeg prvobitnog prostora: naš prvobitni prostor, prema tome, preslikan je na unutrašnjost nigde konkavnog tela Euklidovog prostora.

Pri tome se pod telom koje nije nigde konkavno ima shvatiti telo sa takvom osobinom, da, ako se dve tačke koje leže u unutrašnjosti toga tela vežu medju sobom pravom, onda deo prave koja leži izmedju ovih dveju tačaka ceo pada u unutrašnjost tela. Dozvoljavam sebi da vam obratim pažnju da ova ovde posmatrana tela, koja nisu nigde konkavna, igraju takodje važnu ulogu i u istraživanjima iz teorije brojeva H. M i n k o v s k o g i da je H. Minkovski našao za njih prostu analitičku definiciju.

Obrnuto, ako je u Euklidovom prostoru dato proizvoljno telo koje nije nigde konkavno, ono definiše odredjenu geometriju u kojoj važe sve navedene aksiome: svakoj tački u unutrašnjosti tela koje nije nigde konkavno odgovara tačka u ovoj geometriji; svakoj pravoj koja prolazi kroz unutrašnjost tela i svakoj ravni Euklidovog prostora odgovara prava odn. ravan opšte geometrije; tačkama koje leže na granici ili van tela koje nije nigde konkavno i pravima i ravnima Euklidovog prostora koji se celi prostiru van tela ne odgovaraju nikakvi elementi opšte geometrije.

Prema tome, gore pomenuti stav o preslikavanju tačaka opšte geometrije na unutrašnjost tela koje nije nigde konkavno u Euklidovom prostoru izražava ono svojstvo elemenata opšte geometrije koje je sadržajno potpuno istog značenja sa aksiomama postavljenim u početku.

Definisaćemo sada pojam dužine duži AB u našoj opštoj geometriji i označićemo u tom cilju one dve tačke Euklidovog prostora koje odgovaraju tačkama A i B prvobitnog prostora isto tako sa A i B; produžimo tada pravu AB u Euklidovom prostoru van tačaka A i B dotle dok ta prava ne pogodi granicu tela koje nije nigde konkavno u tačkama X i Y i označimo Euklidovo rastojanje izmedju ma koje dve tačke P i Q Euklidovog prostora uopšte kratko sa $\overline{PQ}$; tada ćemo realnu vrednost

$$\widehat{AB} = \log\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{YA}}\}$$

nazvati dužinom duži AB u našoj opštoj geometriji. Pošto je

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{\overline{YB}}} > 1, \frac{\overline{XB}}{\overline{\overline{XA}}} > 1;$$

ova dužina je uvek pozitivna veličina.

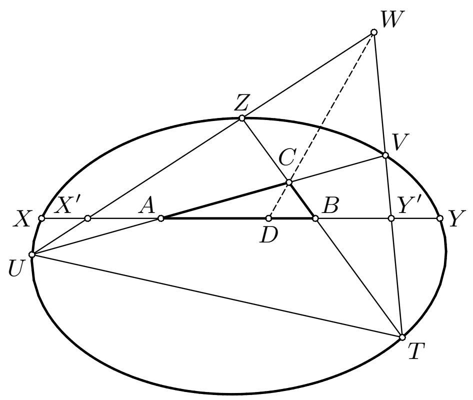
Lako se mogu nabrojati svojstva ovog pojma dužine koja nužno vode izrazu navedene vrste za $\widehat{AB}$; ipak ovo izostavljam, da ne bih suviše zamarao vašu pažnju ovim pismom.

Postavljena formula za $\widehat{AB}$ pokazuje u isto vreme na koji način ova veličina zavisi od oblika tela koje nije nigde konkavno. Ako, naime, fiksiramo tačke A i B u unutrašnjosti tela i ako menjamo samo granicu tela tako da se granična tačka X kreće prema A, a tačka Y se približava tački B, onda je jasno da će se oba količnika

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{\overline{YB}}}, \frac{\overline{XB}}{\overline{\overline{XA}}}$$

povećati pa, stoga, i vrednost $\widehat{AB}$.

Neka je sada u unutrašnjosti tela koje nije nigde konkavno dat trougao ABC. Ravan α toga trougla iseca iz tela ovalu koja nije nigde konkavna. Zamislimo dalje svaku od triju strana AB, AC, BC trougla sa obe strane produženu do preseka sa granicom ovale u tačkama X i Y, U i V, T i Z; konstruišimo tada



spojne prave linije UZ i TV i produžimo ih do preseka W; njihove presečne tačke sa pravom XY označimo sa X' odn. Y'. Uzećemo sad u ravni α za osnovu mesto prvobitne ovale koja nije nigde konkavna trougao UWT i lako ćemo uvideti da su u ravnoj geometriji odredjenoj ovim trouglom, dužine $\widehat{AC}$ i $\widehat{BC}$ iste kao i u prvobitnoj geometriji, dok se dužina strane AB povećava izvršenom promenom. Označićemo sa $\widehat{\widehat{AB}}$ novu dužinu strane AB za razliku od prvobitne dužine $\widehat{AB}$; tada je $\widehat{\widehat{AB}} > \widehat{AB}$.

Za dužine strane trougla ABC važi sada prosta relacija:

$$\widehat{\widehat{AB}} = \widehat{AC} + \widehat{BC}.$$

Da bismo to dokazali, spojimo tačke W i C pravom i produžimo ovu pravu do njenog preseka D sa AB. Tada je zbog perspektivnog položaja dva niza tačaka $X^{'}, A, D, Y^{'}$ i U, A, C, V, na osnovu poznatog stava o anharmonijskom odnosu:

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}} \frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}},$$

a usled perspektivnog položaja dva niza tačaka $Y', B, D, X^{'}$ i T, B, C, Z biće

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}} \frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.$$

Množenjem ovih dveju jednačina dobija se

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}} \frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}},$$

a ova poslednja jednačina dokazuje moje tvrdjenje.

Iz gornjeg istraživanja saznajemo da, isključivo na osnovu nabrojanih aksioma u početku mog pisma i definicije dužine koja nužno proizilazi iz najprostijih svojstava pojma dužine, sledi opšti stav:

U svakom trouglu je zbir dve strane veći ili jednak trećoj strani.

Istovremeno je jasno da se slučaj jednakosti javlja tada i samo tada kad ravan α iseca iz granice tela koje nije nigde konkavno dva pravolinijska komada UZ i TV. Poslednji se uslov može izraziti i bez pomoći tela koje nije nigde konkavno. Naime, ako su date dve ma koje prave a i b prvobitne geometrije koje leže u ravni α i koje se seku u nekoj tački C, onda će uopšte postojati u svakom od četiri ravna ugaona prostora koja nastaju u α oko C takve prave linije koje ne seku nijednu od dveju pravih a i b; ako ipak takve prave linije ne postoje, naročito u dva ravna ugaona prostora koja leže nasuprot jedan drugome, onda je uslov o kome je reč ispunjen i u tom slučaju uvek postoje trouglovi za koje je zbir dve strane jednak trećoj. Dakle, u posmatranom slučaju moguć je izmedju izvesnih tačaka A i B put sastavljen od dva pravolinijska komada čija je ukupna dužina jednaka direktnom rastojanju dveju tačaka A i B; može se bez teškoća pokazati da se svi putevi izmedju tačaka A i B koji imaju tu osobinu, mogu sastaviti od tih konstruisanih puteva i da ostali spojni putevi imaju veću ukupnu dužinu. Lako je izvesti iscrpnije israživanje ovog pitanja o najkraćem putu, pri čemu je od naročitog interesa slučaj kada se za granicu tela koje nije nigde konkavno uzme tetraedar.

Na kraju dozvoljavam sebi da obratim pažnju na to da sam u prethodnom israživanju uvek pretpostavljao da telo koje nije nigde konkavno celo leži u konačnom. Ako u geometriji definisanoj pomoću prvobitnih aksioma ipak postoje prava i tačka koje imaju to svojstvo da je kroz ovu tačku prema pravoj moguća samo jedna paralelna, onda ona ptretpostavka nije opravdana. Lako se uvidja kakve izmene u ovom slučaju treba da pretrpi moje mišljenje.

Klajntajh kod Raušena, 14 avgusta 1894.

Dodatak *II*

Stav o jednakosti uglova na osnovici ravnokrakog trougla

Ovaj dodatak, koji predstavlja preradu moje raprave „Stav o jednakosti uglova na osnovici ravnokrakog trougla", tiče se položaja ovog stava u ravnoj Euklidovoj geometriji.

Sada ćemo uzeti za osnovu ove aksiome:

I. Aksiome veze u ravni, tj. aksiome I_{1-3} str. 3;

II. Aksiome rasporeda str. 5 - 6;

III. Naredne aksiome kongruencije:

Aksiome III_{1-4} str. 10 - 12 u nepromenjenoj formulaciji i aksiomu kongruencije trouglova u užoj formulaciji, pri čemu ćemo najpre uzeti da iskaz te aksiome važi samo za trouglove istog smera obilaženja. Na str. 61 - 62 bio je smer obilaženja trouglova u ravnoj geometriji definisan na osnovu razlikovanja „desno" i „levo". Iz definicije desne i leve strane prave, neposredno se uvidja da se od dva kraka proizvoljnog ugla uvek može na jednoznačan odredjen način označiti jedan kao desni krak i drugi kao levi, tako da desni krak leži na desnoj strani one prave koja je odredjena drugim krakom po položaju i pravcu, dok levi krak leži po svom položaju, tako i po pravcu. Za desne krake dva ugla reći ćemo da isto leže u odnosu na ove uglove, a to se isto odnosi i na oba leva kraka.

Aksioma kongruencije u užoj formulaciji glasiće ovako:

III_5^*. Ako za dva trougla ABC i $A'B'C'$ važe kongruencije

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C' \text{ i } \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

onda je za te trouglove uvek zadovoljena i kongruencija

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C',$$

pod uslovom da kraci AB i $A'B'$ uglova $\angle BAC$ i $\angle B'A'C'$ isto leže.

Iz šire formulacije III_5, ove aksiome i drugog dela aksiome III_4 neposredno sledi stav o uglovima na osnovici ravnokrakog trougla, stav 11 (str. 13). Obrnuto, može se dokazati šira formulacija III_5 pomoću ovde navedenih aksioma $I, II, III_{1-4}, III_5^*$, stava o uglovima na osnovici ravnokrakog trougla i dveju narednih aksioma:

III_6. Ako su i ugao $\angle(h', k')$ i ugao $\angle(h'', k'')$ kongruentni uglu $\angle(h, k)$ to su oni i medjusobno kongruentni.

Iskaz ove aksiome dokazan je na str. 18, kao stav 19, pomoću šire formulacije III_5 aksiome o kongruenciji trouglova.

III_7. Ako dve poluprave c i d koje izlaze iz temena ugla $\angle(a, b)$ leže u unutrašnjosti ovog ugla, onda ugao $\angle(a, b)$ nije kongruentan uglu $\angle(c, d)$.

Dokaz aksiome III_5 pomoću navedenih aksioma i stava o uglovima na osnovici ravnokrakog trougla ovde ćemo izostaviti.

IV. Aksioma paralelnih može se ovde uzeti u njenoj slabijoj formulaciji IV str. 23.

V. Sledeće aksiome neprekidnosti: Arhimedova aksioma V_1 str. 25.(Aksioma potpunosti V_2 sa str. 25, n e ć e se ovde upotrebljaviti.)

V_3 (a k s i o m a s u s e d s t v a). Ako je data ma koja duž AB, uvek postoji jedan trougao u čijoj se unutrašnjosti ne može naći nijedna duž kongruentna sa AB.

Ova se aksioma može dokazati pomoću šire formulacije aksiome III_5 o kongruenciji trouglova. Dokaz se zasniva na stavu koji sledi iz stavova 11 i 23: zbir dve strane trougla veći je od njegove treće strane.

Sada imamo naredni stav, čiji dokaz ovde izostavljamo:

Iz svih $I-IV$ navedenih aksioma može se dokazati stav o baznim uglovima (stav 11), a time i šira formulacija aksioma III_5 o kongruenciji trouglova.

Nastaje pitanje da li se aksioma o kongruenciji trouglova može dokazati u njenoj široj formulaciji iz njene uže formulacije bez aksioma neprekidnosti $V_{1,3}$. Ovo istraživanje će pokazati da niti se može izostaviti Arhimedova aksioma, čak ni tada ako se pretpostavi da važe stavovi učenja o proporcijama, niti sme nedostajati aksioma susedstva. Geometrije, koje ću u tom cilju u narednim izlaganjima konstruisati, bacaju u isto vreme, kako mi izgleda, novu svetlost na logičku vezu stavova ravne geometrije koji dolaze u obzir, naročito na vezu sa učenjem o površinama.

Neka je t parametar, a α neki izraz sa konačnim ili beskonačnim brojem članova oblika

$$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + ...$$

u kome neka a_0 ($\neq 0$), a_1, a_2 znače proizvoljne realne brojeve, a n proizvoljan ceo racionalan broj ($>$ ili $<$ ili $=$) 0. Ukupnost svih izraza ovog oblika α, kojoj je dodato još 0, smatraćemo kao kompleksni sistem brojeva T u smislu §13, za koji smo ustanovili sledeće: ma koji brojevi sistema T sabiraju se, oduzimaju se, množe se, dele se tako kao da su obični, apsolutno konvergentni stepeni redovi, kod kojih su članovi poredjani po rastućim stepenima promenljive t. Tako dobijeni zbirovi, razlike, proizvodi i količnici opet su izrazi oblika α i stoga brojevi komplesnog brojnog sistema T. Za broj α u sistemu T, reći ćemo da je $<$ ili $>$ 0, prema tome da li je u dotičnom izrazu za α prvi koeficijent a_0 $<$ ili $>$ 0. Ako su data sva ma koja broja α i β komplesnog brojnog sistema T, reći ćemo da je $\alpha < \beta$ odn. $\alpha > \beta$, prema tome da li je $\alpha - \beta < 0$ ili $\alpha - \beta > 0$. Jasno je da pri ovim postavkama važe pravila 1 - 16 u §13; naprotiv, za naš sistem T ne važi Arhimedova aksioma, pravilo 17 u §13, pošto, ma kako veliki bio izabran pozitivan realan broj A, uvek ostaje $At < 1$; dakle, naš kompleksni brojni sistem T je ne - arhimedski sistem.

Ako je τ izraz oblika

$$\tau = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + ...$$

gde a_0 ($\neq 0$), a_1, a_2, ... znače realne brojeve, a izložilac n najnižeg stepena od t je pozitivan, tada ćemo τ zvati beskonačno malim brojem kompleksnog sistema T.

Ma koji red stepenog oblika

$$\varphi(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + ...$$

u kome c_0, c_1, c_2,... znače proizvoljne realne brojeve, a τ beskonačno mali broj sistema T opet je broj sistema T; ovaj se red može uporediti po rastućim stepenima parametra t, pri čemu se svaki koeficijent dobija kao raelan broj pomoću konačnog računa.

Ako su, dalje, α i β dva ma koja broja sistema T, onda ćemo

$$\alpha + i\beta$$

nazvati imaginarnim brojem u odnosu na kompleksni sistem T, gde je i imaginarna jedinica, tj. neka bude $i^2 =$ -1 i neka jednačina $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$ znači da je $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$.

Ako se tada funkcije $\sin\tau$, $\cos\tau$, e^τ, $e^{i\tau}$ beskrajno malog broja τ definišu pomoću njihovih stepenih redova, tada su vrednosti funkcija opet brojevi sistema T odn. imaginarni brojevi u odnosu na ovaj sistem. Sad možemo, ako je ϑ proizvoljan realan broj, definisati funkcije $\sin(\vartheta + \tau)$, $\cos(\vartheta + \tau)$, $e^{i(\vartheta+\tau)}$, $e^{i\vartheta+(1+i)\tau}$ u sistemu T pomoću formula

$$\sin(\vartheta + \tau) = \sin\vartheta\cos\tau + \cos\vartheta\sin\tau,$$

$$\cos(\vartheta + \tau) = \cos\vartheta\cos\tau - \sin\vartheta\sin\tau,$$

$$e^{i(\vartheta+\tau)} = e^{i\vartheta}e^{i\tau},$$

$$e^{i\vartheta+(1+i)\tau} = e^{\tau}e^{i(\vartheta+\tau)}.$$

Iz ovih definicija dobijaju se poznate relacije:

$$\cos^2(\vartheta + \tau) + \sin^2(\vartheta + \tau) = 1,$$

$$\cos(\vartheta + \tau) \pm i\sin(\vartheta + \tau) = e^{\pm i(\vartheta+\tau)}.$$

Konstruišimo sada pomoću sistema brojeva T ravnu geometriju na ovaj način:

Zamislićemo par brojeva (x, y) sistema T kao tačku, a odnos ma koja tri broja $(u : v : w)$ iz T, u slučaju da u i v nisu oba nula, kao pravu; dalje, neka postojanje jednačine

$$ux + vy + w = 0$$

izražava da tačka (x, y) leži na pravoj $(u : v : w)$.

Ravna geometrija izgradjena na pokazani način na brojnom sistemu, u kome važe pravila 1 - 16 u §13, kao što je već pomenuto u §9, uvek zadovoljava aksiome I_{1-3} i IV.

Lako se uvidja da je prava data pomoću jedne svoje tačke (x_0, y_0) i odnosa dvaju brojeva α, β koji nisu istovremeno jednaki nuli. Jednačina

$$x + iy = x_0 + iy_0 + (\alpha + i\beta)s;\ (\alpha + i\beta \neq 0),$$

u kojoj s znači ma koji brojni sistem T, označava da tačka (x, y) pripada pomenutoj pravoj. Uporedimo tačke prave prema veličini parametra s. Tada je poluprava date prave koja polazi od tačke (x_0, y_0) odredjena dopunskim uslovom $s > 0$ odn. $s < 0$. Ako dvema tačkama A i B prave pripadaju vrednosti parametra s_a i $s_b (> s_a)$, biće duž AB predstavljena jednačinom prave i dopunskim uslovom $s_a \leq s \leq s_b$. Sad su i aksiome II_{1-3} zadovoljene; da bismo se, dalje, uverili da je zadovoljena i aksioma rasporeda II_4, ustanovimo sledeće: tačka (x_3, y_3) ležaće na jednoj ili drugoj strani prave odredjene tačkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2), pri čemu je znak determinante

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

pozitivan ili negativan. Možemo se uveriti da tako data definicija strane u odnosu na pravu ne zavisi od izbora tačaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2) na pravoj slaže se sa definicijom datom na str. 8.

Za osnovu definicija kongruencije uzećemo transformacije oblika

$$x' + iy' = e^{i\vartheta + (1+i)\tau}(x + iy) + \lambda + i\mu,$$

koje ćemo pisati u obliku

$$x' + iy' = [\vartheta, \tau; \lambda + i\mu](x + iy),$$

gde ϑ znači proizvoljan realan broj, τ beskonačno mali broj sistema T, a λ i μ dva proizvoljna broja sistema T. Transformaciju ovog oblika označićemo kao kongruentno preslikavanje. Kongruentno preslikavanje, pri kome su λ i μ jednaki nuli, naziva se obrtanjem oko tačke (0, 0).

Ukupnost ovih kongruentnih preslikavanja obrazuje grupu; ova ukupnost ima ova četiri svojstva:

1. Postoji kongruentno preslikavanje koje nijednoj tački ne menja položaj:

$$[0, 0; 0](x + iy) = x + iy.$$

2. Ako se izvedu dva kongruentna preslikavanja jedno za drugim, rezultat predstavlja opet kongruentno preslikavanje.

$$\begin{gathered}[\vartheta, \tau_2; \lambda_2 + i\mu_2]\{[\vartheta_1, \tau_1; \lambda_1 + i\mu_1](x + iy)\} = \\ [\vartheta_2 + \vartheta_1, \tau_2 + \tau_1; \lambda_2 + i\mu_2 + e^{i\vartheta_2 + (1+i)\tau_2}(\lambda_1 + i\mu_1)](x + iy).\end{gathered}$$

Za svako kongruentno preslikavanje postoji inverzno preslikavanje:

$$[-\vartheta; -\tau; -(\lambda + i\mu)e^{-i\vartheta-(1+i)\tau}]\{[\vartheta, \tau; \lambda + i\mu](x + iy)\} = x + iy.$$

Ova osobina je posledica osobina 1, 2, 4, 5.

Izvodjenje kongruentnog preslikavanja je asocijativno, tj. *ako tri kongruentna preslikavanja označimo sa* K_1, K_2, K_3, *a kongruentno preslikavanje koje se dobija prema* 2. iz K_1, K_2, *sa* K_2K_1, *onda će uvek važiti*

$$K_3(K_2K_1) = (K_3K_2)K_1.$$

Osim ovih osobina, istaknimo i naredne osobine kongruentnog preslikavanja:

3. *Tačka se uvek prevodi u tačku naše geometrije.*

Par brojeva x', y' koji se dobijaju pri kongruentnom preslikavanju iz para brojeva x, y sistema T, uvek opet pripada sistemu T.

4. *Prava prelazi opet u pravu sa potpuno očuvanim rasporedom tačaka.*

Lako se dobija relacija

$$[\vartheta, \tau; \lambda + i\mu] \;\; x_0 + iy_0 + (\alpha + i\beta)s = x_0' + iy_0' + (\alpha' + i\beta')s,$$

u kojoj, pošto eksponencijalna funkcija ne iščezava, iz nejednačine $\alpha + i\beta \neq 0$ uvek sledi $\alpha' + i\beta' \neq 0$.

Kao neposredna posledica sledi: dve različite tačke uvek opet prelaze u dve različite tačke.

5. *Postoji samo jedno kongruentno preslikvanje koje prevodi datu polupravu* h *u datu polupravu* h'.

Neka je poluprava h data jednačinom:

$$x + iy = x_0 + iy_0 + (\alpha + i\beta)s, \;\; \alpha + i\beta \neq 0, \;\; s > 0,$$

a h' jednačinom:

$$x' + iy' = x_0' + iy_0' + (\alpha' + i\beta')s', \;\; \alpha' + i\beta' \neq 0, \;\; s' > 0.$$

Kongruentno preslikavanje $[\vartheta, \tau; \lambda + i\mu]$, koje polupravu h prevodi u h', mora, pre svega, tačku iz koje izlazi polupravа h, prevesti u tačku iz koje izlazi polupravа h':

$$(1) \qquad x_0' + iy_0' = e^{i\vartheta + (1+i)\;\tau}\;(x_0 + iy_0) + \lambda + i\mu.$$

Dalje, svakoj pozitivnoj vrednosti od s mora odgovarati pozitivna vrednost od s' tako da važi

$$x_0' + iy_0' + (\alpha' + i\beta')s' = [\vartheta, \tau; \lambda + i\mu] \; \{x_0 + iy_0 + (\alpha + i\beta)s\}$$

i prema tome

$$(2) \qquad (\alpha' + i\beta')s' = e^{i\vartheta+(1+i)\tau}\ (\alpha + i\beta)s.$$

Obrnuto, svako kongruentno preslikavanje koje zadovoljava jednačine (1) i (2), prevodi h u h'.

Podelimo poslednju jednačinu konjugovanom imaginarnom jednačinom

$$(3) \qquad \tfrac{\alpha'+i\beta'}{\alpha'-i\beta'} = e^{2i(\vartheta+\tau)}\tfrac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}.$$

Ako stavimo

$$\frac{\alpha' + i\beta'}{\alpha' - i\beta'}\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \xi + i\eta,$$

dobija se

$$(\xi + i\eta)(\xi + i\eta) = \xi^2 + \eta^2 = 1$$

ξ i η su kao brojevi iz T stepeni redovi sa parametrom t; uporedjujući koeficijente izvešćemo iz poslednje jednačine da se u redovima ξ i η ne mogu javiti stepeni parametra t sa negativnim izložiocem, već se, naprotiv, oni mogu predstaviti u obliku

$$\xi = a + \xi',$$

$$\eta = b + \eta',$$

gde a i b znače obične realne brojeve, a ξ' i η' beskonačno male brojeve iz sistema T, i da važe relacije

$$a^2 + b^2 = 1,$$

$$(4)$$

$$2(a\xi' + b\eta') + \xi'^2 + \eta'^2 = 0.$$

Jednačina (3)

$$e^{2i(\vartheta+\tau)} = \xi + i\eta,$$

prema našim definicijama trigonometrijskih funkcija, sada se može svesti na oblik

$$\cos 2(\vartheta + \tau) = cos2\vartheta \cos 2\tau - \sin 2\vartheta \sin 2\tau = \xi$$
$$= a + \xi'$$

$$(5)$$

$$\sin 2(\vartheta + \tau) = \sin 2\vartheta \cos 2\tau + \cos 2\vartheta \sin 2\tau = \eta$$
$$= b + \eta'.$$

Uporedjujući koeficijente ovih jednačina dolazimo do

$$\cos 2\vartheta = a, \qquad \sin 2\vartheta = b,$$

iz kojih se, na osnovu važenja jednačine $a^2 + b^2 = 1$, može realni broj ϑ odrediti jednoznačno do višestruke vrednosti od π. Unošenjem para vrednosti $\cos 2\vartheta = a$, $\sin 2\vartheta = b$, u jednačine (5) mogu se dobiti relacije:

$$\cos 2\tau = 1 + a\xi' + b\eta',$$
$$\sin 2\tau = a\eta' - b\xi';$$

a pošto je na osnovu jednačine (4) zbir kvadrata desnih strana 1, to je beskrajno mali broj τ jednoznačno odredjen. On se može izračunati iz jedne od dveju poslednjih jednačina uporedjivanjem koeficijenata.

Pošto je ϑ odredjeno samo do višestruke vrednosti od π, faktor $e^{i\vartheta+(1+i)\tau}$ je odredjen samo do znaka. Samo jedan od dva znaka daje, što se lako vidi, za pozitivno s u jednačini (2) pozitivno s'. Prema tome, realni broj ϑ odredjen je do višestruke vrednosti od 2π. Unošenjem para vrednosti ϑ i τ u jednačinu (1), dobijaju se na jednoznačan način λ i μ u sistemu T. Najzad, uvidjamo da jednačine (1) i (3), a zato i nadjene vrednosti ϑ, τ, λ, μ, ne zavise od načina predstavljanja polupravih h i h'.

6. Za dve tačke A, B uvek postoji kongruentno pres,likavanje koje prevodi A u B i B u A.

Ako tačke A, B imaju koordinate x_1, y_1 i x_2, y_2, onda kongruentno preslikavanje

$$[\pi, 0; x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)]$$

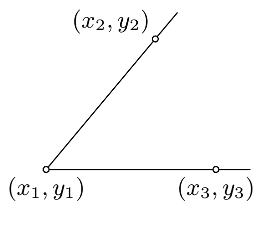
ostvaruje ono što se traži.

7. Ako kongruentno preslikavanje prevodi polupravu h u polupravu h' i tačku P u tačku P', onda P i P' isto leže u odnosu na poluprave h i h'.

Pokažimo najpre da determinante

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

imaju isti znak onda i samo onda kada tačke (x_3, y_3) i (x_3', y_3') isto leže u odnosu na usmerene prave koje su odredjene tačkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2), odn.



(x_1', y_1') i (x_2', y_2') (up. str. 122-123). Najpre, iz date definicije na str. 61 o „desnom" i „levom" zaključujemo, da tačke (x_3, y_3) i (x_2, y_2) nisu tačke koje isto leže u odnosu na usmerene prave koje su odredjene tačkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2), odnosno (x_1, y_1) i (x_3, y_3). Sada se odgovarajuće determinante zaista razlikuju u svojim znacima. Naše tvrdjenje sledi, uopšte iz okolnosti, što definicija strane prave pomoću znaka navedene determinante, zadovoljava svojstva strane izložena na str. 8.

Osobina 7 biće prema tome dokazana, ako se pokaže da se znak determinante

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

ne menja pri kongruentnom preslikavanju. Ali, ova determinanta se razlikuje samo pozitivnim faktorom od imaginarnog dela količnika

$$\frac{(x_3+iy_3)-(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)-(x_1+iy_1)},$$

pri čemu je neposredno jasno da je ovaj količnik invarijantan u odnosu na kongruentno preslikavanje.

Ustanovimo sad ovo: reći ćemo da je neka duž onda i samo onda kongruentna drugoj duži, ako postoji kongruentno preslikavanje koje prevodi prvu duž u drugu; reći ćemo da je ugao onda i samo onda kongruentan drugom uglu, ako postoji preslikavanje koje prevodi jedan ugao u drugi.

P o,k a z a ć e m o d a n a v e d e n a d e f i n i,c i j a k o n g r u e n c i j e d u ž i i k o n g r u e n c i j e u g l o v a z a d o v o l j a v a a k s i o m e III_{1-6} a k o k o n g r u e n t n o p r e s l i k a v a n j e u z e t o z a o s n o v u i m a o s o b i n e $1-7$.

Važenje aksiome III_1 neposredna je posledica osobine 5.

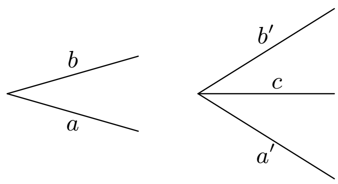
Važenje aksiome III_2 dokazuje se na ovaj način. Neka kongruentna preslikavanja K_1 i K_2 prevode duži $A'B'$ i $A''B''$ u duž AB. Iz osobina 1, 2, 4, 5 sledi da za jedno kongruentno preslikavanje K_2 postoji uvek inverzno kongruentno preslikavanje K_2^{-1}. Kongruentno preslikavanje $K_2^{-1}K_1$ prema osobini 2 prevodi duž AB u $A''B''$.

Analogno se dokazuje važenje aksioma III_6.

Pokazaćemo sad da ako je duž AB kongruentna duži $A'B'$ onda kongruentno preslikavanje K koje prevodi polupravu AB u polupravu $A'B'$ prevodi i tačku B u tačku B'. Neka je kongruencija duži AB i $A'B'$ dobijena pomoću kongruentnog preslikavajna K_1. Ako K_1 prevodi tačku A u A', to na osnovu osobine 4 kongruentno preslikavanje KK_1^{-1} prevodi polupravu $A'B'$ samu u sebe, dakle, prema osobinama 1 i 5, ono mora biti identitet. A ako K_1 prevodi tačku A u B', onda ćemo uzeti u pomoć kongruentno preslikavanje K_2 – a to preslikavanje K_2 postoji na osnovu osobine 6 – koje prevodi tačku A u B i B u A. Sada kongruentno preslikavanje $K(K_2K_1^{-1})$ prevodi polupravu $A'B'$ samu u sebe, dakle, ovo je identitet.

Iz dokazanog i iz osobina 4 i 5 neposredno sledi važenje aksioma III_3, a isto tako iz dokazanog i osobina 4, 5 i 7 neposredno sledi aksioma III_5.

Najzad se dokazuje važenje aksiome III_4 na naredni način: ako su dati ugao (a, b) i poluprava c, to na osnovu osobine 5 postoji jedno i samo jedno kongruentno preslikavanje K_1, koje prevodi a u c, a takodje jedno i samo jedno kongruentno preslikavanje K_2 koje prevodi b u c. K_1 prevodi b u polupravu b' različitu od c, što se saznaje na osnovu osobine 4 pri posmatranju kongruentnog preslikavanja K_1^{-1}; isto tako preslikavanje K_2



prevodi polupravu a u polupravu a' različitu od c. Kongruentno preslikavanje $K_2K_1^{-1}$ prevodi polupravu c u a', a polupravu b' u c. Iz osobine 7 sledi da poluprave a' i b' leže na raznim stranama poluprave c. Stoga je prvi deo aksiome III_4 zadovoljen. Drugi deo te aksiome je posledica osobine 1.

Da važi aksioma III_7 uvidja se ovim posmatranjem. Poluprava koja izlazi iz tačke (0,0), koju ćemo označiti sa O, može se uvek predstaviti jednačinom oblika

$$x + iy = e^{i(\vartheta+\tau)}s; \qquad s > 0;$$

ta poluprava proizilazi iz pozitivne poluose x pomoću obrtanja $[\vartheta, \tau; 0]$. Lako se dokazuje da od dve poluprave koje izlaze iz tačke O i leže u poluravni pozitivnih y, ona poluprava leži izmedju druge poluprave i pozitivne poluose x koja *modulo* 2π ima manji zbir $\vartheta + \tau$.

Neka se desni krak h nekog ugla poklapa sada sa pozitivnom poluosom x; neka njegov levi krak k bude predstavljen jednačinom

$$x + iy = e^{i(\vartheta_1+\tau_1)}s; \qquad s > 0.$$

Izlazeći iz tačke O poluprava h' vodi u unutrašnjost ovog ugla. Tada postoji jedno i samo jedno kongruentno preslikavanje koje prevodi polupravu h u h', naime obrtanje $[\vartheta_2, \tau_2; 0]$; ono prevodi polupravu k u polupravu k' čija je jednačina

$$x + iy = e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2+\tau_1+\tau_2)}s; \qquad s > 0.$$

Važi

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \tau_1 + \tau_2 > \vartheta_{1+}\tau_1, \qquad mod\ 2\pi;$$

prema tome k' ne leži u $\angle(h, k)$.

Važenje aksiome susedstva V_3 može se dokazati na naredni način. Pomoću drugog stava o kongruenciji i aksiome IV lako se pokazuje da se za jednu duž koja leži u unutrašnjosti trougla, uvek može naći kongruentna duž, koja, izlazeći iz temena trougla, leži na strani tog trougla ili u njegovoj unutrašnjosti.

Na osnovu aksiome III_1 postoji za jednu datu duž AB jedna i samo jedna duž OB' iz tačke O koja je usmerena na pozitivnu stranu poluose x i sa kojom je duž AB kongruentna. Uzećemo apscisu β tačke B' za dužinu duži AB:

$$\overline{AB} = \beta$$

Posmatrajmo sad trougao sa temenima $O(0,\ 0)$, $C(\frac{\beta}{2}, 0)$, $D(\frac{\beta}{4}, \frac{\beta}{4}\sqrt{3})$. Ovaj trougao je ravnostran sa jednakim uglovima, što pokazuje kongruentno preslikavanje $[\frac{2\pi}{3}, 0; \frac{\beta}{2}]$ koje prevodi tačku O u C, tačku C u D, a tačku D u O. Slobodna krajnja tačka F duži koja je kongruentna duži AB i ide iz tačke O po jednom kraku $\angle COD$ ili se prostire u unutrašnjosti tog ugla, može se predstaviti u obliku:

$$[\vartheta, \tau; 0]\beta,\ 0 \leq \vartheta + \tau \leq \tfrac{\pi}{3},$$

Ali, sve tačke, predstavljene u ovom obliku, leže na onoj strani prave CD na kojoj leži O, što se uvidja, prema rečenom na str. 114, supstitucijom koordinata tačke O i tačke F u determinanti za CD

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ x_3 - \frac{\beta}{2} & y_3 \end{vmatrix}$$

.

Ovim je pokazano da u unutrašnjosti trougla OCD ne postoji duž koja bi bila kongruentna sa AB.

Rezimiraćemo:

U našoj geometriji važe sve gore postavljene aksiome obične ravne geometrije, izuzev Arhimedove aksiome V_1; pri tome aksiomu kongruencije trouglova treba uzeti u užoj formulaciji III_5^*.

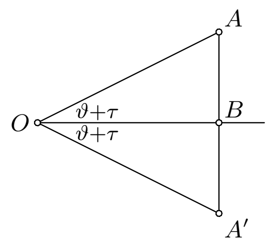
Dalje, važi stav:

Svaki se ugao može prepoloviti i postoji prav ugao.

Dovoljno je pokazati da se svaki ugao koji izlazi iz tačke O može prepoloviti. Neka je $[\vartheta, 0; 0]$ obrtanje koje prevodi desni kraj u levi; obrtanje $[\frac{\vartheta}{2}, \frac{\tau}{2}; 0]$ prevodi desni krak ugla u njegovu bisektrisu.

Egzistencija pravog ugla se uvidja posmatranjem obrtanja $[\frac{\pi}{2}, 0; 0]$.

Uvešćemo sad pojam ogledanja na pravoj a na ovaj način:



spustimo normalu ma iz koje tačke A, ma na koju pravu a i produžimo ovu normalu za njenu sopstvenu dužinu preko podnožne tačke B do A'; tačka A' se naziva ogledalska slika tačke A. Oglednimo najpre tačku A sa koordinatama $\alpha > 0, \beta > 0$ na osi x. Neka je $\angle AOB$ izmedju poluprave OA i pozitivne poluose x jednak uglu $\vartheta + \tau$ i neka, na primer, tačka $x = \gamma$ na osi x pri obrtanju za ugao $\vartheta + \tau$ prelazi tačku A tako da je

$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau}\gamma = \alpha + i\beta.$$

Ogledalska slika A' tačke A u odnosu na osu x ima koordinate $\alpha - \beta$. Prema tome, ako izvedemo obrtanje za ugao $\vartheta + \tau$, iz tačke A' proizilazi tačka koja se predstavlja imaginarnim brojem

$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau}(\alpha - i\beta) = \tfrac{\alpha + i\beta}{\gamma}(\alpha - i\beta) = \tfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma},$$

tj. da tačka leži na pozitivnoj osi x; stoga je $\angle A'OB$ takodje jednak uglu $\vartheta + \tau$ i, prema tome, podudara se sa $\angle AOB$. Ovaj rezultat možemo izraziti ovako:

Ako se u dva pravougla trougla koji simetrično leže podudaraju obe katete, onda su i odgovarajući uglovi na hipotenuzi medju sobom jednaki.

Iz toga izvodimo istovremeno opštiji stav:

Uglovi ogledalske slike neke figure uvek se podudaraju sa odgovarajućim uglovima prvobitne figure.

Iz okolnosti da su u našoj geometriji prave definisane pomoću linearnih jednačina može se bez teškoća izvesti kako osnovni stav učenja o proporcijama (stav 42), tako i Paskalov stav (stav 40). Otuda uvidjamo ovo:

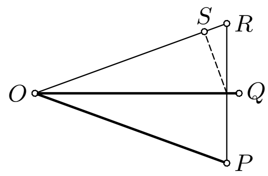
U našoj geometriji važi učenje o proporcijama i, dalje, u njoj važe svi stavovi afine geometrije (up. §35).

Na osnovu važenja aksiome III_7 može se pokazati da se uglovi u našoj geometriji mogu na jednoznačan način uporediti po svojoj veličini.

Pomoću ove činjenice može se dokazati stav o spoljašnjem uglu (stav 22), i to, pošto su u našoj geometriji unakrsni uglovi uvek jednaki, može se u nju preneti dokaz sa str. 20. Iz činjenice da se u našoj geometriji može jednoznačno definisati zbir dva ugla, dobija se, pomoću aksiome IV, stav o zbiru uglova u trouglu (stav 31).

Došli smo sad do osnovnog pitanja, do pitanja da li u našoj geometriji važi stav o jednakosti uglova na osnovici ravnokrakog trougla (stav 11).

Iz ovog stava i stava o spoljašnjem uglu kod trougla dobija se s jedne strane teorema obrnuta teoremi o bazisnim uglovima ravnokrakog trougla (stav 24) pomoću indirektnog dokaza, a s druge strane pomoću poznatog Euklidovog dokaza stav: zbir dve strane u svakom trouglu veći je od treće strane.



Ali, kao što ćemo pokazati, nijedan od ova dva stava nije zadovoljen u našoj geometriji; a time će istovremeno biti dokazano da stav o bazisnim uglovima ravnokrakog trougla u njoj ne važi.

Posmatrajmo trougao OQP, čija temena imaju koordinate: 0,0; $\cos t$,0; $\cos t$,-$\sin t$. Dužina (v. str. 121) duži OP i QP se pomoću kongruentnog preslikavanja $[0,\ t;\ 0]$ i $[\frac{\pi}{2}, 0; -\cos t \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}]$.

Dobija se

$$\overline{OP} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + ...,$$

$$\overline{QP} = \sin t = t - \frac{t^3}{6} + ...,$$

$$\overline{OQ} = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + ...$$

Na osnovu definicije rasporeda brojeva sistema T uvidja se da je

$$\overline{OQ} + \overline{QP} < \overline{OP}.$$

S t a v p o k o m e j e z b i r d v e j u s t r a n a u s v a k o m t r o u g l u v e ć i o d t r e ć e s t r a n e n e v a ž i u n a š o j g e o m e t r i j i.

Otuda uvidjamo bitnu zavisnost ovog stava od aksiome o kongruenciji u širem smislu.

Iz ovog rezultata u isto vreme sledi:

U našoj geometriji ne važi stav o ravnokrakom trouglu i zato ne važi ni aksioma o kongruenciji trouglova u širem smislu.

Da u našoj geometriji ne važi ni obrnuti stav o uglovima na osnovici, neposredno uvidjamo na primeru trougla OPR, gde je R ogledalska slika tačke P u odnosu na pravu OQ, tj. teme R ima koordinate $\cos t, \sin t$. Tada je prema jednom ranije dokazanom stavu (str. 122),

$$\angle OPR \equiv \angle ORP.$$

I pored toga strane OP i OR nisu medju sobom kongruentne. Dužina duži OR koja se dobija pomoću obrtanja $[0, -t; 0]$ je, naime

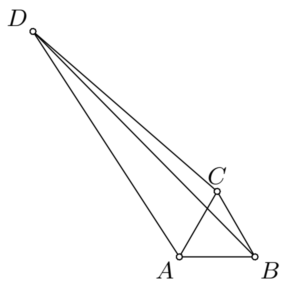
$$\overline{OR} = e^{-t} \neq \overline{OP} = e^t.$$

Odatle ćemo videti da su u o p š t e u d v a s i m e t r i č n o p o l o ž e n a p r a v o u g l a t r o u g l a j e d n a k i h k a t e t a h i p o t e n u z e r a z l i č i t e i zato pri ogledanju na pravoj, duži na ogledalskoj slici nisu nužno jednake dužima prvobitne figure.

U našoj geometriji, takodje ne važi, kako je pokazao Rozeman, ni treći stav kongruencije (stav 18) u užoj formulaciji u odnosu na truglove koji isto leže. Da bismo ovo uvideli, primetimo najpre da tačke $A = 0$, $B = t$, $C = te^{i\frac{\pi}{3}}$ obrazuju ravnostrani trougao. Posmatramo li, dalje, tačku

$$D = \frac{t}{1 - e^{(1+i)t}},$$

uvidećemo da je $AB \equiv BD$, jer kongruentno preslikavanje $[0, t; t]$ prevodi tačku D samu u sebe, a tačku A u B.



Dalje se još izračunava da tačke A i B leže na istoj strani prave CD. Odatle prvo proističe da trouglovi ACD i BCD, kod kojih su sve odgovarajuće strane jednake, isto leže, i drugo da oni ne mogu imati sve odgovarajuće uglove jednake.

Razmotrićemo u našoj geometriji još u Euklidovo učenje o površinama poligona. Ovo je učenje bilo izgradjeno u §20 na pojmu mere površine trougla. Dokaz da je ova mera površine, poluproizvod osnovice i visine, nezavisna od toga koja se strana trougla smatra osnovicom, bio je izveden primenom aksiome kongruencije trouglova na trouglove koji leže simetrično. Da ovaj stav ne može biti dokazan bez šire formulacije te aksiome, može se uvideti na primeru trougla OQR str. 123. QR je visina spuštena na OQ, pomoću kongruentnog preslikavanja $[-\frac{\pi}{2}, 0; -\cos t \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}]$ dobija se dužina

$$\overline{QR} = \sin t;$$

i pošto je $\overline{OQ} = \cos t$, to bi mera površine, s jedne strane, morala biti

$$J = \frac{\cos t \cdot \sin t}{2}.$$

Nadjimo podnožje S upravne spuštene iz tačke Q na OR:

$$S = \cos t + ie^{it} \sin t \cos t.$$

Dalje, kongruentnim preslikavanjem

$$[-\frac{\pi}{2}, -t; -\cos t \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}-(1+i)t}]$$

dobija se dužina

$$\overline{QS} = e^{-t} \sin t \cos t;$$

a pošto je $\overline{OR} = e^{-t}$, dobili bismo, s druge strane, za tu meru površine vrednost

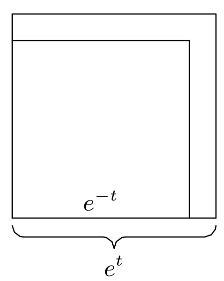
$$J = \frac{e^{-t} \cdot e^{-t} \cos t \sin t}{2},$$

koja je sigurno manja od vrednosti

$$\frac{\cos t \sin t}{2}.$$

Dok pojam mere površine gubi svoj smisao bez šire formulacije aksiome III_5 o kongruenciji trouglova, pojmovi razložive jednakosti i dopunske jednakosti poligona mogu se definisati isto kao u §18. Tada se stav 46 koji izražava dopunsku jednakost dva trougla sa jednakim osnovicama i visinama dobija isto onako kao u §19.

Dalje se uvidja da se i na osnovu uže aksiome III_5^*, može konstruisati na svakoj duži kvadrat, tj. četvorougao sa jednakim uglovima, od kojih svaki iznosi $\frac{\pi}{2}$, i sa jednakim stranama. U našoj geometriji sada i Pitagorina teorema, prema kojoj su oba kvadrata nad katetama ma kog pravouglog trougla zajedno dopinski jednaka kvadratu nad hipotenuzom. Jer, mi uvidjamo da se u Euklidovom dokazu Pitagorine teoreme iskorišćava samo kongruencija trouglova koji isto leže i prema tome samo aksioma o kongruenciji trouglova u užem smislu.



Primenom pitagorine teoreme na trouglove OQP i OQR na str. 123, nalazimo, uz pomoć stava 43, da su na dužima OP i OR konstruisani kvadrati dopunski jednaki, mada ove duži, kako smo ih gore izračunali, nisu medju sobom jednake.

Veza ove okolnosti sa stavom 52 potpuno je jasna i odatle vidimo da osnovni Euklidov stav, po kome dva dopunski jednaka trougla istih osnovica uvek imaju iste visine, takodje ne važi u našoj geometriji.

Ustvari, ovaj stav 48 bio je dokazan u §21, pri čemu je bitno korišćen pojam mere površine.

Prema tome, naša nas geometrija dovodi do saznanja:

Nemoguće je zasnovati Euklidovo učenje o površinama na aksiomi kongruencije trougla u užem smislu, čak i ako se pretpostavi da važi učenje o proporcijama.

Pošto u našoj geometriji ne važi poznati odnos izmedju hipotenuze i kateta pravouglog trougla, odnos koji se u običnoj geometriji izvodi iz Pitagorinog stava, to ću našu geometriju nazvati nepitagorejskom geometrijom.

Napravimo pregled najvažnijih rezultata koji proističu iz naše nepitagorejske geometrije:

Ako uzmemo aksiomu kongruencije trouglova u užem smislu i ako pretpostavimo da od aksioma neprekidnosti važi samo aksioma susedstva, tada se ne može dokazati stav o jednakosti uglova na osnovici u ravnokrakom trouglu, čak ni onda ako pretpostavimo da važi učenje o proporcijama. Isto tako, odatle sledi Euklidovo učenje o površinama; takodje stav po kome je zbir dve strane trougla veći od treće strane, i treći stav kongruencije za trouglove koji isto leže, nisu nužne posledice iz učinjenih pretpostavki.

Mi ćemo konstruisati još jednu drugu nepitagorejsku geometriju koja se razlikuje od geometrije koju smo obradjivali time što u njoj važi Arhimedova aksioma V_1, ali ne važi aksioma susedstva V_3.

Uzećemo za osnovu ove geometrije onu delimičnu oblast Ω realnih brojeva koji se sastoji od svih brojeva dobijenih iz brojeva 1 i $\mu = tg1$, ako konačno puta primenimo operacije računa: sabiranje $\omega_1 + \omega_2$, oduzimanje $\omega_1 - \omega_2$, množenje $\omega 1 \cdot \omega_2$, deljenje $\omega_1 : \omega_2$ (u slučaju da je $\omega_2 \neq 0$) i stepenovanje $\omega_1^{\omega_2}$. Pri tome ω_1, ω_2 treba da označavaju brojeve koji su već dobijeni pomoću pet pomenutih operacija od brojeva 1 i μ. Da bi se dobio broj ω polazeći od brojeva 1 i μ, treba tih pet operacija primeniti n_1 puta, odn. n_2 puta, ..., n_5 puta. Brojevi ω oblasti Ω mogu se tada prebrojati prema rastućem zbiru

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_5.$$

Na ovom brojnon sistemu izgradićemo ravnu geometriju pomoću istih konvencija pomoću kojih smo izgradili na str. 114 prvu nepitagorejsku geometriju na brojnom sistemu T; iz činjenice da u Ω, pri prirodnoj definiciji rasporeda važe svi zakoni računa 1-16 §13, saznajemo, kao i tamo, da važe aksiome I_{1-3}, II, IV u našoj geometriji.

Svakom broju ω oblasti Ω proširene za broj ∞ odgovara beskonačno mnogo brojeva ϑ koji zadovoljavaju jednačinu

$$\vartheta = arctg\omega.$$

Ukupnost svih brojeva ϑ dobijenih pomoću ove jednačine iz Ω obrazuju neku oblast Θ koja se ne poklapa sa Ω, ali koja je kao i Ω prebrojiva. U ovom prebrojavanju postoji prvi broj koji nije proizvod racionalnog broja i broja π; označićemo ga sa ϑ_{k_1}. Prvi broj iz oblasti Θ koji se ne može predstaviti u obliku

$$\vartheta = r\pi + r_1\vartheta_{k_1},$$

gde su r i r_1 ma koji racionalni brojevi, označićemo, ako on uopšte postoji, sa ϑ_{k_2}. Nastavljajući na ovaj način, označićemo sa $\vartheta_{k_{n+1}}$ prvi broj ϑ oblasti Θ koji se ne može predstaviti u obliku

$$\vartheta = r\pi + r_1\vartheta_{k_1} + r_2\vartheta_{k_2} + \cdots + r_n\vartheta_{k_n},$$

ako uopste postoji takav broj. Ovim je definisan niz $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \vartheta_{k_3}, \cdots$, koji sigurno sadrži jedan član, a možda, i beskonačno mnogo. Svaki broj ϑ iz oblasti Θ može se sada predstaviti na j e d n o z n a č a n način u obliku

$$\vartheta = r\pi + r_1\vartheta_{k_1} + r_2\vartheta_{k_2} + \cdots + r_n\vartheta_{k_n},$$

gde su $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, ..., \vartheta_{k_n}$ prvih n članova sada definisanog niza, a $r, r_1, r_2, ..., r_n$ ma koji racinalni brojevi.

Isto tako kao u prvoj nepitagorejskoj geometriji na str. 119 definisaćemo sada kongruenciju duži i kongruenciju uglova pomoću k o n g r u e n t n o g p r e s l i k a v a nj a. Kao kongruentno preslikavanje smatraćemo ovde svaku transformaciju oblika:

$$x' + iy' = 2^{r_1}e^{i\vartheta(x+iy)} + \lambda + i\mu,$$

gde je ϑ neki broj iz oblasti Θ, r_1 racionalni broj koji ulazi u gornje predstavljanje broja ϑ, a gde su λ i μ proizvonljni brojevi oblasti Ω.

Kongruentna preslikavanja obrazuju grupu, što se lako može proveriti. Ona, dakle, imaju osobine 1 i 2 navedene na str. 115. Osobina 3 sledi iz činjenice da brojevi

$$2^{r_1}, \quad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}}, \quad \sin\vartheta = \frac{tg\vartheta}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}}$$

pripadaju oblasti Ω. Osobina 5 dobija se na ovaj način:

Dokaz se, slično kao na str. 116, svodi na jednoznačno odredjivanje do višestruke vrednosti od 2π broja ϑ iz oblasti Θ koji zadovoljavaju jednačinu

$$2^{r_1}e^{i\vartheta} = \frac{\alpha' + i\beta'}{\alpha + i\beta} \cdot \frac{s'}{s}.$$

Podelićemo imaginaran deo realnim:

$$tg\vartheta = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha\alpha' + \beta\beta'}.$$

Ovom jednačinom je odredjen broj ϑ u brojnom sistemu Θ do višestruke vrednosti od π. Odredjivanje od višestruke vrednosti od 2π izvodi se isto kao u prvoj nepitagorejskoj geometriji (up. str. 107). Dokazi osobina 4, 6 i 7 izvode se isto kao i tamo.

Prema tome, iz dokazanih sedam osobina kongruentnog preslikavanja sledi, na osnovu datog opšteg dokaza na str. 108, da su u našoj geometriji aksiome III_{1-6} zadovoljene. Važenje aksioma III_7 može se pokazati slično kao u prvoj nepitagorejskoj geometriji.

Iz definicija rasporeda i kongruencije sledi važenje Arhimedove aksiome V_1, pošto je područje Ω delimično područje područja realnih brojeva.

Naprotiv, da aksioma susedstva V_3 nije zadovoljena, pokazuje se na sledeći način. Za svaki trougao može se naći njemu kongruentan trougao OAB sa temenima $O = (0,0), A = (\alpha, 0) B = (\beta, \gamma)$, gde α i γ označavaju pozitivne brojeve. Zato je dovoljno pokazati da se u svakom trouglu nalazi duž npr. dužine 1. Poluprava OB može se predstaviti, nezavisno od toga da li je β nula ili nije nula, u obliku

$$x + iy = e^{iarctg\frac{\gamma}{\beta}} \cdot s,$$

gde sa s označavamo pozitivan parametar koji pripada oblasti Ω. Pošto su brojevi $\alpha\gamma$ i $|\alpha - \beta| + \gamma$ pozitivni, možemo sad naći ceo broj r_1, koji ne mora biti pozitivan, a koji zadovoljava nejednačinu

$$(1) \qquad 2^{r_1} < \frac{\alpha\gamma}{|\beta - \gamma| + \gamma}.$$

Za date brojeve $r_1, \vartheta_{k_1}, arctg\frac{\gamma}{\beta} > 0$ postoje sigurno dva cela broja a i b koji zadovoljavaju nejednačinu

$$(2) \qquad 0 < \frac{a}{2^b}\pi + r_1\vartheta_{k_1} < arctg\frac{\gamma}{\beta}.$$

Iz formule

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + tg^2\vartheta}}{tg\vartheta}$$

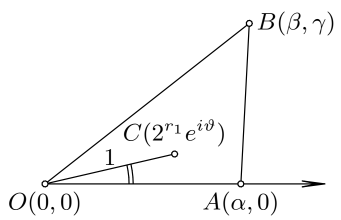
uvidjamo da su $\frac{\pi}{2^b}$, pa stoga, na osnovu teoreme o tangensu zbira, i

$$\vartheta = a\frac{\pi}{2^b} + r_1\vartheta_{k_1}$$

brojevi iz oblasti Θ. Iz nejednačine (2) proizilazi da poluprava

$$x + iy = e^{i\vartheta} \cdot s, \;\; s > 0$$

leži u unutrašnjosti trougla $\angle AOB$.



Slobodna krajnja tačka C duži dužine 1 koja leži na ovoj polupravoj i polazi iz tačke O, može se predstaviti u obliku

$$x + iy = 2^{r_1} \cdot e^{i\vartheta}.$$

Tačke O i C leže na istoj strani prave AB, pošto su obe determinante

$$\begin{vmatrix} |\beta - \alpha| & \gamma \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha\gamma,$$

.

$$\begin{vmatrix} \beta - \alpha & \gamma \\ 2^{r_1}\cos\vartheta - \alpha & 2^{r_1}\sin\vartheta \end{vmatrix} > -2^{r_1}|\beta - \alpha| - 2^{r_1}\gamma + \alpha\gamma,$$

.

pozitivne, poslednja na osnovu nejednačine (1). Prema tome, tačka C leži u unutrašnjosti trougla OAB, tj. u unutrašnjosti ovog trougla postoji duž čija je dužina 1.

Isto tako, kao i u prvoj nepitagorejskoj geometriji, pokazuje se da se svaki ugao može prepoloviti i da postoji pravi ugao; na isti način se dokazuje da važe stavovi navedeni na str. 122 i str. 123 o ogledalskim slikama, kao i svi stavovi učenja o proporcijama i stavovi afine geometrije. Svi uglovi naše geometrije nalaze se takodje i u Euklidovoj geometriji i uporedjivanje uglova po veličini u našoj geometriji isto je kao i u Euklidovoj geometriji. Otuda sledi, dalje, da važi stav o spoljašnjem uglu (stav 22) i stav o zbiru uglova u trouglu (stav 31). Naprotiv, ne važi stav o jednakosti bazisnih uglova u ravnokrakom trouglu. Naime, iz ovog stava se može, pomoću stava o spoljašnjem uglu, kao što je već pomenuto na str. 122, neposredno dobiti njemu obrnuti stav. Ali, da ova obrnuta teorema nije zadovoljena u našoj geometriji, uvidja se npr. posmatranjem trougla OPQ sa temenima $O = (0,0), P = (\cos\vartheta_{k_1}, -\sin\vartheta_{k_1}), Q = (\cos\vartheta_{k_1}, +\sin\vartheta_{k_1})$. Ovaj trougao ima jednake uglove kod P i Q, a medjutim dužine njegovih strana $\overline{OP} = 2$ i $\overline{OQ} = 2^{-1}$ nisu jednake.

Ni Euklidovo učenje o površinama u toj geometriji ne važi. Isto tako ne važi stav da je zbir dveju strana trougla veći od treće strane, jer iz ovog stava neposredno sledi da je svaka duž koja leži u unutrašnjosti trougla, manja od njegovog obima, i prema tome važila bi aksioma V_3.

Posmatrane nepitagorejske geometrije dovode nas do saznanja:

Za dokaz važenja stava o jednakosti uglova na osnovici ravnokrakog trougla neophodna je kako Arhimedova aksioma V_1, tako i aksioma susedstva V_3.

Ovaj Dodatak je upotpunjen u Dopuni III.

Dodatak *III*

Novo zasnivanje geometrije Boljai-Lobačevskoga

(Preštampano iz *Math.Ann.* knj. 57.)

U svome radu „Osnove geometrije", gl. *I* (str. 3-27) postavio sam sistem aksioma za Euklidovu geometriju i tada sam pokazao da je moguće izgraditi Euklidovu geometriju ravni isključivo na osnovu onih aksioma koje se odnose na ravan, čak i bez primene aksioma neprekidnosti. U ovom ispitivanju zameniću aksiomu paralelnih odgovarajućim zahtevom geometrije Boljaj-Lobačevskoga i tada ću pokazati isto tako da je moguće zasnovati geometriju Boljai-Lobačevskoga u ravni isključivo na osnovu aksioma ravni bez primene aksioma neprekidnosti.

Ovo novo zasnivanje geometrije Boljai-Lobačevskoga u pogledu jednostavnosti ne zaostaje, kako mi izgleda, iza dosad poznatih načina zasnivanja, naime ni iza zasnivanja B o l j a i j a i L o b a č e v s k o g koji su se služili graničnom sferom, ni prema zasnivanju K l a j n o v o m (*F.Klein*) pomoću projektivne metode. Pomenuta zasnivanja koristila su u bitnome kako prostor, tako i neprekidnost.

Da bi se olakšalo razumevanje, napraviću, prema mome radu „Osnove geometrije", pregled aksioma r a v n e geometrije kojima ćemo se u navedenim izlaganjima koristiti. Naime:

I. Aksiome veze

I_1. Za dve tačke A, B postoji uvek prava a koja pripada svakoj od ovih dveju tačaka A, B.

I_2. Za dve tačke A, B ne postoji više od jedne prave koja pripada svakoj od ovih dveju tačaka A, B.

I_3. Na svakoj pravoj postoje najmanje dve tačke. Postoje najmanje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj.

II. Aksiome rasporeda

II_1. Ako tačka B leži izmedju tačke A i tačke C, onda su A, B, C tri različite tačke prave i B leži takodje izmedju C i A.

II_2. Za dve tačke A i C na pravoj AC postoji najmanje jedna tačka B tako da C leži izmedju A i B.

II_3. Ma od koje tri tačke prave ne postoji više od jedne koja leži izmedju druge dve.

D e f i n i c i j a. Tačke koje leže izmedju dve tačke A i B nazivaju se takodje tačkama duži AB ili BA.

II_4. Neka su A, B, C tri tačke koje ne leže na pravoj liniji i a prava u ravni A, B, C koja ne prolazi ni kroz jednu od tačaka A, B, C; ako tada prava a prolazi kroz jednu od tačaka duži AB, ona izvesno takodje prolazi ili kroz jednu od tačaka duži BC ili kroz jednu od tačaka duži AC.

III. Aksiome podudarnosti

D e f i n i c i j a. Svaka se prava deli ma kojom svojom tačkom u dve poluprave ili polovine.

III_1. Ako su A i B dve tačke na pravoj a i, dalje, ako je A' tačka prave a', onda se na jednoj datoj polovini prave a', odredjenoj tačkom A', uvek može naći tačka B' tako da je duž AB podudarna ili jednaka duži $A'B'$, što se može označiti:

$$AB \equiv A'B'.$$

III_2. Ako je duž $A'B'$ podudarna duži AB i duž $A''B''$ podudarna istoj duži AB, onda je i duž $A'B'$ podudarna duži $A''B''$.

III_3. Neka su AB i BC dve duži na pravoj a bez zajedničkih tačaka i neka su , dalje, $A'B'$ i $B'C'$ dve duži bez zajedničkih tačaka na istoj ili drugoj pravoj a'; ako je tada $AB \equiv A'B'$ i $BS \equiv B'C'$ biće i

$$AC \equiv A'C'.$$

D e f i n i c i j a. Par polupravih h i k koje izlaze iz tačke A i zajedno ne čine pravu, nazvaćemo uglom i označićemo ga ili sa

$$\angle(h,k) \text{ ili sa } \angle(k,h).$$

Dalje, može se definisati pojam strane ravni u odnosu na neku pravu na osnovu aksiome II; tačke ravni koje u odnosu na h leže na istoj strani kao i k, a u isto vreme u odnosu na k na istoj strani kao i h, nazivaju se unutrašnjim tačkama ugla $\angle(h,k)$; one obrazuju ugao prostoru (unutrašnjost) ovog ugla.

III_4. Neka je dat ugao $\angle(h,k)$, prava a' i odredjena strana od a'. Neka h' označava polupravu prave a' koja izlazi iz tačke O': tada postoji jedna i samo jedna poluprava k', tako da je ugao $\angle(h,k)$ kongruentan ili jednak uglu $\angle(h',k')$, što ćemo izraziti znacima:

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k'),$$

i da u isto vreme sve unutrašnja tačke ugla $\angle(h',k')$ leže na datoj strani od prave a'.

Svaki je ugao podudaran samom sebi tj. uvek je

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k).$$

III_5 Ako za dva trougla ABC i $A'B'C'$ važe podudarnosti

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', i\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

onda uvek važi i podudarnost.

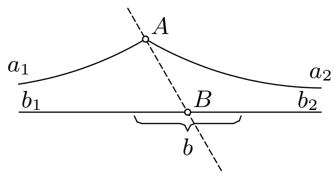
$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

Iz aksioma *I-III* lako se izvode stavovi o kongruenciji trouglova i o ravnokrakom trouglu, a u isto vreme se uvidja mogućnost da se spusti ili podigne normala kao i da se prepolovi data duž ili dati ugao. Naročito, isto kao i kod Euklida, iz tih aksioma sledi stav da je u svakom trouglu zbir dve strane veći od treće strane.

IV Aksioma o pravama koje se seku i koje se ne seku

Sada ćemo formulisati aksiomu koja u geometriji Boljaji-Lobačevskoga odgovara aksiomi paralelnih u euklidskoj geometriji:

Ako je b proizvoljna prava, a A tačka koja ne leži na njoj, uvek postoje dve poluprave a_1 i a_2 koje prolaze kroz tačku A i koje ne čine jednu istu pravu i ne seku pravu b, dok svaka poluprava koja leži u unutrašnjosti ugla obrazovanog sa a_1 i a_2 i izlazi iz tačke A, preseca pravu b.



D e f i n i c i j a. Neka je prava b razdeljena ma kojom svojom tačkom B u dve poluprave b_1 i b_2 i neka poluprave a_1, b_1 leže na jednoj strani, a a_2, b_2 na drugoj strani prave AB; tada ćemo polupravu a_1 nazvati paralelnom prema polupravoj b_1, a isto tako polupravu a_2 nazvaćemo paralelnom prema b_2; isto ćemo tako reći da su obe poluprave a_1 i a_2 paralelne prema pravoj b i da su obe prave, čije su poluprave a_1 i a_2 paralelne prema b.

Otuda neposredno sledi tačnost narednih činjenica:

Ako je neka prava ili poluprava paralelna prema drugoj pravoj ili polupravoj, onda je uvek i ova druga paralelna prama prvoj.

Ako su dve poluprave paralelne trećoj polupravoj, onda su one medjusobom paralelne.

D e f i n i c i j a. Svaka poluprava odredjuje kraj; o svim polupravama, koje su jedna drugoj paralelne, reći ćemo da odredjuju jedan i isti kraj. Polupravu koja izlazi iz tačke A i ima kraj α , označićemo uopšte (A, α). Prava ima uvek dva kraja. Pravu čiji su krajevi α i β, označićemo uopšte sa (α, β).

Ako su A, B i A', B' dva para tačaka i α i α' dva kraja takva da su duži AB i $A'B'$ medju sobom jednake, i ako je, osim toga, ugao koji obrazuju duž AB i poluprava(A, α) jednak uglu koji obrazuju duž $A'B'$ i poluprava (A', α'), onda je, što se lako vidi, uvek i ugao obrazovan od BA i (B, α) jednak uglu obrazovanom od $B'A'$ i (B', α'); ove dve figure $AB\alpha$ i $A'B'\alpha'$ nazivaju se kongruentnim.

Najzad, definišemo na poznati način pojam ogledalske slike;

D e f i n i c i j a. Ako iz jedne tačke spustimo normalu na pravu i ovu normalu produžimo preko njenog podnožja za duž njoj kongruentnu, onda ćemo dobijenu krajnju tačku nazvati ogledalskom slikom prvobitne tačke u odnosu na tu pravu. Ogledalske slike tačaka neke prave leže opet na pravoj; ovu poslednju pravu nazvaćemo ogledalskom slikom prvobitne prave.

§ 1. Pomoćni stavovi

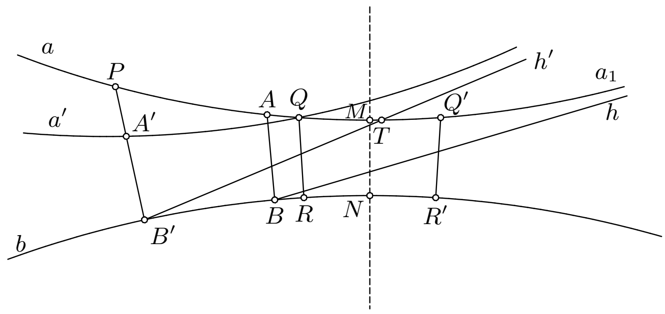
Dokazaćemo najpre redom naredne pomoćne stavove:

S t a v 1. Ako dve prave presecaju treću pravu pod jednakim saglasnim uglovima, onda one, sigurno, nisu paralelne.

D o k a z. Pretpostavimo suprotno, naime da su te dve prave u jednom smeru medju sobom paralelne. Ako tada izvedemo poluobrt oko sredine duži isečene na trećoj pravoj, tj. konstruišemo na drugoj strani te duži odgovarajući kongruentni trougao, sledovalo bi da su dve prve prave paralelne jedna drugoj i u drugom smeru, a ovo protivureči aksiomi IV.

S t a v 2. Ako su date ma koje dve prave a i b koje se ne seku, niti su paralelne, postoji uvek treća prava koja na obema istovremeno stoji normalno.

D o k a z. Ma iz koje dve tačke A i P prave a spustimo upravne AB i PB' na pravu b. Neka je normala PB' veća od normale AB; prenesimo tada AB na $B'P$ od tačke B'



do A', tako da tačka A' leži izmedju P i B'. Konstruišimo kroz tačku A' pravu a' koja preseca $B'A'$ u tački A pod istim uglom i u istom smislu kao što normala BA preseca pravu a u tački A. Dokazaćemo da ova prava a' nužno mora presecati pravu a.

Radi toga od dve poluprave, na koje tačka P deli pravu a, označimo sa a_1 onu na kojoj leži tačka A i povucimo tada iz B polupravu h paralelnu prema a_1. Dalje, neka je h' ona poluprava koja izlazi iz tačke B' pod istim uglom prema b i u istom smeru kao i poluprava h iz B. Pošto, prema stavu 1, poluprava h' nije paralelna sa pravom h, a zato nije paralelna ni sa polupravom a_1 i sigurno ne preseca h, onda ona, što se lako uvidja na osnovu aksiome IV, nužno preseca a_1; neka je T presečna tačka poluprave h' i a_1.

Pošto je, prema našoj konstrukciji, a' paralelno sa h', onda, prema aksiomi II_4, prava a' mora izlaziti iz trougla $PB'T$ kroz stranu PT, a time je dat traženi dokaz. Označićemo tačku preseka pravih a i a' sa Q.

Iz tačke Q spustimo normalu QR na b; zatim, prenesimo duž $B'R$ na pravu b od tačke B do tačke R' tako da je smer od B ka R' isti kao i smer od B' ka R. Isto tako prenesimo duž $A'Q$ od tačke A na pravu a u istom smeru do Q'. Nadjemo li tada sredine M i N duži QQ' i RR', biće prava MN koja spaja te tačke tražena zajednička normala na a i b.

Ustvari, iz kongruencije četvorouglova $A'B'QR$ i $ABQ'R'$ sledi jednakost duži QR i $Q'R'$ kao i činjenica da $Q'R'$ stoji upravno na b. Odatle, dalje, zaključujemo da su četvorouglovi $QRMN$ i $Q'R'MN$ kongruentni; time su postavljeno tvrdjenje kao i stav 2 potpuno dokazani.

S t a v 3. Ako su date ma koje dve medju sobom neparalelne poluprave, postoji uvek prava paralelna ovim dvema polupravama, tj. postoji uvek prava koja ima dva unapred data kraja α i β.

D o k a z. Povucimo ma kroz koju tačku O paralelene prema datim polupravama i prenesimo na ove paralele od tačke O jednake duži, napr. do A i B, tako da bude

$$OA = OB$$

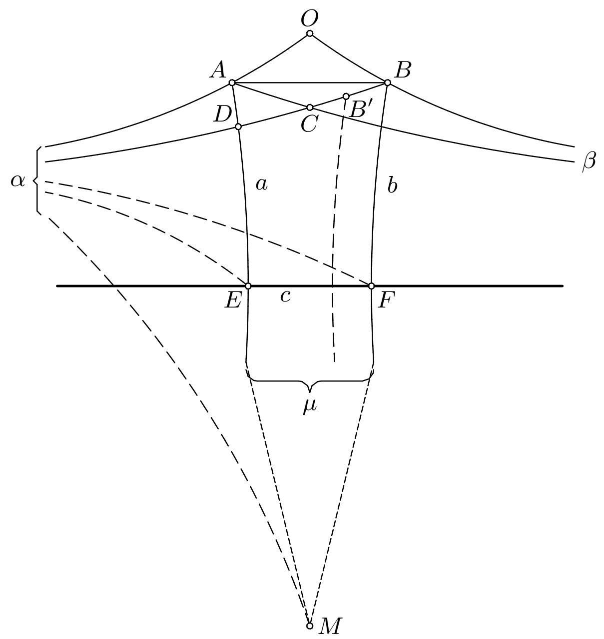
i da poluprava koja ide iz tačke O kroz A ima kraj α, a poluprava koja ide iz tačke O kroz B ima kraj β. Zatim, spojimo tačku A sa krajem β i prepolovimo ugao izmedju dveju polupravih koje izlaze iz tačke A; isto tako A; isto tako spojimo tačku B sa krajem α i prepolovimo ugao izmedju dveju polupravih koje izlaze iz tačke B. Prvu bisektrisu označimo sa A, drugu sa b. Iz kongruencije figura $OA\beta$ i $OB\alpha$ sledi jednakost uglova;

$$\angle(OA\beta) = \angle(OB\alpha),$$

$$\angle(\alpha A\beta) = \angle(\alpha B\beta),$$

a iz poslednje jednačine dobija se i jednakost uglova koji su postali polovljenjem, naime;

$$\angle(\alpha Aa) = \angle(aA\beta) = \angle(\alpha Bb) = \angle(bB\beta).$$



Najpre treba dokazati da se bisektrise a i b niti seku niti su medjusobom paralelne.

Pretpostavimo da se prave a i b seku u tački M. Pošto je trougao OAB, prema konstrukciji, ravnokrak, to se dobija

$$\angle BAO = \angle ABO,$$

a odatle, prema prethodnim jednačinama sledi

$$\angle BAM = \angle ABM;$$

prema tome je

$$AM = BM.$$

Spojimo li sad tačku M polupravom sa krajem α , to će iz poslednje segmentne jednačine i usled jednakosti uglova ugao (αAM) i ugao(αBM) slediti kongruencija figura αAM i αBM, a ova bi kongruencija imala za posledicu jednakost uglova ugao (αMA) i ugao (αMB). Pošto je ovaj zaključak, očigledno netačan, treba odbaciti pretpostavku da se bisektrise a i b seku.

Pretpostavimo, dalje, da su prave a i b paralelne; neka se kraj odredjen pomoću njih označi tada sa μ. Neka poluprava koja ide od B ka α preseca u tački C polupravu koja ide od A ka β, a pravu a u tački D; dokažimo tada jednakost duži DA i DB. Ustvari, u protivnom slučaju prenosimo duž DA na DB od tačke D, recimo, do tačke B' i spojmo B' polupravom sa μ.

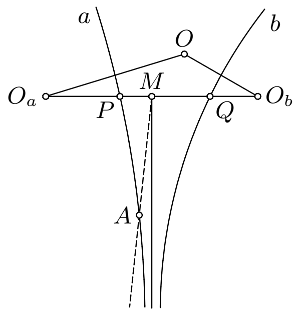
Iz kongruencije figura $\angle(DA\alpha)$ i $\angle(DB'\mu)$ sledila bi tada jednakost uglova $\angle(DA\alpha)$ i $\angle(DB'\mu)$, a stoga bi bili jednaki i uglovi $\angle(DB'\mu)$ i $\angle(DB\mu)$, što je nemoguće prema stavu 1.

Jednakost duži DA i DB ima sada za posledicu jednakost uglova $\angle(DAB)$ i $\angle(DBA)$, a pošto su, prema ranijem, i uglovi $\angle(CAB)$ i $\angle(CBA)$ jednaki, proizilazilo bi da su jednaki i uglovi $\angle(DAB)$ i $\angle(CAB)$. Ovaj zaključak, očigledno, nije tačan pa stoga treba odbaciti i pretpostavku da su prave a i b paralelne.

Pošto se, prema ovim izlaganjima, prave a i b ne seku niti su paralelne, onda, prema stavu 2, postoji prava c koja stoji upravno na obema pravima a, b, recimo u tačkama E i F. Tvrdim da je ova prava c tražena prava koja vezuje medju sobom oba data kraja α i β.

Radi dokaza ovog tvrdjenja pretpostavimo suprotno da c nema kraj α. Spojmo tada svaku od podnožnih tačaka E i F polupravom sa krajem α. Vezujući medju sobom sredine duži AB i EF, lako uvidjamo da je $EA = FB$. Iz toga sledi kongruencija figura αEA i αFB, a iz ove jednakost uglova $\angle(AE\alpha)$ i $\angle(BF\alpha)$ i otuda su i oni uglovi jednaki koje obrazuju sa pravom c poluprave koje izlaze iz tačaka E i F. Ovaj zaključak protivureči stavu 1. Slično proističe da c ima i kraj β. Time je naše tvrdjenje potpuno dokazano.

Stav 4. Neka su a i b dve paralelne prave, a O tačka u unutrašnjosti oblasti ravni obuhvaćene izmedju a i b. Dalje, neka je O_a ogledalska slika tačke O u odnosu na pravu a, a O_b ogledalska slika tačke O u odnosu na pravu b i neka je M sredina duži O_aO_b: tada ona poluprava, koja je polazeći od tačke M istovremeno paralelna sa a i b, stoji upravno na pravoj O_aO_b u tački M.



Dokaz. Pretpostavimo suprotno i podignimo normalu sa iste strane u tački m na O_aO_b. Neka prava O_aO_b preseca a i b u tačkama P i Q. Pošto je $PO < PQ + QO$, pa je zato $PO_a < PO_b$ i isto tako je $QO_b < QO_a$, mora tačka M nužno padati u unutrašnjost oblasti ravni obuhvaćene izmedju a i b. Stoga bi ona upravna u M morala presecati jednu od pravih a ili b; ako bi presecala npr. pravu a u tački A, sledilo bi da je $AO_a = AO$ i $AO_a = AO_b$, i prema tome bi bilo takodje $AO = AO_b$, tj. tačka A morala bi tačka A morala bi takodje biti jedna od tačaka na b, što protivureči pretpostavci stava.

S t a v 5. Ako su a, b, c tri prave koje imaju isti kraj ω i ako se ogledanja na ovim pravima označe po redu sa S_a, S_b, S_c, onda uvek postoji prava d sa istim krajem ω tako da uzastopna primena ogledanja na pravima a, b, c bude istovetna sa ogledanjem na pravoj d, što se izražava formulom:

$$S_c S_b S_a = S_d.$$

D o k a z. Pretpostavimo, najpre, da prava b pada u unutrašnjost oblasti ravni obuhvaćene izmedju a i c. Neka je tada O jedna tačka na pravoj b, a ogledalske slike na a i c tačke O neka se označe sa O_a i O_c. Označimo li sada sa d onu pravu koja spaja sredinu duži O_aO_c sa O_aO_c sa krajem ω, onda su, zbog stava 4, tačke O_a i O_c ogledalske slike na d, a otuda je operacija $S_dS_cS_bS_a$ takva da ne menja položaj tačke O_a kao ni one prave koja spaja O_a sa krajem ω. Pošto je ova operacija, sem toga, sastavljena od četiri ogledanja, onda iz stavova o kongruenciji proizilazi da je ova operacija identitet; otuda sledi naše tvrdjenje.

D r u g o, lako uvidjamo tačnost stava 5 u slučaju kad se poklapaju prave c i a. Ako je, naime, b' ona prava koja proizilazi iz b ogledanjem na pravoj a i ako označimo sa $S_{b'}$ ogledanje na b', odmah uvidjamo tačnost formule:

$$S_a S_b S_a = S_{b'}.$$

T r e ć e, pretpostavimo sad da prava c pada u unutrašnjost oblasti ravni obuhvaćene izmedju a i b. Tada, prema prvom delu ovog dokaza, postoji izvesno prava d', tako da važi formula:

$$S_a S_c S_b = S_{d'}.$$

Označimo li sa d ogledalsku sliku prave d' u odnosu na a, biće prema drugom delu ovog dokaza

$$S_c S_b S_a = S_a S_a S_c S_b S_a = S_a S_{d'} S_a = S_d.$$

Time je stav 5 potpuno dokazan.

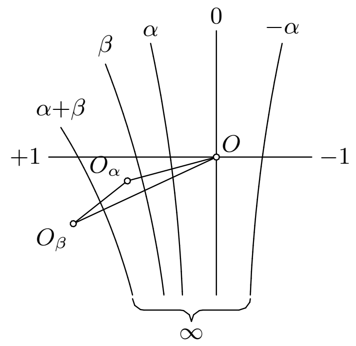
§ 2. Sabiranje krajeva

Uzmimo neku odredjenu pravu i označimo njene krajeve sa 0 i ∞. Na ovoj pravoj $(0, \infty)$ odaberimo neku tačku O i podignimo tada u O normalu; neka se označe krajevi ove normale sa $+1$ i -1.

Definisaćemo sada zbir dva kraja na ovaj način:

D e f i n i c i j a. Neka su α i β ma koja dva kraja različita od ∞; neka je, dalje, O_α ogledalska slika tačke O na pravoj (α, ∞), a O_β ogledalska slika O na pravoj (β, ∞); spojmo sredinu duži $O_\alpha O_\beta$ sa krajem ∞; drugi kraj tako konstruisane prave nazvaćemo zbirom krajeva α i β i označićemo sa $\alpha + \beta$.

Ako ogledнемо polupravu sa krajem α na pravoj $(0, \infty)$, kraj tako nastale poluprave označićemo sa $-\alpha$.



Lako se uveravamo u tačnost jednačina

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

$$1 + (-1) = 0,$$

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

Poslednja jednačina izražava komuttivni zakon za sabiranje krajeva. Da bi se dokazao asocijtivni zakon sabiranja krajeva, označimo po redu sa S_0, S_α, S_β ogledanja na pravima $(0,\infty)$, (α,∞), (β,∞); prema stavu 5 u §1, sigurno tada postoji prava (σ,∞) tako da za ogledanje S_σ na ovoj pravoj važi formula:

$$S_\sigma = S_\beta S_0 S_\alpha.$$

Pošto pri operaciji $S_\beta S_0 S_\alpha$ tačka O_α prelazi u tačku O_β, onda je tačka O_β nužno ogledalska slika tačke O_α na pravoj (σ,∞) i otuda je $\sigma = \alpha + \beta$, tj. važi formula

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha.$$

Neka γ isto tako označava neki kraj; ponovljena primena maločas nadjenih formula da je:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

a otuda je

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

i stoga takodje

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Tu skoro izvedena formula

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha$$

pokazuje, u isto vreme, da navedena konstrukcija zbira dva kraja ne zavisi od izbora tačke O na pravoj $(0, \infty)$. Ako sa O' označimo ma koju tačku prave (O, ∞) različitu od O i ako su O'_α, O'_β ogledalske slike tačke O' na pravima (α, ∞) i (β, ∞), onda je upravna na duži $O'_\alpha O'_\beta$ u njenoj sredini opet prava prava $(\alpha + \beta, \infty)$.

Navešćemo ovde još jednu činjenicu čije je poznavanje potrebno za naša izlaganja u §4.

Ako pravu (α, ∞) oglednemo na pravoj (β, ∞), dobija se prava $(2\beta - \alpha, \infty)$.

Ustvari, ako je P ma koja tačka one prave koja se dobija iz prave (α, β) ogledanjem na pravoj (β, ∞), onda ta tačka očigledno ostaje nepromenjena ako na nju primenimo ogledanja

$$S_\beta, S_0, S_{-\alpha}, S_0, S_\beta.$$

A na osnovu gornjih formula je:

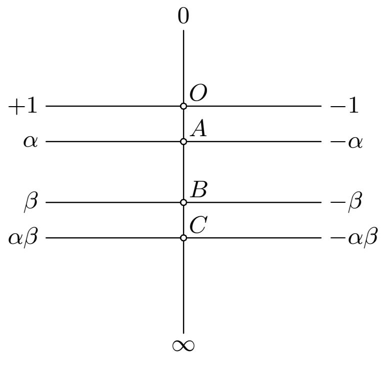
$$S_\beta S_0 S_{-\alpha} S_0 S_\beta = S_{2\beta-\alpha},$$

tj. onaj složeni proces istovetan je sa ogledanjem na pravoj $(2\beta - \alpha, \infty)$; stoga, tačka P mora ležati na toj poslednjoj pravoj.

§ 3. Množenje krajeva

Definisaćemo sad proizvod dva kraja na naredni način:

D e f i n i c i j a. Ako neki kraj leži na istoj strani prave $(0, \infty)$ kao i kraj $+1$, nazvaćemo taj kraj pozitivnim, a ako neki kraj leži na istoj strani prave $(0, \infty)$ kao i kraj -1, onda ćemo taj kraj nazvati negativnim.



Neka su sad α i β ma koja dva kraja različita od 0 i ∞. Obe prave $(\alpha, -\alpha)$ i $(\beta, -\beta)$ stoje upravno na pravoj $(0, \infty)$; neka one seku ovu pravu u tačkama A i B. Prenesimo, dalje, duž OA na pravu $(0, \infty)$ od tačke B do tačke C na taj način da na pravoj $(0, \infty)$ smer od O prema A bude isti kao i smer od B prema C; konstruišimo tada u tački C normalu na pravu

$(0, \infty)$ i nazovimo pozitivni ili negativni kraj ove normale proizvodom $\alpha\beta$ oba kraja α,β, prema tome da li su oba kraja pozitivna ili negativna i l i je jedan pozitivan, a drugi negativan.

Uzmimo najzad formulu

$$\alpha * 0 = 0 * \alpha = 0.$$

Na osnovu aksioma III_{1-3} o kongruenciji duži neposredno uvidjamo važenje formula

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

tj. z a m n o z e nj e k r a j e v a važi kako k o m u t a t i v n i tako i a s o c i j a t i v n i z a k o n.

Isto tako lako nalazimo da formule

$$1 * \alpha = \alpha, (-1)\alpha = -\alpha$$

važe i da ako krajevi α, β neke prave zadovoljavaju jednačinu

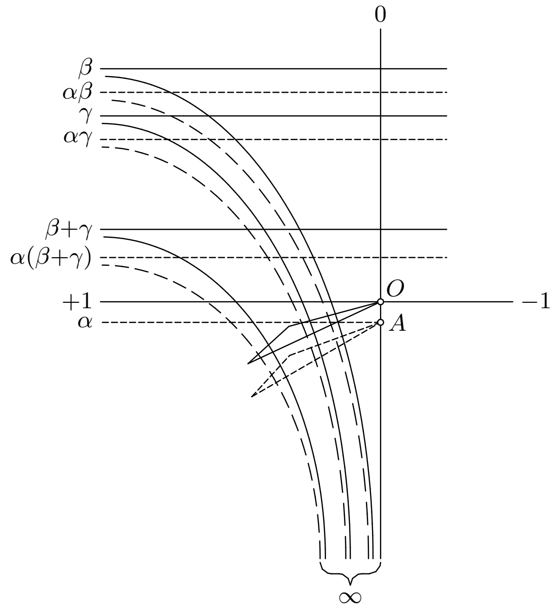
$$\alpha\beta = -1,$$

ova prava mora prolaziti kroz tačku O.

Mogućnost deljenja neposredno se uvidja; takodje za svaki pozitivni kraj Π uvek postoji pozitivni kraj (isto tako i negativni) čiji je kvadrat jednak kraju Π i koji se zato može označiti sa $\sqrt{\Pi}$.

Da bismo dokazali d i s t r i b u t i v n i z a k o n z a r a č u n s a k r a j e v i m a, konstruisaćemo najpre od krajeva β i γ kraj $\beta + \gamma$ na pokazani način u §2. Potražimo li zatim na ranije pokazani način krajeve $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha(\beta + \gamma)$, uvidećemo da se ova konstrukcija svodi na kongruentno preslikavanje ravni u samu sebe koje na pravoj $(0, \infty)$ izaziva pomeranje za duž OA. Ako prema tome pronadjemo konstrukcijom zbir krajeva $\alpha\beta$ i $\alpha\gamma$ polazeći iz tačke A mesto iz O, - što je dozvoljeno prema jednoj od primedaba u §2 - onda se ustvari za ovaj zbir dobija kraj $\alpha(\beta + \gamma)$. tj. važi formula

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$



§4. Jednačina tačke

Pošto smo u §2 - §3 uvideli da za račun sa krajevima važe ista pravila kao i za račun sa običnim brojevima, izgradjivanje geometrije ne pruža više nikakvih teškoća; ono se izvodi u opštim crtama na naredni način:

Ako su ξ,η krajevi ma koje prave, onda ćemo krajeve

$$u = \xi\eta,$$

$$v = \frac{\xi + \eta}{2}$$

nazvati koordinatama te prave. Važi osnovna činjenica:

Ako su α,β,γ tri kraja koja imaju takvu osobinu da je kraj $4\alpha\gamma - \beta^2$ pozitivan, onda sve prave čije koordinate u,v zadovoljavaju jednačinu

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

prolaze kroz istu tačku.

D o k a z. Ako, prema §2 - §3, konstruišemo krajeve

$$\chi = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}, \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}},$$

onda s obzirom na značenje koordinata u, v i pošto je svakako $\alpha \neq 0$, postavljena linearna jednačina dobija oblik:

$$(\chi\xi + \lambda)(\chi\eta + \lambda) = -1.$$

Ispitaćemo sada transformaciju proizvoljno promenljivog kraja ω, koja je data formulom
$$\omega' = \chi\omega + \lambda.$$
Radi toga posmatrajmo najpre transformacije
$$\omega' = \chi\omega i\omega' = \omega + \lambda.$$

Što se tiče prve transformacije, to će, očigledno, množenje proizvoljnog kraja ω konstantom χ biti, prema §3, jednako pomeranju ravni duž prave $(0, \infty)$ za neku duž zavisnu od χ.

A i poslednjoj transformaciji, tj. dodavanju kraja λ proizvoljno promenjivom kraju ω, odgovara neko, samo od λ zavisno, kretanje ravni u samoj sebi, naime kretanje se može shvatiti kao obrtanje ravni oko kraja ∞.

Da bi se ovo uvidelo, primetimo da, prema izlaganju na kraju §2, prava (ω, ∞) pomoću ogledanja na pravoj $(0, \infty)$ prelazi u pravu $(-\omega, \infty)$, a ova opet pomoću ogledanja na pravoj $(\frac{\lambda}{2}, \infty)$ prelazi u pravu $(\omega + \lambda, \infty)$, tj. dodavanje kraja λ proizvoljno promenljivom kraju ω jednako je ogledanjima uzastopno izvedenim na pravima $(0, \infty)$ i $(\frac{\lambda}{2}, \infty)$.

Iz ranije dokazanog sledi da se, ako su χ i η krajevi prave, pomoću formula
$$\xi' = \chi\xi + \lambda,$$
$$\eta' = \chi\eta + \lambda,$$
odredjuju krajevi takve prave koja proizilazi iz prave sa krajevima χ, η pomoću izvesnog kretanja ravni zavisnog samo od χ, λ. No, pošto gornja jednačina
$$(\chi\xi + \lambda)(\chi\eta + \lambda) = -1$$
za krajeve χ', η' ima za posledicu relaciju
$$\chi'\eta' = -1$$
i kako je prema primedbi u §3 ova relacija uslov da dotične prave prolaze kroz tačku O, vidimo da i sve prave (ξ, η) koje zadovoljavaju prvobitnu jednačinu
$$(\chi\xi + \lambda)(\chi\eta + \lambda) = -1$$
prolaze kroz jednu tačku; time je potpuno dokazan postavljeni stav.

Pošto smo saznali da je jednačina tačke u linijskim koordinatama linearna, lako je izvesti specijalni Paskalov stav za par pravih i Dezargov stav za perspektivno položene trouglove, kao i druge stavove projektivne geometrije. Isto tako se tada mogu bez teškoća izvesti poznate formule geometrije Boljaji-Lobačevskoga, a time se završava izgradjivanje ove geometrije pomoću aksioma $I - IV$.

Dodatak *IV*

O osnovama geometrije

Rimanova (*Riemann*) i Helmholcova (*Helmholtz*) ispitivanja osnova geometrije postakla su Li-a (*S.Lie*) da se prihvati problema aksiomatičke obrade geometrije polazeći od pojma grupe i dovela su ovog oštroumnog matematičara do sistema aksioma za koje je, pomoću svoje teorije transformacionih grupa, dokazao da su dovoljne za izgradjivanje geometrije.

Pri zasnivanju svoje teorije transformacionih grupa Li je uvek pretpostavljao da se funkcije koje definišu grupu mogu diferencirati i zato u Li-ovim izlaganjima ostaje neraspravljeno da li je pretpostavka diferencijabilnosti kod pitanja o aksiomama geometrije stvarno neizbežna ili je pak diferencijabilnost dotičnih funkcija samo posledica pojma grupe i ostalih geometrijskih aksioma. Usled svoga postupka Li je bio prinudjen i da izričito postavi aksiomu da je grupa kretanja proizvedena infinitezimalnim transformacijama. Ovi zahtevi kao i bitni sastavni delovi ostalih Li-ovih aksioma koji se odnose na prirodu jednačine koja definiše tačke istog rastojanja, mogu se izraziti čisto geometriski samo na veoma usiljen i komplikovan način i, osim toga, izgledaju uslovljeni samo analitičkom metodom kojom se koristio Li, a ne samim problemom.

Zato sam u ovom izlaganju težio da postavim za geometriju ravni takav sistem aksioma koji bi, isto tako zasnivajući se na pojnu grupe, sadržao samo proste i geometriski pregledne zahteve i naročito, ne bi pretpostavljao diferencijabilnost funkcija koje posreduju kretanje. Aksiome sistema koji sam ja postavio sadržane su kao specijalni sastavni delovi u Li-ovim aksiomama ili se kako ja mislim mogu iz njih neposredno izvesti.

Moje dokazivanje potpuno je različito od Li-ove metode: ja operišem poglavito pojmovima teorije množina tačaka, koje je izgradio G. Kantor (*G.Cantor*) i koristim stav K.Žordana (*C.Jordan*), po kome svaka ravna neprekidno zatvorena kriva bez dvojnih tačaka deli ravan na unutrašnju i spoljašnju oblast.

I u sistemu koji sam ja postavio pojedini su sastavni delovi, sigurno, izlišni; ipak sam odustao od šireg istraživanja ove okolnosti s obzirom da su ove formulacije aksioma proste i pre svega zato što sam hteo da izbegnem odveć komplikovano i geometrijski nepregledno dokazivanje.

U narednim izlaganjima obradiću aksiome samo za ravan, mada mislim da se može postaviti i za prostor analogan sistem aksioma koji omogućuje izgradjivanje prostorne geometrije na sličan način.

Daćemo unapred neke definicije.

Definicija. Pod brojnom ravni podrazumevamo običu ravan sa pravouglim koordinatnim sistemom x, y.

Kriva u ovoj brojnoj ravni koja nema dvojnih tačaka i koja je neprekidna uključujući i krajeve, naziva se Žordanovom krivom. Ako je Žordanova kriva zatvorena, onda se unutrašnjost oblasti brojne ravni ograničene tom krivom naziva Žordanovom oblašću.

Da bih izlaganje učinio lakšim i švatljivijim uzeću u ovom istraživanju užu definiciju ravni no što moje dokazivanje zahteva, naime pretpostaviću da se sve tačke naše geometrije mogu istovremeno uzajamno jednoznačno preslikati na tačke brojne ravni koje leže u konačnom ili na odredjenom njenom delu, tako da je svaka tačka naše geometrije karakterisana parom brojeva x, y . Ovo značenje pojma ravni formulisaću na ovaj način:

Definicija ravni.Ravan je sistem stvari koje se nazivaju tačkama i koje se mogu uzajamno jednoznačno preslikati na tačke brojne ravni koje leže u konačnom ili na neki delimični sistem tih tačaka; ovim tačkama brojne ravni (tj. slikama tačaka) koristićemo se istovremeno i za označavanje tačaka naše ravni.

Za svaku tačku A naše ravni postoje u brojnoj ravni Žordanove oblasti u kojima leži slika tačke A i čije sve tačke isto tako predstavljaju tačke naše ravni. Ove Žordanove oblasti nazivaju se okolinama tačke A.

Saka u okolini tačke A sadržana Žordanova oblast, u čijoj unutrašnjosti leži tačka A (slika tačke A), opet je okolina tačke A.

Ako je B ma koja tačka u okolini tačke A, onda je ova okolina u isto vreme i okolina tačke B.

Ako su A i B ma koje dve tačke naše ravni, to uvek postoji okolina tačke A, koja istovremeno sadrzi tačku B.

Definisaćemo kretanje kao uzajamno jednoznačnu transformaciju naše ravni u samu sebe. Očigledno je u samom početku da se mogu razlikovati dve vrste uzajamno jednoznačnih neprekidnih transformacija brojnih ravni u samu sebe. Naime, ako pretpostavimo u brojnoj ravni neku zatvorenu Žordanovu krivu koja ima izvesan smer obilaženja. Pretpostavićemo u sadašnjem istraživanju da je, ako primenimo transformaciju brojne ravni u samu sebe koje definiše kretanje, ovaj smer obilaženja isti kao i kod prvobitne Žordanove krive. Ova pretpostavka uslovljava ovu formulaciju pojma kretanja:

Definicija kretanja. Kretanje je takva uzajamno jednoznačna neprekidna transformacija tačaka brojne ravni u sebe pri kojoj smer obilaženja zatvorene Žordanove krive ostaje uvek isti. Transformacija obrnuta transformaciji kretanja opet je kretanje.

Kretanje pri kome jedna tačka M ostaje nepromenjena naziva se obrtanjem oko tačke M.

Posle uvodjenja pojma "ravni"i "kretanja", postavićemo ove tri aksiome:

Aksioma *I*. Ako se uzastopno izvedu dva kretanja, dobivena transformacija ravni u samu sebe opet je kretanje.

To ćemo kratko reći:

Aksioma *I*. Kretanja obrazuju grupu.

Aksioma *II*. Ako su A i M dve proizvoljne, medju sobom različite tačke ravni, onda se tačka A uvek može dovesti obrtanjem oko M u beskonačno mnogo različitih položaja.

Nazovemo li ukupnost ovih tačaka koje proizilaze iz jedne tačke različite od M pomoću svih obrtanja oko M istinskim krugom u našoj ravnoj geometriji, možemo iskaz aksiome II ovako, formulisati:

A k s i o m a II. Svaki istinski krug sastoji se iz beskonačno mnogo tačaka.

Pre poslednje, još potrebne aksiome postavićemo narednu definiciju:

D e f i n i c i j a. Neka je AB neki odredjeni par tačaka u našoj geometriji; označićemo istim slovima i slike ovog para tačaka u brojnoj ravni. Ograničimo oko tačaka A i B u brojnoj ravni po jednu okolinu α i β. Ako neka tačka A^* pada u okolinu α, a istovremeno tačka B^* pada u okolinu β, reći ćemo: par tačaka A^{*B^*} leži u okolini $\alpha\beta$ para AB. Iskaz da je ova okolina $\alpha\beta$ proizvoljno mala treba da znači da je α proizvoljno mala okolina tačke A, a istovremeno β proizvoljno mala okolina tačke B.

Neka je ABC odredjena trojka tačaka u našoj geometriji; istim slovima ćemo označiti i slike ove trojke tačaka u brojnoj ravni. Ograničimo oko tačaka A,B,C u brojnoj ravni po jednu okolinu α,β,γ. Ako tačka A^* pada u okolinu α, a u isto vreme tačka B^* pada u okolinu β, a tačka C^* u okolinu γ, reći ćemo: trojka tačaka $A^*B^*C^*$ leži u okolini $\alpha\beta\gamma$ trojke ABC. Iskaz da je ova okolina $\alpha\beta\gamma$ proizvoljno mala treba da znači da je α proizvoljno mala okolina tačke A i istovremeno β proizvoljno mala okolina tačke B, a γ proizvoljno mala okolina tačke C.

Pri upotrebi reči "par tačaka"i "trojka tačaka"ne pretpostavlja se da su tačke para tačaka ili trojke tačaka jedna od druge različite.

A k s i o m a III. Ako postoji kretanje kojim se može prevesti trojka tačaka koja se nalazi u proizvoljnoj blizini trojke tačaka ABC, u proizvoljnu blizinu trojke tačaka $A'B'C'$, onda uvek postoji takvo kretanje kojim trojka tačaka ABC prelazi tačno u trojku tačaka $A'B'C'$.

Iskaz ove aksimoe ukratko ćemo ovako izraziti:

A k s i o m a III. Kretanja obrazuju zatvoreni sistem.

Ako u aksiomi III dopustimo da se izvesne tačke trojke tačaka poklapaju, lako se dobijaju neki specijalni slučajevi aksiome III koje ćemo posebno istaći na ovaj način:

Ako postoje obrtanja oko tačke M kojima se mogu prevesti parovi tačaka koji leže u proizvoljnoj blizini para tačaka AB u proizvoljnoj blizini para tačaka $A'B'$, onda uvek postoji i takvo obrtanje oko tačke M kojim par tačaka AB prelazi tačno u par tačaka $A'B'$.

Ako postoje kretanja kojima se parovi tačaka koji leže u proizvoljnoj blizini para tačaka AB mogu prevesti u proizvoljnu blizinu para tačaka $A'B'$, to uvek postoji i takvo kretanje kojim par tačaka AB prelazi tačno u par tačaka $A'B'$.

Ako postoje obrtanja oko tačke M kojima se tačke koje leže u proizvoljnoj blizini tačke A mogu prevesti u proizvoljnu blizinu tačke A', to uvek postoji i takvo obrtanje oko tačke M kojim tačka A prelazi tačno u tačku A'.

Ovaj poslednji specijalni slučaj aksiome III primenjivaću često u narednom dokazivanju, označavajući pri tome obrtnu tačku slovom M, a ne A.

Dokazaću sad ovo tvrdjenje:

R a v n a g e o m e t r i j a u k o j o j s u a k s i o m e $I-III$ z a d o v o l j e n e i l i j e E u k l i d o v a i l i B o l j a i - L o b a č e v s k o g a r a v n a g e o m e t r i j a.

Ako hoćemo da dobijemo jedino Euklidovu geometriju, treba samo aksiomu I dopuniti zahtevom da grupa kretanja ima invarijantnu podgrupu. Ova dopuna zamenjuje aksiomu paralelnih. Hteo bih sad ukratko da skiciram tok misli mog daljeg dokazivanja.

U okolini ma koje tačke M konstruiše se pomoću naročitog postupka neki odredjeni oblik kk od tačaka i na njemu neka tačka K (§1 - §2), a zatim podvrgava ispitivanju istinski krug χ opisan oko tačke M, koji prolazi kroz tačku K (§3). Dobiva se da je istinski krug χ zatvorena i u sebi gusta, tj. perfektna množina tačaka.

Najbliži cilj naših izlaganja sastoji se u tome da se pokaže da je istinski krug χ zatvorena Žordanova kriva. Ovo se postiže na taj način, što najpre uvidimo mogućnost rasporeda tačaka istinskog kruga (§4 - §5), zatim otuda zaključujemo na mogućnost uzajamnog jednoznačnog preslikavanja tačaka χ na tačke običnog kruga (§6 - §7) i, najzad, dokazujemo da ovo preslikavanje nužno mora biti neprekidno (§8). Posle toga se dobija i da je prvobitno konstruisani oblik kk od tačaka identičan sa istinskim krugom (§9). Dalje, važi stav da je svaki istinski krug koji leži u unutrašnjosti kruga χ takodje zatvorena Žordanova kriva.

Preći ćemo sada na ispitivanje grupe transformacija koje pretrpi istinski krug u sebi (§13) pri obrtanjima ravni oko tačke M. Ova grupa ima ova svojstva: 1) Svako obrtanje oko tačke M koje ne menja položaj j e d n o j tački istinskog kruga, ne menja položaj ni jednoj tački tog kruga (§14). 2) Postoji uvek jedno obrtanje oko tačke M koje ma koju datu tačku kruga χ prevodi u ma koju drugu tačku toga kruga (§15). 3) Grupa obrtanja oko tačke M je neprekidna (§8). Ova tri svojstva potpuno odredjuju strukturu grupe transformacija koje odgovaraju svima obrtanjima istinskog kruga u sebi. Naime, postavićemo ovaj stav: grupa svih transformacija istinskog kruga χ u sebe koje su obrtanja oko M jeste holoedarski-izomorfna sa grupom običnih obrtanja običnog kruga u sebi (§17 - §18).

Ispitajmo sada grupu transformacija s v i h tačaka naše ravni pri obrtanju oko tačke M. Pri tome važi stav da osim identiteta ne postoji ni jedno obrtanje ravni oko tačke M pri kome bi ostale nepokretne sve tačke nekog istinskog kruga μ (§19). Sada uvidjamo da je s v a k i istinski krug zatvorena Žordanova kriva i dobivamo formule za transformacije grupe svih obrtanja oko tačke M (§20 - §21). Najzad se lako dobijaju stavovi: ako ma koje dve tačke pri nekom kretanju ravni ostaju nepokretne, onda sve tačke ostaju nepokretne, tj. kretanje je identitet. Svaka tačka ravni može se podesnim kretanjem prevesti u svaku drugu tačku ravni (§22).

Naš najvažniji dalji cilj sastoji se u tome da se u našoj geometriji definiše pojam istinske prave i da se razviju nužne osobine ovog pojma za izgradjivanje geometrije. Najpre se definišu pojmovi poluobrtanja i sredine duži

(§23). Duž ima najviše jednu sredinu (§24)i ako se za neku duž zna da ima sredinu, otuda sledi da i svaka manja duž ima sredinu (§25 - §26).

Da bi se procenio položaj sredine duži, potrebni su nam neki stavovi o istinskim krugovima koji se dodiruju; pre svega, stvar se svodi na to da se konstruišu dva medju sobom kongruentna kruga koji jedan drugog dodiruju spolja u jednoj i samo jednoj tački (§27). Izvešćemo, dalje, jedan opšti stav o krugovima koji se dodiruju iznutra (§28), a zatim stav o specijalnom slučaju kada krug koji iznutra dodiruje drugi prolazi kroz centar dodirnutog kruga (§29).

Uzmimo sada za osnovu kao jediničnu duž neku odredjenu dovoljno malu duž; konstruišimo polovljenjem i poluobrtanjem sistem tačaka takve vrste, da svakoj tački ovog sistema odgovara odredjeni broj a koji je racionalan i ima kao imenilac samo neki stepen od 2 (§30). Pošto se postavi zakon ove korespondencije (§31), tačke dobijenog sistema tačaka se medju sobom rasporeduju,pri čemu važe raniji stavovi o krugovima koji se dodiruju (§32). Sada polazi za rukom da se dokaže da tačke koje odgovaraju brojevima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... konvergiraju prema tački O (§33). Ovaj se stav postupno uopštava dok najzad ne uvidimo da svaki niz tačaka našeg sistema konvergira ako konvergira odgovarajući niz brojeva (§34 - §35).

Posle ovih priprema može se definisati istinska prava kao sistem tačaka koji se dobiva od dve tačke uzete za osnovu, ako se stalno uzimaju sredine, izvode poluobrtanja i dodadu mesta nagomilavanja svih dobijenih tačaka (§36). Zatim možemo dokazati da je istinska prava neprekidna kriva (§37), da nema dvojnih tačaka (§38)i da ma sa kojom drugom istinskom pravom ima najviše jednu zajedničku tačku (§39). Pokazuje se, dalje, da istinska prava preseca svaki krug koji je opisan oko neke njene tačke, a otuda sledi da se dve proizvoljne tačke ravni mogu uvek spojiti istinskom pravom (§40). Takodje uvidjamo da u našoj geometriji važe stavovi o kongruenciji, pri čemu se dva trougla prikazuju samo tada kongruentnim, ako imaju i isti smer obilaženja (§41).

Što se tiče uzajamnog položaja sistema svih istinskih pravih, treba razlikovati dva slučaja, prema tome da li važi aksioma paralelnih ili kroz svaku tačku prema datoj pravoj postoje dve prave koje razdvajaju prave koje seku od pravih koje ne seku. U prvom slučaju dolazimo do euklidske geometrije, a u drugom do geometrije Boljaji-Lobačevskog (§42).

§1. Neka je M ma koja tačka u našoj geometriji i u isto vreme njena slika u brojnoj ravni x, y. Naš najbliži cilj je tada da konstruišemo oko M neke oblike od tačaka koji će se najzad pokazati kao istinski krugovi oko tačke M.

Opišimo u brojnoj ravni oko tačke M "brojni krug", tj. krug $\mathfrak{K}$ tako mali, u smislu obične odredbe mere, da su sve tačke na tom krugu $\mathfrak{K}$ i u unutrašnjosti njega takodje slike tačaka i da postoje tačke i van kruga $\mathfrak{K}$. Tada u unutrašnjosti kruga $\mathfrak{K}$ sigurno postoji takav koncentrični krug F u odnosu na $\mathfrak{K}$, da sve tačke slike u unutrašnjosti ovog kruga F ostaju u unutrašnjosti kruga $\mathfrak{K}$ pri proizvoljnim obrtanjima oko M.

Da bi se ovo dokazalo, posmatrajmo u brojnoj ravni beskonačni niz koncentričnih krugova F1, F2, F3,... čiji poluprečnici opadaju i konvergiraju prema O i pretpostavimo tada, nasuprot tvrdjenju, da u svakom od tih krugova postoji takva tačka slika koja pri nekom obrtanju oko M dolazi na mesto koje leži van kruga $\Re$ ili se pomera na periferiju kruga $\Re$: neka je A_i takva slika tačke u krugu Fi, koja pri obrtanju $\triangle_i$ prelazi na mesto koje leži van kruga $\Re$ ili na njegovu periferiju. Zamislimo tada da je iz tačke u M u svaku tačku A_i povučen poluprečnik r_i dotičnog brojnog kruga Fi i uočimo krivu γ_i u koju prelazi poluprečnih r_i pri obrtanju $\triangle_i$. Pošto ova kriva γ_i ide iz tačke do neke odredjene tačke van kruga $\Re$ ili do neke tačke na njegovoj periferiji, to ona nužno mora pogadjati periferiju kruga $\Re$; neka je B_i jedna od ovih presečnih tačaka i neka je B mesto zgušnjavanja tačaka preseka B_1, B_2, B_3,... Dalje, neka je uopšte C_i ona tačka na poluprečniku r_i koja pri obrtanjuχ. $\triangle_i$ prelazi u B_i. Pošto tačke C_1, C_2, C_3,... konvergiraju prema tački M, to, prema aksiomi III, postoji obrtanje oko tačke M, pri kome tačka B, koja leži na periferiji kruga $\Re$, prelazi u tačku M. Ovo protivureči ranije definisanom pojmu kretanja.

§2. Neka je, kao što je već u §1 ustanovljeno, F brojni krug u unutrašnjosti kruga $\Re$ koji ispunjava uslove tamo dokazanog stava tako da sve tačke slike u unatrašnjosti F pri obrtanju oko tačke M ostaju u unutrašnjosti kruga $\Re$, neka je, dalje, k brojni krug u unutrašnjosti F čije sve tačke pri obrtanjima oko tačke M ostaju u unutrašnjosti F. Tada ćemo one tačke brojne ravni, koje pri ma kakvom obrtanju oko tačke M proizilaze iz tačaka u unutrašnjosti kruga k ili iz tačaka njegove periferije, ukratko označiti pokrivenim. Iz aksiome III neposredno sledi da pokrivene tačke obrazuju zatvorenu množinu tačaka. Dalje, neka je A neka odredjena tačka van $\Re$ koja je slika neke tačke naše geometrije. Ako se sada nepokrivena tačka A' može spojiti sa A Žordanovom krivom, koja se sastoji isključivo iz nepokrivenih tačaka, onda ćemo reći da tačka A' leži van kk. Naročito sve tačke koje leže van brojnog kruga F, sigurno leže van kk. Reći ćemo za svaku pokrivenu tačku, u čijoj se proizvoljno maloj okolini nalaze tačke van kk, da leži na kk. Tačke na kk obrazuju zatvorenu množinu tačaka. Za one tacke J, koje niti su van kk, niti su na kk, reći ćemo da su u unutrašnjosti kk. Naročito sve pokrivene tačke, u čijoj proizvoljnoj blizini ne leže nepokrivene tačke, kao napr. tačka M i tačke u unutrašnjosti kruga k, sigurno leže u unutrašnjosti kk.

§3. Kad se uzme u obzir da, prema definiciji kruga F, tačka A pri obrtanjima oko tačke M nikad ne dospeva u unutrašnjost kruga F, uvidjamo da, pri svakom obrtanju oko tačke M, tačke koje leže van kk opet prelaze u tačke van kk, dalje, tačke na kk opet prelaze u tačke na kk i tačke koje leže u unutrašnjosti kk opet prelaze u tačke unutrašnjosti kk.

Svaka tačka na kk, prema našoj postavci, jeste pokrivena tačka, a pošto znamo da tačke u unutrašnjosti kruga k leže takodje u unutrašnjosti kruga kk, to otuda zaključujemo ovo:

Za svaku tačku K na kk sigurno postoji obrtanje Δ oko tačke M, pomoću koga tačka K', koja leži na periferiji kruga k, dospeva u tačku K. Poluprečnik MK' brojnog kruga k prelazi obrtanjem Δ oko tačke M u Žordanovu krivu koja spaja tačku M sa tačkom K na kk i koja se inače cela prostire u unutrašnjosti kk.

U isto vreme vidimo da najmanje jedna tačka periferije brojnog kruga k, naime tačka K', leži na kk.

Spojimo tačku A koja leži van kk ma kojom Žordanovom krivom sa tačkom M i označimo sad sa K onu tačku ove Žordanove krive koja leži na kk i ima takvu osobinu da sve tačke koje leže na toj Žordanovoj krivoj imedju tačaka K i A leže van kk.Zatim, razmotrimo sistem svih tačaka koje proizilaze iz tače K obrtanjem oko tačke M, tj. razmotrimo istinski krug χ koji je opisan oko M i koji prolazi kroz tačku K. Sve tačke ovog istinskog kruga su na kk.

Istinski krug, prema aksiomi II, sadrži beskonačno mnogo tačaka. Ako je K^* tačka zgušnjavanja tačaka istinskog kruga Označava li K_1 ma koju tačku istingskog kruga χ, onda , ako izvedemo ono obrtanje oko tačke M koje prevodi tačku K^* u tačku K_1, sledi da je i tačka K_1 tačka zgušnjavanja istinskog kruga χ. Na taj način dobivamo stav:

Istinski krug χ je zatvorena i u sebi gusta, tj. perfektna mno-žina tačaka.

§4. Najvažniji cilj narednih izlaganja sastoji se u tome da se pokaže da je istinski krug zatvorena Žordanova kriva. Osim toga će se pokazati da se istinski krug χ poklapa sa tačkama na kk.

Dokažimo najpre, da se ma koje dve tačke K_1, K_2 istinskog kruga χ mogu uvek medjusobno spojiti kako Žordanovom krivom, koja, izuzev krajnjih tačaka, cela leži u unutrašnjosti kk, tako i onom Žordanovom krivom koja se, izuzev krajnjih tačaka, cela prostire van kk.

Ustvari, ako, shodno gornjim izlaganjima, povučemo Žordanove krive MK_1 i MK_2, koje u unutrašnjosti kk vezuju središnu tačku M sa tačkama K_1 i K_2, i ako, polazeći od M odredimo na krivoj MK_1 poslednju tačku P, koja teži na MK_2, onda komad PK_1 prve Žordanove krive i komad PK_2 druge Žordanove krive obrazuju prvu od traženih spojnih krivih.

Posmatrajmo, s druge strane, obrtanja oko tačke M pri kojim tačka K prelazi u tačku K_1, odn., u tačku K_2; tačke A_1 i A_2, koje se pri tome dobivaju iz tačke A, leže, prema §3, van kk i zato se mogu spojiti sa van kk sa tačkom A. Od ovih spojnih krivih i onih Žordanovih krivih, koje pri obrtanjima nastaju od Žordanove krive AK konstruisane u §3, lako se može sastaviti jedna Žordanova kriva izmedju K_1 i K_1 koja cela leži van kk.

§5. Ovaj stav koji smo maločas dokazali omogućava nam da tačke istinskog kruga χ rasporedimo na odredjeni način.

Neka su K_1, K_2, K_3, K_4 ma koje četiri različite tačke istinskog kruga χ. Spojimo tačke K_1 i K_2 s jedne strane Žordanovom krivom koja cela (tj. i z m e dj u tačaka K_1 i K_2) leži u unutrašnjosti kk, a s druge strane takvom krivom koja cela leži van kk. Pošto su obe ove spojne krive, računajući i njihove krajnje tačke K_1 i K_2, neprekidne, to one zajedno obrazuju zatvorenu Žordanovu krivu. Jednu od krivih, dobivenih na taj način, polazeći od tačaka K_1 i K_2, uvek ćemo označavati sa $\overline{K_1K_2}$. Cela brojna ravan, iz koje je isključena kriva $\overline{K_1K_2}$, raspada se, prema poznatom Žordanovom stavu, na dva područja, naime raspada se na unutrašnjost i spoljašnjost ove krive $\overline{K_1K_2}$. Što se tiče položaja tačaka K_3 i K_4, moguća su sad dva slučaja: prvo, tačke K_3 i K_4nisu razdvojene krivom $\overline{K_1K_2}$, tj. one ili obe leže u unutrašnjosti te krive ili obe van nje; drugo, tačke K_3 i K_4 razdvojene su krivom $\overline{K_1K_2}$, tj. K_3 leži u unutrašnjosti krive $\overline{K_1K_2}$, a van nje, ili obrnuto.

Ako spojimo tačke K_1 i K_2 ma kako drukčije jednim putem koji se prostire u unutrašnjosti kk i jednim koji se prostire van kk, lako uvidjamo da, što se tiče položaja tačaka K_3 i K_4 prema novodobivenoj zatvorenoj Žordanovoj krivoj $\overline{\overline{K_1K_2}}$, sigurno nastupa isti slučaj kao maločas. U stvari ako se uzme prvi slučaj i ako se obe tačke K_3 i K_4 nalaze u unutrašnjosti krive $\overline{K_1K_2}$ spojimo tačke K_3 i K_4 putem W koji leži u unutrašnjosti kk. Ako bi ovaj put izlazilo iz unutrašnjosti zatvorene krive $\overline{K_1K_2}$, morao bi se najzad u daljem svom toku vratiti u ovu unutrašnjost; zato se, sigurno, može deo ovog puta W, koji leži van krive $\overline{K_1K_2}$, zameniti putem koji leži blizu dotičnog komada krive $\overline{K_1K_2}$ i koji se ceo prostire kako u unutrašnjosti kk, tako i u unutrašnjosti $\overline{K_1K_1}$: na taj način se dobiva spojni put W^* izmedju tačaka K_3 i K_4, koji se isto tako ceo prostire i u unutrašnjosti kk i u unutrašnjosti $\overline{K_1K_1}$. Obrazujemo li iz dela krive $\overline{K_1K_2}$ koji leži u unutrašnjosti kk i dela krive $\overline{\overline{K_1K_2}}$ koji leži van kk novu zatvorenu Žordanovu krivu $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$, onda je W^* očigledno put koji vezuje tačke K_3 i K_4 u unutrašnjosti ove nove krive $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$, ne presecajući je tj. tačke K_3 i K_4 neće biti razdvojene krivo $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$. Iz toga, prema odgovarajućoj konstrukciji izvedenoj van kk, sledi da tačke K_3 i K_4 nisu razdvojene krivom $\overline{\overline{K_1K_2}}$. Mogli bismo zato u prvom slučaju prosto reći: par tačaka K_3 i K_4 nije razdvojen parom tačaka K_1,K_2. Otuda sledi da se i u drugom slučaju može prosto reći: par tačaka K_3, K_4 razdvojen je parom tačaka K_1, K_2.

Izvedimo sada ma koje obrtanje oko tačke M pri kom tačke K_1, K_2, K_3, K_4 prelaze u tačke K_1', K_2', K_3', K_4'. Uzmimo u obzir da je obrtanje, po definiciji, neprekidna i uzajamno jednoznačna transformacija brojne ravni koja prevodi tačke koje su u unutrašnjosti kk u tačke koje su u unutrašnjosti kk, a tačke van kk u tačke van kk. Otuda sledi da su parovi tačaka K_1', K_2', K_3', K_4' razdvojeni jedan drugim ili ne, prema tome da li parovi tačaka K_1, K_2, K_3, K_4 razdvajaju jedan drugi ili ne, tj. uzajamni položaj parova tačaka K_1, K_2, K_3, K_4 ostaje nepromenjen pri proizvoljnom obrtanju oko tačke M.

Na sličan način izvodimo i druge stavove koji odgovaraju ostalim poznatim činjenicama u pogledu uzajamnog položaja parova tačaka na periferiji običnog brojnog kruga. Ti stavovi su:

Ako su tačke K_1, K_2 razdvojene tačkama K_3, K_4, biće i tačke K_3, K_4 razdvojene tačkama K_1,K_2. Ako su tačke K_1, K_4 razdvojene tačkama K_2,

K_5, a tačke K_2, K_4 tačkama K_3, K_5, biće i tačke K_1, K_4 razdvojene tačkama K_3, K_5.

Time smo došli do ovog rezultata:

Tačke istinskog kruga χ rasporedjene su ciklično tj. s obzirom na uzajamno razdvajanje parova tačaka, one su rasporedjene isto kao i tačke običnog brojnog kruga. Ovaj raspored je invarijantan u odnosu na obrtanja istinskog kruga χ oko centra M.

§6. Jednu dalju važnu osobinu istinskog kruga χ izrazićemo ovako:

Ma za koji par tačaka istinskog kruga χ postoji uvek par tačaka tog istog kruga χ koji razdvaja dati par tačaka.

Označimo sa K_∞ neku stalnu tačku istinskog kruga χ; ma o kojim drugim trima tačkama K_1, K_2, K_3 istinskog kruga χ rećićemo tada da je jedna od njih, K_2, leži izmedju drugih dveju, K_1 i K_3 ili pak ne leži izmedju njih, prema tome da li je par K_1, K_3 razdvojen parom tačaka K_2, K_∞ ili nije razdvojen.

Pretpostavimo, nasuprot gornjem tvrdjenju, da su tačke K i K' dve tačke istinskog kruga koje nisu razdvojene nijednim parom tačaka; tada iz naše postavke sigurno sledi i da izmedju tih tačaka ne leži ni jedna tačka kruga χ. Dalje, možemo pretpostaviti da postoji takva tačka K_2 da par tačaka K_1, K_1' bude razdvojen parom tačaka K, K_∞; naime, u suprotnom slučaju zamislićemo u toku daljeg izlaganja da su uloge tačaka K i K' razmenjene. Zatim, izaberimo na istinskom krugu χ beskonačan niz tačaka R koje konvergiraju prema tački K i spojmo tačku K_1 sa K' nekom krivom koja se prostire u unutrašnjosti kk i drugom krivom koja se prostire van kk. Sasatavljanjem ovih dveju krivih dobivamo zatvorenu Žordanovu krivu $\overline{K_1K'}$ koja K_∞ razdvaja od K, pa stoga mora razdvajati i od beskonačno mnogo tačaka niza R konvergentnog prema K. Neka je K_2 jedna od ovih tačaka niza R. Pošto tačka K_2 leži izmedju K_1 i K', a nemože ležati izmedju K i K', onda tačka K_2 mora ležati izmedju K_1 i K. Spojimo li sad, analogno prethodnom, K_2 sa K' zatvorenom Žordanovom krivom $\overline{K_2K'}$, doći ćemo isto tako do neke tačke K_2 i K itd. Na ovaj način ćemo dobiti beskonačni niz tačaka K_1,K_2, K_3,..., od kojih svaka leži izmedju prethodne tačke i K i koje konvergiraju prema tački K.

Izvedimo sada jedno obrtanje oko tačke M pri kome tačka K prelazi u jednu od tačaka K_1, K_2, K_3,..., recimo u tačku K_i. Pri ovom obrtanju tačka K' prelazi u tačku K_i'. Pošto, prema našoj pretpostavci, tačke K i K' nisu razdvojene nijednim parom tačaka, biće isti slučaj i sa parom tačaka K_i, K_i'. Usled toga se tačka K_i' mora ili poklopiti sa K_{1i-1} ili sa K_{i+1} ili ležati izmedju tačaka K_{i-1} i K_{i+1}; u svakom slučaju tačka K_i' leži izmedju K_{i-2} i K_{i+2}, a zato i beskonačni niz tačaka K_1,K_3',K_5,K_7',K_9,K_{11}',... ima sigurno osobinu da svaka tačka ovog niza leži izmedju prethodne tačke i tačke K.

Sad ćemo pokazati da i tačke K_3', K_7', K_{11}',... moraju konvergirati prema tački K. Ustvari, ako bi tačke K_3', K_7', K_{11}',... imale kao mesto zgušnjavanja neku tačku Q, različitu od K, onda o-daberimo od njih neku tačku

K_l'. Pošto sve tačke K_{l+4}',K_{l+8}',K_{l+12}',... leže izmedju K_l' i K, postoji uvek zatvorena Žordanova kriva $K_l'K$ koja razdvaja tačku K_∞od tačaka K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}',..., a otuda i od tačke Q, tj. tačka Q mora ležati izmedju K_l' i K. Zbog rasporeda koji tačke K_i imaju prema tačkama K_l' odatle sledi da tačka Q leži i izmedju svih tačaka K_1,K_5,K_9,... s jedne strane i tačke K s druge strane. Prema tome, zatvorena Žordanova kriva $\overline{QK_\infty}$ morala bi razdvajati sve tačke K_1, K_5, K_9,... od tačke K; ali tada tačke K_1, K_5, K_9,... ne bi mogle konvergirati prema K, kako bi to trebalo da bude.

Posmatrajmo sad tačke K_3, K_7, K_{11},... koje konvergiraju prema$K$ i tačke K_3',K_7',K_{11}',... koje isto tako, prema već dokazanom, konvergiraju prema K. Pošto nekim obrtanjem oko M tačka K prelazi u K_i i u isto vreme tačka K' prelazi u K_i', to bi prema aksiomi III, moralo postojati i tako obrtanje koje bi prevodilo K i u isto vreme K' u zajedničku tačku konvergencije K. A ovo protivureči definiciji obrtanja. Na taj način, opovrgavanjem naše pretpostavke potpuno je dokazan stav postavljen u početku ovog §6.

§7. S obzirom na postavke usvojene u §6, s hvatićemo istinski krug χ, isključujući tačku K_∞, kao urodjenu množinu tačaka u Kantorovom smislu: tada ova množina tačaka ima redni tip linearnog kontinuuma.

Da bismo to dokazali, odredimo najpre prebrojivu množinu S tačkaka istinskog kruga χ čije tačke zgušnjavanja čine sam istinski krug χ. Takva množina S, po Kantoru, ima redni tip sistema svih racionalnih brojeva u njihovom prirodnom redu, tj. moguće je tačkama sistema S S dodeliti racionalne brojeve tako da od tri racionalna broja broja a,b,c dodeljena ma kojim trima tačkama A, B, C množine S, od kojih tačka B leži izmedju A i C, uvek broj b po svojoj vrednosti leži izmedju a i c.

Neka je sad K ma koja tačka istinskog kruga χ koja ne pripada sistemu S. Ako su tada A, B tače sistema S, onda ćemo reći da A, B leže na raznim stranama ili na istoj strani od K, prema tome dali tačka K leži izmedju tačaka A i B ili ne leži izmedju izmedju njih. Ako prenesemo sada ovu postavku o tačkama sistema S na racionalne brojeve koji su tim tačkama dodeljeni, dobićemo pomoću tačke K odredjeni D e d e k i n d o v presek u sistemu racionalnih brojeva: tački K dodelićemo iracionalni broj definisan ovim presekom.

Na istinskom krugu χ ne mogu postojati dve različite tačke K i K' kojima bi bio dodeljen isti iracionalni broj. Ustvari, ako konstruišemo zatvorenu Žordanovu krivu $\overline{KK'}$ i ako je H ma koja tačka istinskog kruga χ koja leži izmedju K i K' i, stoga, u unutrašnjosti krive $\overline{KK'}$, onda, pošto je H mesto zgušnjavanja tačaka sistema S, mora u sistemu S sigurno postojati takva tačka A koja leži u unutrašnjosti krive $\overline{KK'}$ i, stoga, izmedju tačaka K i K'. Racionalni broj a koji pripada tački A, uslovljava, na taj način, različitost preseka dobivenih pomoću tačaka K i K'.

Najzad ćemo pokazati da, i obrnuto, za svaki iracionalni broj α postoji tačka K na istinskom krugu χ kojoj je ovaj broj dodeljen. Radi toga uzmimo dva niza: niz rastućih brojeva a_1, a_2, a_3,... i niz opadajućih brojeva b_1, b_2, b_3,... od kojih svaki konvergira prema α. Konstruišemo tačke A_1, A_2, A_3,... i B_1, B_2, B_3,.. koje odgovaraju ovim brojevima i označimo sa K ma koju tačku zgušnjavanja ovih tačaka A_1, A_2, A_3,..., odn. B_1, B_2, B_3,.... Tada tačka K nužno pripada broju α, jer kad mi konstruišemo zatvorenu Žordanovu krivu $\overline{A_iB_i}$ uopšte, onda tačke A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3},... i B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3},..., pa stoga i tačka zgušnjavanja, leže u unutrašnjosti $\overline{A_iB_i}$, tj. izmedju tačaka A_i i B_i. Prema tome presek proizveden tačkom K nije nikakav drugi do baš onaj presek koji odredjuje broj α.

Posmatramo li tačke na periferiji običnog brojnog kruga polu-prečnika 1 i ako dodelimo jednoj od ovih tačaka znak $\pm\infty$ i tačku K_∞, ostalim tačkama sve realne brojeve u neprekidnom nizu, a ovim opet odgovarajuće tačke istinskog kruga χ, doći ćemo do ovih rezultata: tačke istinskog kruga mogu se uzajamno jednoznačno preslikati sa zadržanim svojim rasporedom na tačke periferije običnog brojnog kruga poluprečnika 1.

§8. Da bismo postigli cilj naznačen u §4, ostaje nam još da pokažemo neprekidnost dobivenog preslikavanja, tj. da pokažemo neprekidnost istinskog kruga χ odredjene koordinatama x, y brojne ravni, a, s druge strane, tačke brojnog kruga poluprečnika 1 lukom t koji polazi od neke stalne tačke: u tom slučaju treba dokazati da su x, y neprekidne funkcije od t.

Neka je t_1, t_2, t_3,... jedan stalno rastući ili stalno opadajući niz koji konvergira prema t^*, a K_1, K_2, K_3,... neka su tačke istinskog kruga χ dodeljene ovim vrednostima parametra, i neka vrednost t^* odgovara nekoj tački K^* na x. Neka je, dalje, Q tačka zgušnjavanja tačaka K_1, K_2, K_3, ... Ako konstruišemo uopšte neku zatvorenu Žordanovu krivu K_iK^* tače K_{i+1}, K_{i+2}, $K_{i+3}, ...$, a otuda i njihova tačka zgušnjavanja Q, moraju ležati u unutrašnjosti $\overline{K_iK}^*$, tj. i tačka Q leži izmedju K_i i K^*; prema tome vrednost parametra t, koja odgovara tački Q, takodje se mora nalaziti izmedju t_1 i t^*. Ova poslednja protivurečonst otpada samo kad se tačke Q i K^* poklapaju; prema tome, tačke $K_1, K_2, K_3, ...$ konvergiraju prema tački K^*. Time je neprekidnost finkcije x, y zavisne od parametra t potpuno dokazana, a otuda sledi činjenica koju smo u §4 postavili kao prvi važni cilj našeg istraživanja, naime stav:

Istinski krug u brojnoj ravni je zatvorena Žordanova kriva.

§9. Mi znamo da sve tačke istinskog kruga x pripadaju tačkama koje leže na kk; pokazaćemo takodje da ove poslednje tačke sve leže na istinskom krugu x , tako da važi ovaj širi stav:

Istinski krug je identičan sa tačkama na kk; tačke koje leže u unutrašnjosti x, u isto vreme su tačke koje leže u unutrašnjosti kk, a tačke koje leže van x, u isto vreme su tačke koje leže van kk.

Da bismo uvideli tačnost ovog stava, pokazaćemo najpre da se tačka M, „središte" istinskog kruga x, može spojiti sa svakom tačkom J u unutrašnjosti x neprekidnom krivom, a da se pri tome ne preseče istinski krug x.

Ustvari, povucimo kroz tačku J ma koju običnu pravu u brojnoj ravni, takozvanu „brojnu pravu", i neka su K_1 i K_2 prve tačke te brojne prave koje leže na x , računato na obe strane od J. Pošto su K_1 i K_2 takodje tačke na kk, to one mogu biti vezane sa M sa po jednom Žordanovom krivom MK_1 odn. MK_2, koje se cele prostiru u unutrašnjosti kk i zato, sigurno, ne presecaju istinski krug x. Ako jedna od ovih Žordanovih krivih preseca komad K_1K_2 prave, recimo, u tački B, to komad MB krive i komad JB prave obrazuju zajedno traženi spojni put. U suprotnom slučaju MK_1 i MK_2 obrazuju zajedno sa komadom K_1K_2 prave zatvorenu Žordanovu krivu γ. Pošto ova kriva γ cela leži u unutrašnjosti brojnog kruga §1, to se tačka A, koja leži van brojnog kruga $\Re$, sigurno ne može spojiti sa jednom tačom u unutrašnjosti γ a da pritom ne bude presečena ni u jednoj tački kriva γ. Kriva γ sastoji se samo iz tačaka u unutrašnjosti kk, iz tačaka na kk i iz tačaka u unutrašnjosti x. Pošto se, polazeći iz A, ove poslednje tačke mogu dostići samo presecajući istinski krug x u nekoj tački koja je u isto vreme tačka koja leži na kk, onda cela oblast koja leži u unutrašnjosti γ mora ležati takodje u unutrašnjosti kk. Zato, ako spojimo tačku M sa J neprekidnim putem koji se prostire u unutrašnjosti γ, to ovaj put sigurno ne preseca istinski krug x i zato ima zahtevanu osobinu.

Iz toga prvo zaključujemo da tačka M leži u unutrašnjosti x, tj. da središte istinskog kruga leži u unutrašnjosti njega.

Dalje, posto se svaka tačka na kk može spojiti sa tačkom M Žordanovom krivom, koja, izuzev krajnjih tačaka, cela leži u unutrašnjosti kk pa, dakle, sigurno ne preseca x, to svaka tačka koja leži na kk mora ležati ili na x ili u unutrašnjosti x. Ako bi postojala tačka P na kk koja leži u unutrašnjosti x, onda se tačka A koja leži van $\Re$ ne bi mogla spojiti sa tačkama koje se nalaze u proizvoljnoj blizini tačke P, a da pri tome ne bude presečen istinski krug x; no, pošto svaka tačka istinskog kruga pripada pokrivenim tačkama, to tačka P ne bi mogla biti na kk; ovo je protivurečnost. Dakle, sve tačke na kk u isto vreme leže na x, a time je gornje tvrdjenje potpuno dokazano.

§10. Oblik kk od tačaka dobiven je u §2 iz brojnog kruga k pomoću odredjene konstrukcije. Posto brojni krug, kako je pokazano u §3, sadrži najmanje jednu tačku na kk, a sve ostale njegove tačke leže ili na kk ili u unutrašnjosti kk, a tačke na kk, prema §9, nisu ništa drugo do istinski krug x, to u gornjoj konstrukciji u isto vreme imamo sredstvo da konstruišemo iz brojnog kruga k istinski krug x koji je zatvorena Žordanova kriva i koji obuhvata brojni krug k, dodirujući ga spolja; ovde, kao i u narednim izlaganjima, reći ćemo da Žordanova kriva, koja sadrži u unutrašnjosti drugu Žordanovu krivu i ima sa njom najmanje jednu zajedničku tačku, dodiruje tu drugu spolja, a druga prvu iznutra.

Pomoću neznatne izmene ranijeg postupka, naime pomoću razmene uloga koje su bile pripisane tačkama koje leže u unutrašnjosti kruga k i van njega, možemo iz brojnog kruga k konstruisati još jedan drugi istinski krug; sad ćemo one tačke brojne ravni koje se dobivaju pri ma kakvom obrtanju oko M od tačaka koje leže na krugu k ili van njega, nazvati pokrivenim; naprotiv, sve ostale tačke nazvećemo nepokrivenim. Ako se pak neka nepokrivena tačka može spojiti sa tačkom M Žordanovom krivom koja se sastoji iz sve samih nepokrivenih tačaka, reći ćemo za ovu tačku da je u unutrašnjosti kkk. O tačkama koje su granične u odnosu na te tačke, reći ćemo da leže na kkk, a za sve ostale tačke reći ćemo da leže van kkk. Pokazaćemo, zatim, slično kao u §3 do §9, da tačke na kkk obrazuju istinski krug oko M koji je zatvorena Žordanova kriva, koji obuhvata središte M i prostire se u unutrašnjosti brojnog kruga k, dodirujući ga iznutra.

§11. Sada se može izabrati mesto brojnog kruga k proizvoljna zatvorena Žordanova kriva z koja leži u unutrašnjosti k i koja u svojoj unutrašnjosti sadrži tačku M: primenjujući istu konstrukciju kao i ranije, dobićemo tada za ovu krivu z jedan odredjeni istinski krug oko M koji nju obuhvata, koji je zatvorena Žordanova kriva i koji dodiruje spolja z, kao i jedan odredjeni istinski krug oko M koji leži u unutrašnjosti z, koji je takodje Žordanova zatvorena kriva i koji dodiruje z iznutra.

Primetimo još da se svaki takav istinski krug, konstruisan iz Žordanove krive z, može proizvesti i iz brojnog kruga: treba odabrati onaj brojni krug koji leži u unutrašnjosti datog istinskog kruga, dodirujući ga iznutra, odn. koji obuhvata taj krug, dodirujući ga spolja; jer, dva istinska kruga koji su zatvorene Žordanove krive i koji dodiruju isti brojni krug, bilo obuhvatajući ga, bilo da u njemu celi leže, sigurno bi morali imati jednu zajedničku tačku i zato bi bili uopšte medjusobno identični.

§12. Sada možemo bez znatnih teškoća dokazati važnu činjenicu, naime da je svaki istinski krug sa centrom u M koji prolazi kroz ma koju tačku P što leži u unutrašnjosti x, isto kao i u §11 konstruisani istinski krugovi, zatvorena Žordanova kriva koja u unutrašnjosti sadrži tačku M.

Da bismo ovo dokazali ,uzmimo, s jedne strane, sve istinske krugove sa centrom u tački M koji su zatvorene Žordanove krive i koji isključuju P: nazovimo ih krugovima prve vrste; a sa druge strane uzmimo sve one istinske krugove koji su zatvorene Žordanove krive i koji P uključuju: njih nazovimo istinskim krugovima druge vrste.

Zamislimo sad da je iz svakog brojnog kruga sa središtem M proizveden istinski krug koji obuhvata brojni krug i uočimo tada one brojne krugove iz kojih proizilaze istinski krugovi prve vrste. Onda potražimo za ove brojne krugove granični krug g, tj. najmanji brojni krug koji sve njih sadrži. Svi brojni krugovi koji su manji od g, daju tada istinske krugove prve vrste, istinski krug γ koji proizilazi iz brojnog kruga g, morao bi, ako ne ide kroz P, ovu tačku isto tako isključivati. Jer ako bi tačka P ležala u unutrašnjosti γ može se povući zatvorena Žordanova kriva koja bi cela ležala u unutrašnjosti γ i koja bi obuhvatala u sebi tačke M i P, i od ove krive proizvesti istinski krug koji nju obuhvata. Ovaj istinski krug, pošto on sigurno ulazi u unutrašnjost brojnog kruga g, mogao bi se dobiti pomoću brojnog kruga koji je manji od g; on bi morao, dalje, obuhvatati tačku P, što nije moguće. Pošto, kako je pomenuto, svi istinski krugovi sa centrom u tački M, koji su zatvorene Žordanove krive, proizilaze i iz brojnih krugova sa centrom u M, to je očigledno da je istinski krug koji proizilazi iz g takav krug prve vrste koji obuhvata sve druge istinske krugove prve vrste.

Zamišljajući, s druge strane, da iz svakog brojnog kruga, sa središtem u M proizilazi onaj istinski krug koji taj brojni krug isključuje, možemo na sličan način dokazati egzistenciju istinskog kruga druge vrste koji je obuhvaćen svim drugim istinskim krugovima druge vrste.

Ako pak ni jedan od nadjenih graničnih krugova ne bi prolazio kroz tačku P, onda bi se mogla povuć Žordanova kriva u prstenastoj oblasti koja leži izmedju njih; pomoću našeg postupka si-gurno bismo mogli dobiti istinski krug koji bi bio zatvorena Žordanova kriva, ali koji ne bi bio niti krug prve vrste, niti krug druge vrste; ovo je protivurečnost, a time smo dokazali tvrdjenje postavljeno u početku §12.

§13. Posto smo u prethodnom izlaganju našli najvažnije osobine istinskih krugova sa središtem u M koji prolaze kroz tačke u unutrašnjosti x, predjimo sada na istraživanje grupe svih kretanja koja pretrpi istinski krug x u sebi pri obrtanjima ravni oko tačke M.

Neka su, prema izlaganjima u §8, tačke istinskog kruga x preslikane sa očuvanim svojim rasporedom na tačke t periferije brojnog kruga poluprečnika 1; tada svakom obrtanju Δ naše ravni oko tačke M odgovara odredjena uzajamno jednoznačna i neprekidna transformacija tačaka t jediničnog kruga u sebe, pošto pri obrtanju, prema §5, raspored tačaka na istinskom krugu ostaje nepromenjen, a otuda, s obzirom na §7, ostaje nepromenjen i raspored vrednosti parametra t. Ova se transformacija može predstaviti i formulom oblika

$$t' = \Delta(t),$$

gde je $\Delta(t)$ neprekidna funkcija koja pri rastućem t ili uvek raste ili uvek opada i koja se pri povećanju argumenta za 2π isto tako promeni za iznos 2π.

Onim funkcijama $\Delta(t)$, koje opadaju pri rastućem argumentu t, odgovaraju transformacije koje menjaju smer obilaženja po istinskom krugu; a pošto, prema našoj formulaciji pojma kretanja, pri kretanju treba smer obilaženja da ostane uvek isti, to sledi da funkcija $\Delta(t)$ mora uvek rasti pri rastućem argumentu t.

§14. Pitajmo se najpre može li u ovoj grupi svih obrtanja oko tačke M postojati takvo obrtanje pri kojem tačka A istinskog kruga ostaje nepromenjena. Neka je $t = a$ vrednost parametra za takvu tačku A i neka ova tačka ostaje nepokretna pri nekom obrtanju Δ koje je predstavljeno formulom

$$t' = \Delta(t).$$

Dalje, neka je B ma koja tačka istinskog kruga sa parametrom $t = b$ koja pri obrtanju Δ menja svoj položaj; pretpostvimo, naprimer, da je $b < a$ u čemu nije nikakvo ograničenje.

Kako funkcija $\Delta(t)$, tako i obrnuta funkcija $\Delta^{-1}(t)$, takve su vrste da pri rastućem argumentu rastu. Pošto je $\Delta(a) = a$, odatle redom zaključujemo da su sve veličine koje se mogu predstaviti simboličkim stepenima

$$\Delta(b), \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b), \Delta^3(b), \ldots, \Delta^{-1}(b), \Delta^{-2}(b), \Delta^{-3}(b), \ldots$$

manje od a. No u slučaju da je $\Delta(b) > b$, veličine

$$\Delta(b), \Delta^2(b), \Delta^3(b), \ldots$$

obrazuju niz stalno rastućih vrednosti; ako je $\Delta(b) < b$, to isto važi za niz veličina

$$\Delta^{-1}(b), \Delta^{-2}(b), \Delta^{-3}(b), \ldots.$$

Iz ovih činjenica zaključujemo da se u prvom slučaju neposredna ponavljanja obrtanja Δ, primenjena na b, a u drugom slučaju simbolički stepeni od $\Delta(b)$ sa negativnim eksponentima, moraju približavati graničnoj vrednosti g koja leži ili izmedju a i b ili se poklapa sa a. Odgovara li granični broj g, recimo, tački G na istinskom krugu x, to potencije od Δ sa pozitivnim odn. negativnim eksponentima obrazuju kretanja pri kojim tačka B prelazi najzad u proizvoljnu blizinu tačke G, i u isto vreme tačke koje se nalaze u proizvoljno maloj okolini tačke G ostaju u proizvoljno maloj okolini tačke G. Prema aksiomi III, moralo bi, dakle, postojati kretanje koje prevodi tačku B u G i u isto vreme tačku G ostavlja nepromenjenom; ovo protivureči pojmu kretanja. Prema tome je obrtanje Δ, koje ostavlja tačku A nepokretnom, nužno takvo obrtanje koje sve tačke kruga x ostavlja nepokretnim, tj. za ovaj krug je identitet.

§ 15. Iz definicije istinskog kruga neposredno je jasna ova činjenica:

Postoji takvo obrtanje oko tačke M koje prevodi neku proizvoljno datu tačku O istinskog kruga x u drugu proizvoljno datu tačku S tog istog kruga.

§ 16. Izveš ćemo sada još jednom svojstvo grupe kretanja istinskog kruga u sebi.

Neka su O, S, T, Z takve četiri tačke na istinskom krugu x da ono obrtanje oko tačke M, pomoću koga tačka O prelazi u S, tačku T kreće u Z tako da je položaj tačke Z jednoznačno odredjen tačkama O, S, T. Ako ne menjamo položaj tački O, a krećemo tačke S i T po istinskom krugu, to će se pri neprekidnoj promeni položaja tačaka S i T menjati i položaj tačke Z neprekidno.

Da bismo ovo dokazali, odaberimo jedan beskonačni niz tačaka $S1$, $S2$, $S3$, $\cdots$ koje konvergiraju prema tački S i jedan beskonačan niz tačaka $T1$, $T2$, $T3$, $\cdots$ koje konvergiraju prema T. Obrtanja oko tačke M, pomoću kojih tačka O prelazi u $S1$, $S2$, $S3$, $\cdots$, označićemo sa Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\cdots$, a tačke koje proizilaze pri ovim obrtanjima Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\cdots$, iz $T1$ odn. $T2$, $T3$, $\cdots$ označimo sa $Z1$ odn. $Z2$, $Z3$,$\cdots$; tada treba da dokažemo da tačke $Z1$, $Z2$, $Z3$, $\cdots$ konvergiraju prema tački Z. Neka je tačka Z^* tačka zgušnjavanja tačaka $Z1$, $Z2$, $Z3$, $\cdots$. Prema aksiomi III, postoji tada obrtanje oko tačke M, pomoću koga tačka O prelazi u S i u isto vreme tačka T u Z^*. A time se pokazuje da je tačka Z^* jednoznačno odredjena i sa tačkom Z identična.

§17. U §14-§16 saznali smo da grupa svih obrtanja istinskog kruga u sebi ima ova svojstva:

1. Ne postoji nikakvo obrtanje oko tačke M, osim identiteta, pri kom bi neka tačka istinskog kruga x ostala nepokretna.

2. Ako su O i S ma koje dve proizvoljne tačke istinskog kruga x, sigurno postoji obrtanje oko tačke M koje prevodi tačku O u S.

3. Neka pri nekom obrtanju oko tačke M, koje kreće tačku O u S, istovremeno tačka T prelazi u Z; time tačka Z „jednoznačno odredjena pomoću O, S, T, neprekidno menja svoj položaj na x, kad tačke S i T neprekidno menjaju svoj položaj na x.

Ove tri osobine potpuno odredjuju strukturu grupe transformacija $\Delta(t)$ koje odgovaraju kretanjima istinskog kruga u sebi. Naime, postavićemo ovaj stav:

Grupa svih kretanja istinskog kruga x u sebi, koja su obrtanja oko tačke M, jeste holoedarski izomorfna sa grupom običnih obrtanja jediničnog brojnog kruga u samom sebi oko tačke M.

§18. Ako zamislimo ono obrtanje oko tačke M koje prevodi tačku O istinskog kruga x sa perametrom 0 u tačku S sa vrednošcu parametra s, predstavljeno pomoću transformacione formule

$$t' = \Delta(t, s),$$

pri čemu uzimamo vrednost funkcije $\Delta(t, 0) = t$, uvidećemo na osnovu nadjenih osobina grupe obrtanja da je funkcija $\Delta(t, s)$ jednoznačna i neprekidna za sve vrednosti obeju promenljivih t i s. Takodje sledi, pošto je s odredjeno do višestruke vrednosti od 2π pomoću dve odgovarajuće vrednosti t i t', da funkcija $\Delta(t, s)$, pri konstantnom t i rastućem s, stalno ili raste ili opada, i pošto ona za $t = 0$ prelazi u s, to nastupa nužno prvi slučaj. Prema tome je

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \quad (t > 0),$$

a pošto je

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

to sledi

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Prema tome funkcija $\Delta(t, t)(> t)$ jedne promenljive t ima osobinu da stalno raste od 0 do 4π, kad argument t raste od 0 do 2π. Iz ove okolnosti odmah zaključujemo:

Ako je dat ma koji pozitivan broj $t' \leq 2\pi$, onda uvek postoji jedan i samo jedan pozitivan broj t, tako da je

$$\Delta(t, t) = t';$$

pri tome je $t < t'$. Vrednost parametra t daje nam jednu takvu tačku istinskog kruga, da se, pri izvesnom obrtanju oko tačke M, tačka $t = 0$ pomera u tačku t, a istovremeno tačka t u tačku t'.

Označimo sada onu vrednost t za koju je

$$\Delta(t,t) = 2\pi$$

sa $\varphi(\frac{1}{2})$, vrednost t za koju je

$$\Delta(t,t) = \varphi(\frac{1}{2}),$$

sa $\varphi(\frac{1}{2^2})$, a vrednost t za koju je

$$\Delta(t,t) = \varphi(\frac{1}{2^2}),$$

sa $\varphi(\frac{1}{2^3})$,...; dalje, uzmimo uopšte

$$\Delta[\,\varphi(\frac{a}{2^n}),\ \varphi(\frac{1}{2^n})] = \varphi(\frac{a+1}{2^n}),$$

gde a znači ceo broj i n ceo broj $\geq$1, i dalje uzmimo

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Time je funkcija φ neprotivurečno definisana za sve racionalne vrednosti argumenta čiji je imenilac neki stepen od 2.

Ako je tačka σ proizvoljni pozitivni argument <1, razvijmo σ u dijadski razlomak oblika

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

gde su $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$ cifre od kojih je svaka 0 ili 1. Pošto brojevi niza

$$\varphi(\frac{z_1}{2}), \quad \varphi(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}), \quad \varphi(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}), \ldots$$

sigurno nikad ne opadaju i svi ostaju $\leq \varphi(1)$, to se oni približavaju nekoj graničnoj vrednosti; ovu ćemo označiti sa $\varphi(\sigma)$. Funkcija $\psi(\sigma)$ biće funkcija koja sa rastućim argumentom stalno raste; dokazaćemo da je ona i neprekidna. Ustvari, ako ona na nekom mestu

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = {}_{n=1}\frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n})$$

ne bi bila neprekidna, to bi obe granične vrednosti

$$L\varphi(\frac{a_n}{2^n}) \quad i \quad l\varphi(\frac{a_n + 1}{2^n})$$

morale bi biti različite jedna od druge i, prema tome bi beskonačni niz tačaka koje odgovaraju parametrima

$$t = \varphi(\frac{a_1}{2}), \quad t = \varphi(\frac{a_2}{2^2}), \quad t = \varphi(\frac{a_3}{2^3}), \ldots,$$

morao konvergirati prema jednoj drugoj tački, različitoj od tačke kojoj konvergira beskrajni niz tačaka koje odgovaraju parametrima

$$t = \varphi(\frac{a_1+1}{2}), \quad t = \varphi(\frac{a_2+1}{2^2}), \quad \varphi(\frac{a_3+1}{2^3}), \ldots .$$

Isto obrtanje, pri kome tačka $t = \varphi(\frac{a_n}{2^n})$ prelazi u tačku $t = \varphi(\frac{a_n+1}{2^n})$, prevodi istovremeno i tačku $t = \varphi(\frac{1}{2^n})$ u tačku $t = \varphi(\frac{1}{2^{n-1}})$; a pošto brojevi $t = \varphi(\frac{1}{2})$, $t = \varphi(\frac{1}{2^2})$, $t = \varphi(\frac{1}{2^3})$ stalno opadaju i zato tačke koje odgovaraju ovim parametrima moraju konvergirati prema nekoj tački A, onda će, s obzirom na aksiomu III na osnovu jednog često primenjivanog načina zaključivanja i oba gore pomenuta beskonačna niza tačaka konvergirati prema istoj tački.

Pošto funkcija $\varphi(\sigma)$ stalno raste i neprekidna je, ona dopušta takodje jednoznačnu i neprekidnu inverziju.

Obrtanje oko tačke M, pri kom tačka $t = 0$ prelazi u tačku $t = \varphi(\frac{a_n}{2^n})$, prevodi istovremeno tačku $t = \varphi(\frac{b_m}{2^m})$ u tačku $t = \varphi(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n})$, gde se pod b_m podrazumeva ma koji ceo broj. Pošto za $n =$ vrednosti $\varphi(\frac{a_n}{2^n})$ konvergiraju prema $\varphi(\sigma)$, a brojevi $t = \varphi(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n})$ istovremeno konvergiraju prema $\varphi(\frac{b_m}{2^m} + \sigma)$, to, prema aksiomi III, postoji obrtanje koje pomera tačku $t = 0$ u $t = \varphi(\sigma)$ i istovremeno tačku $t = \varphi(\frac{b_m}{2^m})$ u $t = \varphi(\frac{b_m}{2^m} + \sigma)$, tj.

$$\Delta(\varphi(\frac{b_m}{2^m}), \varphi(\sigma)) = \varphi(\frac{b_m}{2^m} + \sigma),$$

a pošto je φ neprekidna funkcija, iz toga uopšte za proizvoljne parametre τ i σ sledi

$$\Delta(\varphi(\tau), \varphi(\sigma)) = \varphi(\tau + \sigma).$$

Time je dokazano da, ako u transformacionu formulu

$$t' = \Delta(t, s)$$

uvedemo pomoću izvesne uzajamno jednoznačne funkcije φ mesto parametara t, t', s nove parametre τ, τ', σ za koje je

$$t = \varphi(\tau), \;\; t' = \varphi(\tau'), \;\; s = \varphi(\sigma),$$

onda se obrtanje u novim parametrima izražava formulom

$$\tau' = \tau + \sigma.$$

Ovaj stav pokazuje da je tvrdjenje postavljeno u § 17 tačno.

Stavićemo još umesto parametra σ parametar $\omega = 2\pi\sigma$ i taj parametar ω nazvati uglom ili dužinom luka izmedju tačaka $O(\sigma = 0)$ i S (tj. σ) na istinskom krugu x; obrtanje pri kome tačka $O(\sigma = 0)$ prelazi u tačku S (tj. σ), nazvaćemo obrtanjem $\Delta[\omega]$ istinskog kruga x u sebi za ugao ω.

§19. Ovim dokazom stava u §17 završili smo istraživanje obrtanja istinskog kruga x u sebi. Na osnovu §11 i §12 uvidjamo da u §13 do §18 primenjeni postupci i dokazane činjenice za istinski krug x važe takodje za sve istinske krugove oko M koje leže u unutrašnjosti x.

Pridjimo sada istraživanju grupe transformacija svih tačaka pri obrtanjima ravni oko stalne tačke M i dokažimo redom naredne stavove:

Neka se zna o nekom istinskom krugu μ oko M da je on zatvorena Žordanova kriva u čijoj unutrašnjosti leži tačka M; tada ne postoji, osim identiteta, nikakvo obrtanje ravni oko M koje bi svaku tačku istinskog kruga μ ostavilo nepokretnom.

Da bismo ovo dokazali, označimo obrtanje oko M, pri kome svaka tačka na μ ostaje nepokretna, sa M i pretpostavimo, prvo, nasuprot tvrdjenju, da postoji na μ neka tačka A u čijoj proizvoljnoj blizini leže tačke koje menjaju svoj položaj pri nekom obrtanju M. Opišimo oko A, što je prema §12 svakako moguće, istinski krug α koji bi prolazio kroz jednu prema M promenljivu tačku i koji bi bio dovoljno mali, tako da bi, na osnovu gornje primedbe, za njega važio stav u §14. Neka je B presečna tačka ovog kruga sa μ; tada se kretanje M istodobno karakteriše kao obrtanje kruga α u sebi pri kome tačka B ostaje nepokretna. Ali, pri jednom takvom obrtanju, ostaju, prema §14, sve tačke na α nepokretne, što nije moguće; prema tome, naša se prva pretpostavka pokazuje kao nedopuštena.

Konstruišimo sada oko M sistem zatvorenih krivih kome bi pripadao krug μ i pri čemu bi svaka od ovih ili sadržala celu drugu krivu, ili bi bila potpuno sadržana u toj krivoj, tako da bi kroz svaku tačku brojne ravni prolazila jedna i samo jedna kriva tog sistema. Pretpostavimo tada, drugo, nasuprot gornjem tvrdjenju, da je λ jedna kriva ovog sistema u unutrašnjosti ili van μ, tako da sve tačke u prstenastoj oblasti izmedju μ i λ, pri savakom obrtanju M, ostaju nepokretne, dok u proizvoljnoj blizini krive λ postoje takve tačke koje ne ostaju nepokretne pri svakom obrtanju M.

Neka je A tačka na λ, u čijoj se blizini, pri obrtanjima M,nalaze pokretne tačke; opišimo tada oko A istinski krug α koji prolazi kroz jednu od ovih pokretnih tačaka i koji je dovoljno mali tako da za njega važi stav u §14. Pošto ovaj krug pri dovoljnoj malenosti, svakako prolazi kroz jedan deo prstenaste oblasti koja se ne kreće pri kretanjima M, onda se kretanje M u isto vreme može karakterisati kao kretanje kruga α u sebi, pri kome beskrajno mnoge tačke kruga α ostaju nepokretne. Zato bi prema §14, pri obrtanjima M morale sve tačke kruga α ostati nepokretne, što protivureči našoj pretpostavci. Time je pokazano da pri obrtanjima M sve tačke ravni ostaju nepokretne.

§20. Postavićemo sad ovo važno tvrdjenje:

Svaki istinski krug je zatvorena Žordanova kriva; sistem svih istinskih krugova opisanih oko ma koje tačke M ispunjava bez praznina našu ravan tako da svaki istinski krug opisan oko tačke M obuhvata svaki drugi takav krug ili je njime obuhvaćen. Sva obrtanja $\Delta[\omega]$ naše ravni oko tačke M izražavaju sa transformacionim formulama oblika

$$x' = f(x, y; \omega), \ y' = g(x, y; \omega);$$

tu x, y i x', y' označavaju koordinate tačaka u brojnoj ravni, a f, g jednoznačne neprekidne funkcije triju promenljivih x, y, ω. Dalje, za svaku tačku x, y funkcije f, g, u pogledu argumenta ω, imaju broj 2π za najmanju simultanu periodu, tj. svaka tačka istinskog kruga kroz tačku (x, y) dobiva se po jedanput i samo po jedanput, ako se pusti da ω prelazi sve vrednosti od 0 do 2π. Najzad, za slaganje dva obrtanja za uglove ω, ω' važi formula

$$\Delta[\omega]\Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§21. Radi dokaza postavljenih tvrdjenja uzmimo opet istinski krug χ oko M, ispitivan prvo u §3 do §18, koji je zatvorena Žordanova kriva i posmatrajmo obrtanje ovog istinskog kruga χ u sebi. Prema §18, uvešćemo ugao ω tako da, kad je data neka vrednost od ω izmedju 0 i 2π, bude jednoznačno odredjeno jedno kretanje istinskog kruga χ u sebi. Dakle, svakom obrtanju istinskog kruga χ u sebi odgovara samo jedno odredjeno obrtanje ravni oko tačke M, pošto, prema §19, kad su sve tačke na χ nepokretne, uopšte sve tačke ravni ostaju nepokretne. Otuda sledi da su funkcije f i g, koje ulaze u postavljanje formule u §20 za obrtanje ravni oko tačke M, za sve vrednosti x, y, ω jednoznačne funkcije, koje, u pogledu ω, imaju period 2π.

Dokažimo sad da su funkcije f i g neprekidne u odnosu na x, y, ω. Radi toga neka je O ma koja tačka na χ; neka je, dalje, ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$ beskonačni niz vrednosti koje konvergiraju prema nekoj odredjenoj vrednosti ω, a T_1, T_2, $T_3, \ldots$ beskonačni niz tačaka naše ravni koje konvergiraju prema ma kojoj tački T. One tačke koje pri izvodjenju obrtanja za ugao ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$ proizilaze iz O označićemo sa S_1, S_2, $S_3, \ldots$ a, tačke koje proizilaze iz tačaka T_1, T_2, $T_3, \ldots$ pri obrtanjima ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$ označićemo sa Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$. Najzad, neka tačke koje proizilaze iz O i T obrtanjem za ugao ω, budu označene sa S i Z. Treba dokazati da tačke Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$ konvergiraju prema Z.

Pošto tačke T_1, T_2, $T_3, \ldots$ konvergiraju prema tački T, to se može odrediti Žordanova oblast G u čijoj unutrašnjosti leže sve tačke M, T, T_1, T_2, $T_3, \ldots$. Primenimo tada na ovu Žordanovu oblast ono obrtanje oko tačke M koje tačku O pomera u S. Tako iz oblasti G dobivenu Žordanovu oblast označićemo sa H; ona, svakako, sadrži tačke M i Z. Najzad, konstruišimo zatvorenu Žordanovu krivu α koja sadrži celu oblast H u unutrašnjosti, tj. ovu oblast obuhvata tako, da nijedna njena tačka ne leži na H.

Dokazaćemo sad da od tačaka Z_1, Z_2, Z_3,... svakako samo jedan konačan broj leži van krive α. Ustvari, ako bi beskonačno mnogo od tih tačaka, npr. tačke Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3},... ležalo van α, uopšte mogli bismo zamisliti da su tačke M i T_{i_h} vezane nekom Žordanovom krivom γ_h koja se prostire u unutrašnjosti oblasti G, i tada izvesti sa γ_h obrtanje za ugao ω_{i_h}. Tako postala kriva spaja tačku M sa tačkom Z_{i_h} i zato bi, svakako, morala presecati krivu α u nekoj tački, na primer u tački B_h; neka je A_h ta tačka na γ_h koja pri obrtanju za ugao ω_{i_h} prelazi u B_h. Pošto tačke A_1, A_2, A_3,... ostaju sve u unutrašnjosti oblasti G, a sve tačke B_1, B_2, B_3,... na krivoj α, to sigurno postoji takav beskonačni niz indeksa h_1, h_2, h_3,... pri kojim bi tačke A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3},... konvergirale prema tački A koja leži u unutrašnjosti oblasti G ili na njenoj granici i u isto vreme bi tačke B_{h_1}, B_{h_2}, B_{h_3},... konvergirale prema tački B koja leži na krivoj α. No mi znamo da tačke S_1, S_2, S_3,... konvergiraju prema tački S; prema tome, s obzirom na aksiomu III, moralo bi postojati obrtanje oko tačke M koje kreće tačku O u S i istovtremeno A u B; a to nije moguće, jer bi pri ovim obrtanjima morala tačka A preći u tačku u unutrašnjosti oblasti H ili na njenu granicu; naprotiv, tačka B je na krivoj α koja celu oblast H sadrži u svojoj unutrašnjosti.

Na taj način smo uvideli da sistem tačaka Z_1, Z_2, Z_3,... mora ceo ležati u unutrašnjosti neke Žordanove oblasti.

Neka je Z^* tačka zgušnjavanja tačaka Z_1, Z_2, Z_3,... . Pošto tačke S_1, S_2, S_3,... konvergiraju prema tački S, to, prema aksiomi III, postoji obrtanje oko tačke M pri kome tačka O prelazi u tačku S i istovremeno tačka T u tačku Z^*. Ali pošto bi, pri onom obrtanju oko tačke M koje prevodi O u S, morala tačka T preći u tačku Z, to, zbog prethodno dokazane jednoznačnosti funkcija f i g, nužno sledi da je $Z^* = Z$, tj. tačke Z_1, Z_2, Z_3,... zgušnjavaju se samo na jednom mestu, naime na mestu Z. Time je dokazana neprekidnost funkcija f i g u odnosu na promenljive x, y, ω.

Stavimo sad u funkcije f i g mesto x, y koordinate ma koje tačke P naše ravni koja leži u unutrašnjosti kruga χ ili van njega. Tako dobijene funkcije $f(\omega)$, $g(\omega)$ samo po jednoj promenljivoj ω, ne mogu imati proizvoljno male simultane periode. Jer pošto su one neprekidne funkcije od ω, bile bi u ovom slučaju konstante; no tada bi, pri svim obrtanjima ravni oko tačke M, tačka P ostala nepokretna, što protivureči aksiomi II. Najmanji simultani period ovih dveju funkcija $f(\omega)$, $g(\omega)$ morao bi zato biti oblika $\frac{2\pi}{n}$, gde je n neki ceo pozitivan broj. Iz ovoga sledi da se dobija istinski krug koji prolazi kroz tačku P ako se u formulama

$$x = f(\omega),\ y = g(\omega)$$

pusti da promenljiva ω predje vrednosti od 0 do $\frac{2\pi}{n}$. Ova kriva je zatvorena i bez dvojnih tačaka; ona zato predstavlja istinski krug koji prolazi kroz P sa centrom u tački M. Ako sad ravan obrnemo za ugao $\frac{2\pi}{n}$, onda pri tome sve tačke ovog istinskog kruga, koji prolazi kroz tačku P, ostaju nepokretne i stoga bi, prema §19, sve tačke ravni morale ostati nepokretne; no tačke na istinskom krugu χ ostaju nepokretne samo pri onom obrtanju kad je $n = 1$. Time smo potpuno dokazali sva tvrdjenja stava postavljenog u §20.

§22. Sada lako uvidjamo i tačnost ovih činjenica:

Ako ma koje dve tačke pri kretanju ravni ostaju nepokretne, onda sve tačke ravni ostaju nepokretne, tj. kretanje je identitet.

Svaka se tačka ravni uvek može prevesti kretanjem (tj. pomoću dva obrtanja) u svaku drugu tačku ravni.

Prva činjenica neposredno sledi iz stava u §20; druga činjenica sa dobija ako se oko svake tačke opiše istinski krug koji prolazi kroz drugu tačku; pri tome se ovi krugovi nužno moraju seći.

§23. Naš najvažniji dalji cilj sastoji se u tome da se uvede pojam istinske prave u našu geometriju i razviju osobine ovog pojma neophodne za izgradjivanje geometrije.

Radi toga ustanovimo najpre naredne nazive. Ako su A, B i A', B' dva takva para slika tačka da se pri nekom kretanju može prevesti tačka A u A' i istovremeno B u B', onda ćemo reći: (istinska) duž AB je kongruentna (u znacima $\equiv$) (istinskoj) duži $A'B'$. Dalje, dva istinska kruga nazvaćemo kongruentnim ako postoji kretanje koje prevodi središte jednog kruga u središte drugoga i istovremeno njih same prevodi jedan u drugi.

Pod poluobrtom H oko tačke M razumećemo obrtanje za ugao π, tj. obrtanje koje još jednom izvedeno daje identitet. Ako su A, B, C takve tri tačke da A pri jednom poluobrtu oko B prelazi u C i istovremeno takodje pri ovom poluobrtu prelazi C u A, onda ćemo nazvati tačku B sredinom duži AC.

Duž AC nazvaćemo većom ili manjom od duži AB, prema tome da li tačka C leži u unutrašnjosti ili van istinskog kruga koji je opisan oko tačke A, a prolazi kroz tačku B. Da bismo na sličan način definisali pojmove „manje" i „veće" za proizvoljne duži i proizvoljne krugove, treba izvesti kretanja pomoću kojih početne tačke duži odn. središta krugova padaju u istu tačku.

§24. Istinska duž AC ima najviše jednu sredinu; ako bi, naime, za duž AC postojale dve sredine i ako označimo poluobrtanja oko ovih sredina sa H_1 i H_2, onda bi složena supstitucija $H_1 H_2^{-1}$ predstavljala kretanje koje bi svaku od tačaka A i C ostavljalo nepokretnom; prema tome na osnovi §22 dobijamo, označavajući identitet simbolički sa 1, da je

$$H_1 H_2^{-1} = 1, \text{ tj. } H_1 = H_2;$$

na taj način se i same sredine poklapaju. Posebno, odavde proističe dalji stav:

Ako su dve duži medju sobom kongruentne, onda su i njihove polovine kongruentne.

§25. Za dalje izvodjenje potreban nam je ovaj pomoćni stav:

Neka tačke A_1, A_2, A_3,... konvergiraju prema tački A, a tačke M_1, M_2, M_3,... prema tački M; ako tada uopšte pri izvodjenju poluobrta oko tačke

M_i, tačka A_i prelazi u B_i, onda će isto tako konvergirati tačke B_1, B_2, B_3,... i to prema onoj tački B koja proizilazi iz tačke A poluobrtom oko tačke M.

Pre svega uvek se može naći Žordanova oblast u čijoj se unutrašnjosti nalazi sistem tačaka B_1, B_2, B_3,... . U to se možemo uveriti istim postupkom koji smo u §21 primenili na sistem tačaka Z_1, Z_2, Z_3,... .

Označimo sad sa B^* tačku zgušnjavanja tačaka B_1, B_2, B_3,... . Tada, na osnovu aksiome III, mora postojati takvo kretanje koje prevodi tačke A, M, B^* u tačke B^*, M, A, tj. tačka B^* proizilazi iz A poluobrtom oko tačke M. A pošto i B proizilazi iz A poluobrtom oko tačke M, to sledi da je $B^* = B$, što je i trebalo dokazati.

§26. Neka je M sredina neke duži AB; tada ćemo pokazati da svaka duž AC koja je manja od AB takodje ima sredinu N.

Da bismo to dokazali povucimo ma koju neprekidnu Žordanovu krivu γ od tačke A od M i potražimo za svaku tačku M' ove krive tačku B' tako da M' bude sredina duži AB'; tada je mesto tačaka B', što se može zaključiti iz pomoćnog stava dokazanog u §25, neprekidna kriva γ'. Ova kriva γ' sigurno dolazi u tačku A kad tačka M' na krivoj γ dolazi u tačku A. U drugom pak slučaju pretpostavimo da je M_1, M_2, M_3,... beskonačan niz tačaka na krivoj γ koje konvergiraju prema A i da su B_1, B_2, B_3,... odgovarajuće tačke na krivoj γ'. Ako bi sada niz tačaka B_1, B_2, B_3,... imao tačku zgušnjavanja A^* različitu od A, iz toga bismo zaključili da postoji kretanje koje izvesne tačke koje se nalaze u proizvoljnoj blizini tačke A ostavlja u proizvoljnoj blizini te tačke A i u isto vreme dovodi tačku A u proizvoljnu blizinu tačke A^*. Tada bi, dakle, na osnovu aksiome III, tačka A pri izvesnom kretanju morala ostati nepokretnom i u isto vreme preći u tačku A^*, što je nemoguće.

Pošto je, prema našoj pretpostavci, duž AC manja od AB, to istinski krug koji je opisan oko tačke A i koji prolazi kroz tačku C mora presecati u nekoj tački B' neprekidnu krivu γ' koja vezuje tačku A sa B. Tačka M' koja odgovara toj tački na krivoj γ jeste sredina istinske duži AB', a pošto je $AC \equiv AB'$, to se podesnim obrtanjem oko tačke A može iz tačke M' dobiti tražena sredina N duži AC.

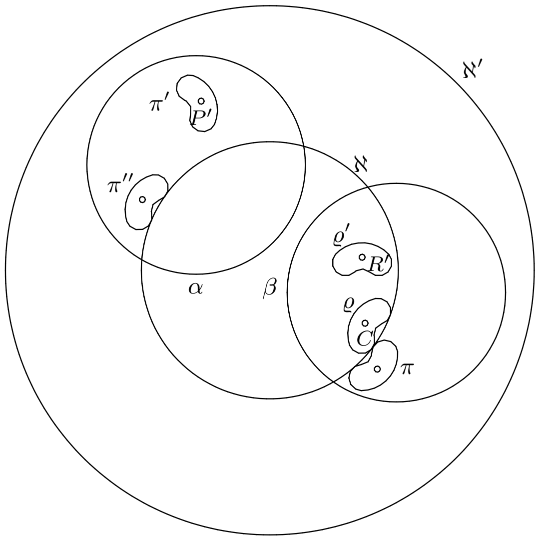
Pošto duž AC poluobrtom oko svoje sredine N prelazi u duž CA, to iz gore dokazanog stava sledi:

Duž AC uvek je kongruentna duži CA – pod pretpostavkom da je duž AC manja od odredjene duži AB od koje smo pošli u početku ovog §26.

Istovremeno uvidjamo da, ako tačke C_1, C_2, C_3,... konvergiraju prema tački A, uvek i sredine N_1, N_2, N_3,... duži AC_1, AC_2, AC_3,... konvergiraju prema istoj tački A.

§27. Za naša dalja razvijanja potrebni su nam neki stavovi o istinskim krugovima koji se dodiruju, i to pre svega je neophodno da se konstruišu dva medju sobom kongruentna kruga koji se dodiruju spolja u jednoj i samo jednoj tački.

Radi toga odaberimo tako mali krug χ' da u njegovoj unutrašnjosti ne leži ni jedna duž koja bi bila kongruentna odredjenoj duži AB uzetoj za osnovu u §26; stav u §11 pokazuje da je ovo sigurno moguće, pošto se inače tačke A i B mogu istovremeno proizvoljno približavati tački M. Zatim, neka je χ krug koji leži u unutrašnjosti χ', a oko istog središta kao χ'. Uzmimo sad ma koje dve tačke na krugu i opišimo oko njih medju sobom kongruentne krugove α i β tako male da ma koje dve tačke na χ koje leže u unutrašnjosti α, nikad ne mogu biti razdvojene ma od kojih dveju tačaka na χ koje leže u unutrašnjosti β, u smislu rasporeda tačaka na χ. Osim toga ovi krugovi α i β moraju biti tako mali da celi leže u unutrašnjosti χ'. Tada uzmimo tačku P' koja leži u unutrašnjosti α i van χ, i tačku R koja leži u



unutrašnjosti β i u unutrašnjosti χ, i opišimo oko P' i R' medju sobom kongruentne krugove π' i ρ' koji bi morali biti tako mali da krug π' ceo leži u unutrašnjosti α i van χ, a da, dalje, krug ρ' ceo leži u unutrašnjosti β i u unutrašnjosti χ. Izvedimo sad obrtanje oko središta kruga α pri kome bi krug π' prešao u krug π'' koji spolja dodiruje krug χ: dodirne tačke obrazuju sistem tačaka koji ćemo označiti sa S. Dalje, izvedimo takvo obrtanje oko središta kruga β, pri kome bi krug ρ' prešao u krug ρ koji krug χ dodiruje iznutra. Ove tačke dodira obrazuju sistem tačaka koji ćemo označiti sa T.

Pošto usled našeg izbora krugova α, β, nijedan par tačaka sistema S nije razdvojen parom tačaka sistema T, to je sigurno moguće obrtanjem ravni oko središta kruga χ tako dovesti do poklapanja jednu od krajnjih tačaka sistema S koji leži na χ sa jednom krajnjom tačkom sistema T koji leži na χ a da ostale tačke S prelaze u tačke koje su potpuno različite od tačaka sistema T. Pri ovom obrtanju dospeva krug π'' u dodir sa krugom ρ na taj način što je tačka C, u kojoj je poklapanje, jedina tačka dodira. Označimo krug π'' u njegovom novom položaju sa π, a središta krugova π i ρ sa P i R.

Sad ćemo dokazati da je dodirna tačka C nužno sredina izmedju oba središta P i R. Ustvari, s obzirom na izbor kruga χ', duž PR mora biti manja od odredjene duži AB i zato, prema §26, sigurno ima sredinu; neka ta sredina bude C^*. Tada svaki od oba kruga π, ρ poluobrtom oko tačke C^* prelazi u drugi, a zato iz svake tačke jednog kruga postaje tačka drugog kruga. Pošto je tačka C zajednička tačka za oba kruga π i ρ, to ona mora, pri jednom takvom poluobrtu, takodje preći u jednu zajedničku tačku krugova π i ρ; ona mora, zato, ostati nepokretna pri ovom poluobrtu i samim tim poklopiti se sa tačkom C^* oko koje je izvedeno obrtanje.

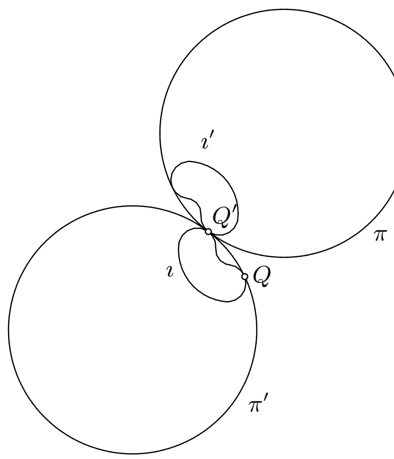
Iz maločas dokazanog stava istovremeno saznajemo ove činjenice:

Iz kruga π, poluobrtom oko tačke C na π, proizilazi krug ρ koji spolja dodiruje π u tački C; osim ρ ne postoji nijedan drugi krug koji je sa π kongruentan i koji ga spolja dodiruje u tački C i samo u ovoj tački.

§28. Dalje važi stav:

Ako krug π obuhvata ma koji krug ι i dodiruje ga, onda se ovaj dodir dešava samo u jednoj tački.

Da bismo to dokazali pretpostavimo da su Q i Q' dve različite dodirne tačke krugova ι i π. Izvedimo tada poluobrt oko tačke Q'; pri ovom poluobrtu krug π prelazi u krug π' koji dodiruje π samo u tački Q', a krug ι prelazi u krug ι' koji leži u unutrašnjosti π' i zato, sigurno, ceo leži van π, dodirujući oba kruga π i π' samo u tački Q'. Ako izvedemo sad ono obrtanje oko središta kruga π, pri kome tačka Q prelazi u Q', to će iz kruga ι proizići krug ι''



koji će ceo ležati u unutrašnjosti π, a zato, svakako, van ι', dodirujući ovaj samo u tački Q'. Na taj način dobijamo dva kruga ι i ι'' od kojih svaki dodiruje spolja njima kongruentni krug ι' u tački Q' i to samo u ovoj tački, što protivureči stavu u §27.

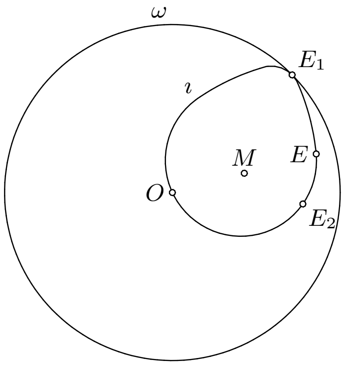
Činjenice, nadjene u §27 i §28, važe i tada kada mesto krugova π i ρ uzmemo manje krugove.

§29. Neka je P središte kruga π konstruisanog u §27, Q tačka na π, i, najzad, neka je O proizvoljna tačka. U tom slučaju možemo, koristeći se primedbom na kraju §26 i oslanjajući se, kao u §27, na stav u §20, zamisliti tačku E u takvoj blizini prema O da u unutrašnjosti kruga ι koji je opisan oko sredine M duži OE i koji prolazi kroz tačke O i E, ne postoji nijedna duž kongruentna sa PQ i da isto važi za svaku tačku E' i odgovarajući krug ι', ako E' leži još bliže tački O nego E.

Tada važi stav:

Krug ι (odn. ι') opisan oko sredine M (odn. M') duži OE (odn. OE'), koji prolazi kroz tačku O, potpuno je obuhvaćen krugom sa središtem u tački O koji prolazi kroz tačku E (odn. E') i dodirnut je njime samo u tački E (odn. E').

Radi dokaza konstruišimo najpre oko tačke O takav krug ω koji krug ι obuhvata i istovremeno dodiruje. Ovaj krug ω mora biti manji od kruga π, jer bi u suprotnom slučaju krug, opisan oko tačke O i kongruentan sa π, ulazio u unutrašnjost kruga ι, a tada bi morala postojati u unutrašnjosti kruga ι duž kongruentna sa PQ, što je nemoguće. Prema dokazanom stavu u §28, ovaj krug ω može imati sa ι samo jednu dodirnu tačku; neka je ta tačka E_1. Ako bi tačka E_1 bila različita od tačke E, moglo bi se izvesti takvo obrtanje oko tačke M pri kome bi tačka E_1 dospela u O; pri ovom obrtanju dospela bi tada tačka O u neku tačku E_2 kruga ι koja bi morala biti različita od tačke E_1.



Pošto je duž OE_1 kongruentna duži E_2O, pa stoga i duži OE_2, tačka E_2 bi morala biti isto tako tačka kruga ω; ovo protivureči okolnosti da bi trebalo da tačka E_1 bude jedina zajednička tačka krugova ω i ι; dakle, krug ω prolazi kroz tačku E, a time je naše tvrdjenje dokazano.

§30. Uzmimo za osnovu narednih izlaganja duž OE konstruisanu u §29 i dodelimo tačkama O i E brojne vrednosti 0 i 1; tada konstruišimo sredinu duži OE i dodelimo ovoj sredini brojnu vrednost $\frac{1}{2}$, dalje dodelimo sredinama duži $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}, 1)$ vrednosti $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ i zatim sredinama duži $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$,

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1)$ vrednosti $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$; i tako dalje. Dalje, izvedimo sa celom duži $(0, 1)$ poluobrt oko tačke O i dodelimo uopšte onoj tački, koja proizilazi iz tačke koja odgovara broju a, brojnu vrednost $-a$; zatim, izvedimo poluobrt oko tačke 1 i dodelimo uopšte onoj tački, koja proizilazi iz tačke koja odgovara broju a, brojnu vrednost $2 - a$ i tako dalje; zamislimo da se poluobrti naizmenično izvode čas oko tačke O, čas oko tačke E i da su novopostale tačke odgovarajući imenovane, dok se, najzad, svaki broj a ne pojavi dodeljen odredjenoj tački, kad a znači racionalan broj čiji je imenilac stepen od 2.

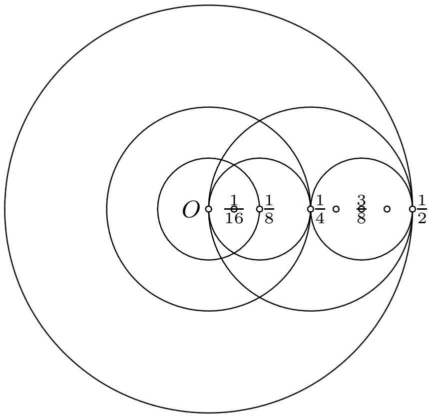
§31. Lako ćemo se uveriti pomoću ovog dodeljivanja u tačnost ovog zakona:

Poluobrtom oko tačke koja pripada broju a, svaka tačka x prelazi u tačku $2a - x$. Prema tome, ako prvo izvedemo poluobrt oko tačke $O = 0$, a zatim poluobrt oko tačke a, to se svaka tačka x preobražava u tačku $x + 2a$.

§32. Da bismo rasporedili tačke kojima pripadaju brojevi i da bismo uporedili duži njima ograničene, koristićemo se stavom postavljenim u §29 o krugovima koji se dodiruju na ovaj način:

Krug koji je opisan oko tačke 0 i koji prolazi kroz tačku $\frac{1}{2}$ potpuno obuhvata krug koji je opisan oko tačke $\frac{1}{4}$ i koji prolazi kroz tačku $\frac{1}{2}$; a pošto ovaj poslednji obuhvata krug opisan oko tačke $\frac{1}{8}$ koji prolazi kroz tačku $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ i krug opisan oko tačke $\frac{3}{8}$ koji prolazi kroz tačku $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, a ovaj poslednji opet krugove: oko $\frac{1}{16}$ koji prolazi kroz $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, oko $\frac{3}{16}$ koji prolazi kroz $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, oko $\frac{5}{16}$ koji prolazi kroz $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, oko $\frac{7}{16}$ koji prolazi kroz $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ itd., uvidjamo da je duž $(0, \frac{1}{2})$ veća od svih duži $(0, a)$ kad a znači pozitivni racionalni broj čiji je imenilac stepen od 2 i čija je vrednost manja od $\frac{1}{2}$.

Dalje krug sa središtem u tački 0 koji prolazi kroz $\frac{1}{4}$, obuhvata krug sa središtem u tački $\frac{1}{8}$ koji prolazi kroz $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Ovaj drugi obuhvaćeni krug obuhvata, sa svoje strane, krug opisan oko tačke $\frac{1}{16}$, koji prolazi kroz $\frac{2}{16}$ i krug opisan oko $\frac{3}{16}$, koji prolazi kroz $\frac{4}{16}$; ovi opet obuhvataju manje krugove opisane oko $\frac{1}{32}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{32}$ itd.; iz toga doznajemo da je duž $(0, \frac{1}{4})$ veća od svih duži $(0, a)$, kad a znači pozitivni racionalni broj čiji je imenilac stepen od 2 i čija je vrednost manja od $\frac{1}{4}$.



Zatim posmatrajmo krug sa središtem u tački 0, koji prolazi kroz $\frac{1}{8}$; on obuhvata krug opisan oko $\frac{1}{16}$ koji prolazi kroz $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, a ovaj opet obuhvata manji krug opisan oko $\frac{1}{32}$ koji prolazi kroz $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ itd.; onda zaključujemo da je duž $(0, \frac{1}{8})$ veća od svih duži $(0, a)$ kad je a pozitivni racionalni broj čiji je imenilac stepen od 2 i čija je vrednost manja od $\frac{1}{8}$. Produžujući ovaj postupak zaključivanja dobijamo ovaj opšti rezultat:

Ako je a pozitivni racionalni broj čiji je imenilac neki stepen od 2 i čija je vrednost manja od $\frac{1}{2^m}$, biće duž $(0, a)$ uvek manja od duži $(0, \frac{1}{2^m})$.

§33. Sada možemo redom dokazati naredne pomoćne stavove:

Tačke koje odgovaraju brojevima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,... konvergiraju prema tački 0.

Ako uzmemo suprotan slučaj, pošto se duži $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{4})$, $(0, \frac{1}{8})$, $(0, \frac{1}{16})$,... stalno smanjuju, morale bi tačke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,... imati svoje mesto zgušnjavanja na nekom odredjenom istinskom krugu χ sa središtem u tački 0. Neka je, naprimer, $\frac{1}{2^{n_1}}$, $\frac{1}{2^{n_2}}$, $\frac{1}{2^{n_3}}$,... niz tačaka koje konvergiraju prema tački K na χ; neka tada tačke

$$\frac{1}{2^{n_1+1}},\ \frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{1}{2^{n_3+1}},\ldots$$

imaju mesto zgušnjavanja u tački K^*. Iz stava u §25 sledi da tada K^* mora biti sredina duži OK; a ovaj zaključak, na osnovi stava dokazanog na kraju §27, protivureči okolnosti da tačka K^* mora ležati i na krugu χ.

§34. Neka su a_1, a_2, a_3,... pozitivni racionalni brojevi čiji su imenioci stepeni od 2. Ako tada beskrajni brojni niz a_1, a_2, a_3,... konvergira prema 0, to će i niz tačaka koje odgovaraju ovim brojevima, takodje konvergirati prema tački 0.

Da bismo ovo dokazali, odaberimo cele eksponente n_1, n_2, n_3,... tako da bude

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}},\ a_2 < \frac{1}{2^{n_2}},\ a_3 < \frac{1}{2^{n_3}},\ldots$$

i da niz brojeva $\frac{1}{2^{n_1}}$, $\frac{1}{2^{n_2}}$, $\frac{1}{2^{n_3}}$,... isto tako konvergira prema 0. Kako prema stavu u §32, svaka tačka a_i leži u unutrašnjosti kruga opisanog oko tačke 0 koji prolazi kroz tačku $\frac{1}{2^{n_i}}$, a pošto, prema pomoćnom stavu dokazanom u §33, krugovi opisani oko tačke 0 koji prolaze kroz tačke $\frac{1}{2^{n_1}}$, $\frac{1}{2^{n_2}}$, $\frac{1}{2^{n_3}}$,... konvergiraju prema 0, to otuda neposredno sledi tvrdjenje koje je trebalo dokazati.

§35. Najzad važi naredni stav:

Neka a_1, a_2, a_3,... bude beskrajni niz racionalnih brojeva čiji su imenioci stepeni od 2 i neka ti brojevi konvergiraju prema nekom realnom broju a: tada odgovarajuće im tačke a_1, a_2, a_3,... isto tako konvergiraju prema nekoj odredjenoj tački.

Radi dokaza pretpostavimo suprotno. Neka su, na primer, V' i V'' dve medju sobom različite tačke zgušnjavanja a_1, a_2, a_3,... , i to neka tačke $a_{1'}$, $a_{2'}$, $a_{3'}$,... konvergiraju prema V', a tačke $a_{1''}$, $a_{2''}$, $a_{3''}$,... prema tački V''. Prema primedbi u §31, za svaku tačku a_k postoji kretanje složeno od dva poluobrta, koje uopšte prevodi tačku $a_{i'}$ u tačku $a_{i'} - a_k$ i istovremeno tačku $a_{i''}$ u tačku $a_{i''} - a_k$, a pošto brojne vrednosti $a_{i'} - a_k$ i $a_{i''} - a_k$ sa rastućim indeksima dolaze proizvoljno blizu 0, to uvidjamo, s obzirom na stav u §34, da postoje kretanja koja tačku proizvoljno blisku tački V i istovremeno tačku proizvoljno blisku tački V'' dovode u proizvoljnu blizinu tačke 0. A to je nemoguće s obzirom na aksiomu III, što sa lako pokazuje pomoću jednog često primenjivanog postupka zaključivanja.

§36. Ako sada tački prema kojoj konvergiraju tačke a_1, a_2, a_3,... , dodelimo brojnu vrednost a, a time će uopšte svakoj realnoj brojnoj vrednosti biti dodeljena odredjena tačka naše ravni; sistem svih ovih tačaka nazvaćemo istinskom pravom, tako da se pod ovom istinskom pravom razume onaj sistem tačaka koji proizilazi iz tačaka O, E ako se neprestano uzimaju sredine, izvode poluobrti i dodadu tačke nagomilavanja svih dobijenih tačaka. Sve sisteme tačaka dobijene kretanjem iz ove istinske prave, nazvaćemo isto tako istinskim pravama. Istinska prava se razdeljuje svakom svojom tačkom u dve poluprave.

§37. Koristeći se pomoćnim stavom u §25, lako ćemo uvideti da poluobrtom naše istinske prave oko proizvoljne tačke a, tačka x prelazi u tačku $2a-x$; pri izvodjenju dva poluobrta oko tačke 0 i oko tačke a, tačka x prelazi u $x + 2a$.

Na osnovu stava u §35 lako zaključujemo da je tada, kad su a_1, a_2, a_3,... proizvoljni konvergentni brojevi prema a, odgovarajuće tačke a_1, a_2, a_3,... uvek konvergiraju prema odgovarajućoj tački a, tj. istinska prava je neprekidna kriva.

§38. Razmotrimo pretpostavku da postoje dve brojne vrednosti a i b koje na istinskoj pravoj pretstavljaju istu tačku P. Tačka $\frac{a+b}{2}$ je sredina duži $(a,\ b)$; ona bi se zato morala poklopiti sa tačkom P. Isto bi tada moralo važiti za sredine duži $(a,\ \frac{a+b}{2})$ i $(\frac{a+b}{2},\ b)$, tj. za tačke $\frac{3a+b}{4}$ i $\frac{a+3b}{4}$.

Uzimajući neprestano sredine, uvidjamo da bi sve tačke $\frac{A_n a+B_n b}{2^n}$, gde A_n, B_n znače pozitivne cele brojeve sa zbirom 2^n, morale biti identične sa P; a iz ovog, prema §37, sledi da uopšte svi realni brojevi koji leže izmedju a i b moraju odgovarati istoj tački P prave. Ova protivurečnost pokazuje da istinska prava nema nijednu dvojnu tačku. Isto tako uvidjamo i to da se istinska prava ne može sama u sebe povratiti.

§39. Dve prave imaju najviše jednu zajedničku tačku.

Ustvari, ako bi one imale dve zajedničke tačke A i B i ako bi na jednoj pravoj ovim tačkama odgovarale brojne vrednosti a, b, a na drugoj pravoj brojne vrednosti a', b', to bi se, prema §24, i sredine $\frac{a+b}{2}$ i $\frac{a'+b'}{2}$ morale medju sobom poklopiti. Produžujući da uzimamo sredine, kao u §38, na sličan način dolazimo do zaključka da su sve tačke koje leže na obe prave izmedju a i b odn. a' i b' medju sobom identične, a time same ove prave medju sobom identične.

§40. Naša istinska prava seče svaki krug opisan oko njene jedne tačke, recimo, oko tačke 0.

Ustvari, ako pretpostavimo suprotno, moguća su samo dva slučaja: ili postoji odredjeni krug χ koji ima centar u tački 0 i koji još pogadja istinska prava g, dok krugove oko 0 koji obuhvataju krug χ prava g više ne pogadja; ili postoji odredjeni krug χ koji prava g ne pogadja, dok sve krugove koji leže u unutrašnjosti χ sa centrom u tački 0 prava g pogadja.

Pošto prava g, prema svojoj konstrukciji, može uvek preko svake svoje tačke biti produžena i, kako je to bilo pokazano u §38, ne može imati nijednu dvojnu tačku, to bi u prvom slučaju sigurno morao postojati u unutrašnjosti χ krug sa centrom u 0, koji prava g preseca u dvema tačkama A i B na istoj strani od 0, pri čemu se tačka B uzima na produženju prave g iza A i dovoljno blisko prema A u unutrašnjosti χ. Izvedemo li sad obrtanje oko tačke 0, pri čemu bi tačka A prešla u B, naša prava g bi pri tome prešla u drugu pravu koja preseca pravu g osim u tački 0 još i u tački B; prema dokazanom stavu u §39, ovo je nemoguće.

U drugom pak slučaju označimo na krugu χ onu tačku sa K u čiju proizvoljnu blizinu dospeva istinska prava g. Opišimo tada oko tačke K istinski krug π^* koji je manji od χ i koji preseca pravu g, recimo, u tački M. Zatim, opišimo oko tačke M krug π koji bi bio veći od π^*, a manji od χ. Ovaj krug π, pošto je veći od π^*, sadrži u unutrašnjosti tačku K, to iz naše pretpostavke, u vezi sa prethodno dokazanim, sledi da se prava g koja prolazi kroz tačku M, neprekidno prostire u unutrašnjosti π, i produžena na jednu ili drugu stranu izlazi kroz neku tačku na π van kruga π i zatim se više ne vraća u krug π. Pošto, s druge strane, prava g treba da se proizvoljno približi tački K koja leži u unutrašnjosti π, to bi ona morala sadržati i samu tačku K; a to protivureči pretpostavci od koje smo pošli.

Pošto sistem svih krugova, opisanih oko neke proizvoljne tačke, pokriva bez praznina celu ravan, to iz prethodnog istovremeno sledi da se ma koje dve tačke naše ravne geometrije mogu spojiti istinskom pravom.

§41. Sad imamo da pokažemo da aksiome podudarnosti važe u našoj ravnoj geometriji.

Izaberimo radi toga neki odredjeni istinski krug χ i uvedimo, prema §18, za njegove tačke parametarsko predstavljanje pomoću ugla ω; tada se, kad ω dobiva vrednosti od 0 do 2π, istinski krug obilazi u odredjenom smeru. Iz ovoga uvodjenja sledi za svaki drugi krug, kongruentan sa χ, isto tako odredjeni smer obilaženja, naime onaj smer koji se dobija, ako, pomoću dva uzastopna izvedena obrtanja, prema §22, poklopimo središte kruga χ sa središtem datog kruga. Pošto, s obzirom na definisani pojam kretanja u početku ove rasprave, nije moguće poklopiti krug χ sa samim sobom u obrnutom smeru obilaženja, to stvarno postoji za svaki krug jedan odredjeni smer obilaženja.

Uzmimo sad dve poluprave koje izlaze iz jedne tačke M, a koje zajedno ne čine istinsku pravu; opišimo oko tačke M krug, kongruentan sa χ i fiksirajmo onaj komad tog kruga isečen tim polupravama koji odgovara parametarskom intervalu manjem od broja π. Ustanovljeni smer obilaženja vodi tada u unutrašnjost fiksiranog luka kruga od jedne poluprave ka drugoj polupravoj; prvu polupravu nazvaćemo desnim, a drugu polupravu levim krakom ugla izmedju obe poluprave, dok će nam sam interval ($< \pi$) služiti kao mera za ovaj ugao. Tada iz našeg pojma kretanja sledi prvi stav o podudarnosti dvaju trouglova u ovakvom obliku:

Ako za dva trougla ABC i $A'B'C'$ važe podudarnosti

$$AB \equiv A'B', \; AC \equiv A'C', \; \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

i ako su, dalje, AB i $A'B'$ desni, AC i $A'C'$ levi kraci uglova $\angle BAC$, odn. $\angle B'A'C'$, to uvek važe podudarnosti

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{ i } \angle ACB \equiv \angle A'C'B',$$

$$BC \equiv B'C'.$$

§42. Pošto smo u §30 - §40 definisali istinsku pravu i izveli njene osobine, treba da razlikujemo dva slučaja:

Pretpostavimo, prvo, da postoji samo jedna prava koja prolazi kroz datu tačku i ne preseca datu pravu (aksioma paralelnih). U tom slučaju za našu ravan važe sve aksiome ravni koje sam postavio u glavnom delu ove knjige (gl. I), samo što treba uzeti aksiomu III_5 u užem značenju kako je formulisana u §41. No i pri ovoj užoj formulaciji poslednje aksiome podudarnosti nužno se dobija Euklidova ravna geomettrija (uporedi dodatak II, str.124 kao i gl. I, str.29-30).

Drugo, pretpostavimo da kroz svaku tašku A postoje dve poluprave koje zajedno ne sačinjavaju istu pravu i koje ne seku datu pravu g, dok svaka poluprava koja leži u unutrašnjosti ugla koji obrazuju date poluprave i koja polazi iz tačke A, preseca pravu g; neka pri tome tačka A leži van g.

Ako se tada iskoristi neprekidnost, dobija se da, i obrnuto, ma kojim dvema polupravama koje polaze iz tačke A i ne sačinjavaju zajedno istu pravu, uvek odgovara odredjena prava g koja ove dve poluprave ne preseca, a seče svaku polupravu koja polazi iz tačke A i prostire se u unutrašnjosti ugla izmedju dveju datih polupravih. Pri ovim uslovima dobija se tada ravna geometrija Boljai-Lobačevskoga, čak i kad uzmemo za osnovu aksiomu kongruencije III_5 u njenoj užoj formulaciji, što se može pokazati pomoću mog računa „krajevima".

U zaključku bih hteo da ukažem na karakterističnu razliku izmedju ovog zasnivanja geometrije i onog zasnivanja koje sam pokushao da dam u glavnom delu ove knjige. Tamo sam se pridržavao takvog rasporeda aksioma pri kome je neprekidnost zahtevana na p o s l e d n j e m mestu, iza svih ostalih aksioma, tako da se pri tome prirodno u prvom redosledu javlja pitanje ukoliko su poznati stavovi i dokazi elementarne geometrije nezavisni od zahteva neprekidnosti. Naprotiv, u prethodnom istraživanju zahteva se neprekidnost na p r v, o m mestu, pre svih ostalih aksioma, pomoću definicije ravni i kretanja tako da bi se ovde najvažniji zadatak sastojao u tome da se nadje najmanji broj zahteva, iz kojih bi se mogli, pri najshirem korish
'cenju neprekidnosti, dobiti elementarni geometrijski oblici (krug i prava) i njihove nužne osobine za izgradjivanje geometrije. I stvarno, prethodno istraživanje je pokazalo da su za ovo dovoljni zahtevi iskazani u gornjim aksiomama $I-III$.

G e t i n g e n, 10. maj 1902.

Dodatak V

O površinama konstantne Gausove krivine

O površinama negativne krivine

Po Beltrami - u (*Beltrami*) površina negativne konstantne krivine ostvaruje deo ravni Lobačevskoga (ne-euklidske ravni) ako se kao prave u ravni Lobačevskoga uzmu geodezijske linije te površine konstantne krivine, a kao dužine i uglovi u ravni Lobačevskoga - strvarne dužine i uglovi na toj površini. Medju dosad ispitivanim površinama negativne konstantne krivine ne nalazimo nijednu koja bi se prostirala neprekidno i neprekidno menjala svoju tangentnu ravan u okolini svake svoje tačke; naprotiv, sve dosad poznate površine konstantne negativne krivine imaju singularne linije, preko kojih nije moguće neprekidno produžavati te površine sa neprekidnom promenom tangentne ravni. Iz ovog razloga ne uspeva da se ostvari, nijednom dosad poznatom površinom negativne konstantne krivine, cela ravan Lobačevskog, i izgleda nam da je od principijalnog interesa pitanje da li se može uopšte predstaviti cela ravan Lobačevskoga na Beltramijev način pomoću analitičke površine negativne konstantne krivine.

Da bismo odgovorili na ovo pitanj, poći ćemo od pretpostavke analitičke površine negativne konstantne krivine -1, koja se u konačnom svuda regularno ponaša i nema singularnih mesta; tada ćemo pokazati da ova pretpostavka vodi protivurečnosti. Takva površina kakvu pretpostavljamo, potpuno je karakterisana ovim iskazom:

Svako mesto nagomilavanja tačaka površine koje leži u konačnom, takodje je tačka te površine.

Ako je O ma koja tačka te površine, uvek je moguće pravougle koordinate ose x, y, z postaviti tako da tačka O bude početna tačka koordinatnog sistema i da jednačina površine u okolini ove tačke O glasi

$$z = ax^2 + by^2 + (x, y), \tag{1}$$

gde konstante a i b zadovoljavaju relaciju:

$$4ab = -1,$$

a stepeni red (x, y) sadrži samo članove treće ili viših dimenzija u odnosu na x i y. Očigledno je tada $z-$osa normala površine, a ose x i y daju pravce koji su odredjeni glavnim krivinama površine.

Jednačina

$$ax^2 + by^2 = 0$$

odredjuje obe glavne tangente površine kroz tačku O koja leži u $xy-$ravni; zato su te tangente uvek odvojene jedna od druge i pokazuju pravce u kojima se prostiru obe asimtotske linije površine kroz proizvoljnu tačku O. Svaka od ovih asimptotskih linija pripada nekoj porodici asimptotskih linija koje pokrivaju regularno i bez praznina celu okolinu tačke O na površini. Zato, ako shvatimo pod u i v dovoljno male vrednosti, možemo, svakako, izvesti narednu konstrukciju. Prenesimo na jednu od dveju asimptotskih linija, koje prolaze kroz tačku O, parametarsku vrednost u od O kao dužinu, kroz dobijenu krajnju tačku povucimo drugu moguću asimptotsku liniju i prenesimo na nju parametarsku vrednost v kao dužinu: tako dobijena krajnja tačka površine koja je jednoznačno odredjena vrednostima parametara u i v. Shvatimo li, shodno tome, pravougle koordinate x, y, z površine kao funkcije od u i v, stavljajući

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

onda su ove, svakako, za dovoljno male vrednosti od u i v regularne analitičke funkcije od u i v.

Poznata teorija površina konstantne krivine -1 pruža nam, dalje, ove činjenice:

Ako φ označava ugao izmedju dveju asimptotskih linija koje prolaze kroz tačku u, v, onda tri osnovne veličine površine dobijaju vrednosti:

$$e \equiv (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2 = 1,$$

$$f \equiv \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\varphi,$$

$$g \equiv (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2 = 1,$$

i zato, kvadrat izvoda dužine luka proizvoljne krive na toj površini po nekom parametru t dobija oblik:

$$(\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{du}{dt})^2 + 2\cos\varphi\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (\frac{dv}{dt})^2. \tag{2}$$

Ugao φ kao funkcija od u i v zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} = \sin\varphi. \tag{3}$$

Ako se odreknemo jednoznačne korespodencije izmedju para vrednosti u, v i tačaka površine, izvedena konstrukcija može se proširiti na proizvoljne vrednosti od u, v. Svakako, $u-$linija koja prolazi kroz tačku O može eventualno biti zatvorena; no, ipak, na osnovu učinjene pretpostavke o površini str. 181, može se na ovu liniju, od tačke O na obe strane, preneti proizvoljno velika dužina. Dakle, svakoj vrednosti od u odgovara tačka na asimptotskoj liniji.

Posmatrajmo sad u svakoj takvoj tački P drugu asimptotsku liniju koja prolazi kroz nju. Uzećemo na ovoj liniji kao parametar v dužinu luka računatu od tačke P (u jednom smeru); opet se mogu preneti na obe strane od P proizvoljno velike dužine na asimptotsku liniju.

Svakom paru vrednosti u, v odgovara, na taj način, jednoznačno - ali u opštem slučaju nipošto uzajamno jednoznačno - neka tačka naše ravni. Tako dobijamo, geometrijski rečeno, preslikavanje cele Euklidove ravni (u, v) na neku površinu superpozicije naše date površine ili na njen deo.

Sad, pre svega, treba pokazati da je svaka $u-$linija koje pripadaju okolini tačke $(u, 0)$.

Za opšti dokaz dovoljno je pokazati ovo:

Ako je a pozitivan broj, a b proizvoljan realan broj, onda je slika svake duži

$$-a \leq u \leq +a, v = b$$

na našoj površini komad asimptotske linije ili niz komada na njoj, a u predstavlja na ovoj liniji dužinu luka.

Ovaj stav je, pre svega, tačan za $b = 0$. Dalje se dokazuje:

1. Ako stav važi za $b = b_0$, onda on važi i za svako b koje se dovoljno malo razlikuje od b_0.

2. Ako stav važi za $b_1 < b < b_2$, onda on važi i za $b = b_1$ i za $b = b_2$.

Dokaz toga se izvodi pomoću iskoriščavanja neprekidnosti i primene Hajne-Borelovog $(Heine, Borel)$ stava o pokrivanju.

Time je tada izveden dokaz za svako b.

Označava li sad $\varphi = \varphi(u, v)$ (kao i na str. 182) ugao izmedju dveju asimptotskih linija koje prolaze kroz tačku (u, v) površine, pri čemu je ugao računat od pozitivnog $u-$smera do pozitivnog $v-$smera, onda je $\varphi(u, v)$ za sve vrednosti u, v definisana neprekidna funkcija i ima neprekidne parcijalne izvode koji zadovoljavaju d i f e r e n c i j a l n u j e d n a č i n u (3).

Pomoću podesnog izbora pozitivnog $u-$ i $v-$ smera možemo, svakako, postići da u tački $u = v = 0$ važe jednačine:

$$0 < \varphi < \pi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \geq 0.$$

Pošto φ nigde nije ni 0, ni π, mora biti, zbog neprekidnosti funkcije $\varphi(u, v)$, za sve vrednosti u, v:

$$0 < \varphi(u, v) < \pi,$$

dakle

$$\sin \varphi > 0.$$

Ali funkcija $\varphi(u, v)$ sa ovakvim osobinama ne može postojati.

Jer iz diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi$$

sledi, najpre, da je

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} > 0,$$

i, zato, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ pri rastućem v raste.

Naročito mora biti

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,1) > \frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0) \geq 0,$$

a zato se može odrediti pozitivna veličina a tako da za $0 \leq u \leq 3a$ bude:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,1) > 0.$$

Neka m označava pozitivni minimum od

$$\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,1) \text{ za } 0 \leq u \leq 3a.$$

Tada je za $v \geq 1$:

$$\varphi(a,v) - \varphi(0,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\vartheta a, v)\cdot a \geq \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\vartheta a, 1)\cdot a \geq m\cdot a, \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

i, isto tako

$$\varphi(3a,v) - \varphi(2a,v) \geq m\cdot a,$$

dakle

$$\varphi(a,v) \geq \varphi(0,v) + m\cdot a > m\cdot a$$

i

$$\varphi(2a,v) \leq \varphi(3a,v) - m\cdot a < \pi - m\cdot a.$$

Dalje je za

$$0 \leq u \leq 3a, \qquad v \geq 1:$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \geq \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,1) > 0;$$

dakle, $\varphi(u,v)$ monotono raste zajedno sa u. Zato za

$$a \leq u \leq 2a, \qquad v \geq 1$$

važi:

$$0 < m\cdot a < \varphi(a,v) \leq \varphi(u,v) \leq (2a,v) < \pi - m\cdot a,$$

dakle

$$\sin\varphi(u,v) > \sin(m\cdot a) = M,$$

pri čemu je $M > 0$ i nezavisno od u, v.

Prema tome je vrednost dvostrukog integrala

$$\int\int \sin\varphi(u,v)dudv,$$

primenjenog na pravougaonik sa temenima

$$(a,1),\quad (2a,1),\quad (2a,V),\quad (a,V)\qquad (V>1)$$

veća od

$$M\cdot a(V-1),$$

dakle, pri podesnom izboru V veća od π.

S druge strane, iz diferencijalne jednačine (3) dobija se

$$\int\int \sin\varphi du dv = \int_a^{2a}\int_1^V \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}dudv = [\varphi(2a,V)-\varphi(a,V)]-[\varphi(2a,1)-\varphi(a,1)] < \pi,$$

pošto je

$$\varphi(2a,V)-\varphi(a,V) < \varphi(2a,V) < \pi$$

i

$$\varphi(2a,1)-\varphi(a,1) > 0.$$

Došli smo, dakle, do protivurečnosti i zato smo prinudjeni da odbacimo našu, u početku usvojenu, pretpostavku, tj. uvidjamo da ne postoji analitička površina konstantne negativne krivine koja bi bila bez singulariteta i svuda regularna. Zato, posebno, treba odgovoriti negativno na postavljeno pitanje u početku da li se može na Beltramijev način ostvariti cela ravan Lobačevskog pomoću regularne analitičke površine u prostoru.

O površinama pozitivne konstantne krivine.

U početku ovog istraživanja pošli smo od pitanja o površini negativne konstantne krivine koja bi se svuda u konačnom prostirala regularno analitički i došli smo do rezultata da takva površina ne postoji. Sad ćemo obraditi pomoću analogne metode isto pitanje za pozitivnu konstantnu krivinu. Očigledno, sfera je zatvorena površina pozitivne konstantne krivine bez singulariteta i prema dokazu koji je izveo H. Libman (*H.Liebmann*), na moj podsticaj, ne postoji nikakva druga zatvorena površina istog svojstva. Ovu ćemo činjenicu sada izvesti iz jednog stava koji važi za proizvoljni komad površine pozitivne konstantne krivine bez singulariteta i ovako glasi:

Neka je na površini pozitivne konstantne krivine $+1$ ograničeno u konačnome neko jednostruko ili višestruko povezano područje bez singulariteta; zamislimo tada da su u svakoj tački ovog područja, kao i u tačkama njegove granice, konstruisani glavni poluprečnici krivine površine, onda veći od glavnih poluprečnika krivine sigurno ne dostiže svoj maksimum i, zato, manji ne dostiže svoj minimum ni u jednoj tački koja leži u unutrašnjosti područja - osim ako je naša površina deo sfere poluprečnika 1.

Radi dokaza primetimo, najpre, da je, usled naše pretpostavke, proizvod oba glavna poluprečnika krivine svuda $=1$, a zato veći od glavnih poluprečnika krivine uvek mora biti ≥ 1. Iz ovog razloga maksimum većih glavnih poluprečnika krivine očigledno je samo tada $=1$, ako su oba glavna poluprečnika krivine u svakoj tački našeg komada površine $=1$. U ovom naročitom slučaju, svaka tačka tog komada površine je pupčasta tačka i otuda se na poznati način lako zaključuje da posmatrani komad površine mora biti komad sfere poluprečnika 1.

Neka je sad maksimum većeg od oba glavna poluprečnika krivine naše površine > 1; tada ćemo pretpostaviti, nasuprot našem tvrdjenju, da postoji tačka O u unutrašnjosti tog komada površine, u kojoj se taj maksimum postiže. Pošto ova tačka O sigurno ne može biti pupčasta, a povrh toga, regularna je tačka naše površine, to će okolina ove tačke biti pokrivena svakom od porodica linija krivine površine jednostruko i bez praznina. Uzmemo li ove linije krivine za koordinatne linije, a samu tačku O za početak tog krivolinijskog koordinatnog sistema, to će, prema poznatoj teoriji površina pozitivne kostantne krivine, važiti ove činjenice:

Neka r_1 označava veći od oba glavna poluprečnika krivine za tačku (u, v) koja leži u okolini početne tačke $O = (0, 0)$; u ovoj okolini je $r_1 > 1$. Stavimo

$$\rho = \frac{1}{2} \log \frac{r_1 + 1}{r_1 - 1};$$

tada pozitivna realna veličina ρ kao funkcija od u i v zadovoljava narednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = \frac{e^{-2\rho} - e^{2\rho}}{4}. \tag{4}$$

Pošto kad r_1 opada funkcija ρ nužno raste, to ρ, kao funkcija od u i v, mora na mestu $u = 0, v = 0$, imati minimalnu vrednost, pa prema tome ρ razvijeno po stepenima promenljivih u i v ima nužno oblik:

$$\rho = a + \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + ...,$$

gde a, α, β, γ označavaju konstante, pri čemu kvadratna forma

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2$$

za realno u i v nikad ne sme imati negativnu vrednost. Iz ove poslednje okolnosti za konstante α i γ nužno slede nejednačine:

$$\alpha \geq 0 \text{ i } \gamma \geq 0 \tag{5}$$

Unesimo, s druge strane ρ razvijeno u red u diferencijalnu jednačinu (4); za $u = 0$ i $v = 0$ dobićemo tada:

$$2(\alpha + \gamma) = \frac{e^{-2\alpha} - e^{2\alpha}}{4}.$$

Pošto konstanta a predstavlja vrednost od ρ u tački $O = (0, 0)$ i prema tome, ispada pozitivna, biće izraz sa desne strane svakako < 0; zato poslednja jednačina vodi nejednačini

$$\alpha + \gamma < 0,$$

koja stoji u protivurečnosti sa nejednačinama (5). Time smo saznali da je naša prvobitna pretpostavka, po kojoj bi umesto maksimuma ležalo u unutrašnjosti komada površine, nezasnovana; samim tim je dokazana tačnost gore postavljenog stava.

Otuda, kao što je već pomenuto, neposredno sledi stav da zatvorena površina sa pozitivnom konstantnom krivinom 1 bez singulariteta uvek mora biti sfera poluprečnika 1. Ovaj rezultat istovremeno pokazuje da se sfera kao celina ne može izviti, a da se na površini nigde ne pojavi singularitet.

Najzad, ovo istraživanje dovodi za nezatvorenu površinu do rezultata: ako zamislimo iz površine lopte isečen proizvoljan komad, pa taj komad proizvoljno izvijemo, onda se maksimum svih većih glavnih poluprečnika krivina, dobijenih na taj način, uvek nalazi na granici tog komada površine.

G e t i n g e n, 1900.

Dopuna *I*

Sistem aksioma za realne brojeve, naveden u §13, uzet je uglavnom iz Hilbertovog predavanja „O pojmu broja"*Jahrb.d.Deutsch.Math.Ver.* 8 (1900), u kome su oni, u §13 kao stavovi nabrojani, zahtevi iskazani kao aksiome. Iz tog predavanja navešćemo ovde naredne primedbe:

1. Egzistencija broja 0 (stav 3, str. 41) je posledica stavova 1 i 2 i asocijativnog zakona sabiranja.

2. Egzistencija broja 1 (stav 6, str. 41) je posledica stavova 4 i 5 i asocijativnog zakona množenja.

3. Komutativni zakon sabiranja (stav 8, str. 41) posledica je stavova 1 - 6 i asocijativnog zakona sabiranja i oba distributivna zakona: Naime biće

$$
\begin{aligned}
(a+b)(1+1) &= (a+b)1+(a+b)1 = a+b+a+b \\
&= a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b
\end{aligned}
$$

prema tome

$$a+b+a+b = a+a+b+b,$$

i stoga prema stavu 2

$$b+a = a+b$$

Da se komutativni zakon množenja (stav 12, str. 42) može izvesti iz stavova 1–11, 13–16 i 17 (Arhimedov stav), ali ne može bez korišćenja stava 17, pokazano je u §32, 33.

P. Bernajs

Dopuna *II*

Uprošćeno zasnivanje nauke o proporcijama

Ono zasnivanje nauke o proporcijama bez korišćenja Arhimedove aksiome, tj. na osnovu aksioma $I - IV$, koje je dato u trećoj glavi §14–16, može se uprostiti.

Koristimo one na početku §15 str. 55 – 56 uvedene oznake za duži, jednakost duži, zbir duži kao i tamo zabeleženu činjenicu da za zbir duži važi asocijativni i komutativni zakon.

Kao razmeru $a : b$ duži a, b definišemo sad ugao (jednoznačno odredjen u smislu kongruencije), koji u pravouglom trouglu kome su katete a, b leži naspram katete a. Kažemo, da su razmere jednake, ako su podudarni uglovi koji ih definišu, i u ovom smisli pišemo „proporciju (srazmeru)"$a : b = c : d$. Prema tome, odmah važi da je svaka razmera duži sama sebi jednaka i da su dve razmere duži, jednake nekoj trećoj, i medju sobom jednake, kao i:

ako je $a = c$ i $b = d$, onda je $a : b = c : d$.

Na osnovu stava o zbiru uglova u trouglu važi osim toga:

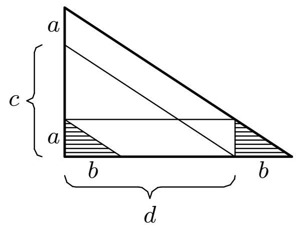
$$\text{ako je } a : b = c : d, \text{ onda je } b : a = d : c.$$

Dalje se pomoću aksioma III_5 i IV (vidi sliku) dobija stav:

$$\text{ako je } a : b = c : d, \text{ onda je } a : b = (a + c) : (b + d),$$

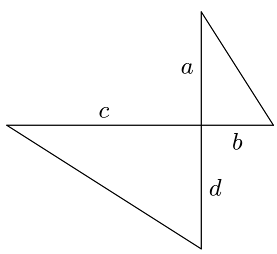
i na osnovu stava o spoljašnjem uglu:

$$\text{ako je } a : b = a : c, \text{ onda je } b = c.$$



Iz poslednjeg stava posebno proizilazi, da za tri duži a, b, c može postojati samo jedna četvrta proporcionala, tj. samo jedno rešenje x proporcije $a : b = c : x$. Egzistencija četvrte proporcionale proističe iz mogućnosti prenošenja uglova u vezi sa aksiomom paralelnih.

Stav o medjusobnoj razmenljivosti unutrašnjih članova u nekoj proporciji, tj. iskaz: ako je $a : b = c : d$, onda je $a : c = b : d$, dobija se posmatranjem dva pravugla trougla, koji imaju katete a, b odnosno c, d a tako su postavljeni, da kateta c drugog trougla leži u produženju katete b prvog trougla preko temena pravog ugla, a isto tako d u produženju a (vidi sliku).



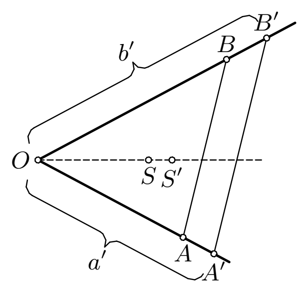
Ovde na osnovu pretpostavljene proporcije krajevi obe hipotenuze leže na krugu, što se zaključuje iz stava o jednakosti periferijskih uglova nad istim lukom, odn. iz njemu obrnutog stava. Iz ovog stava onda proizilazi i proporcija: $a : c = b : d$ posmatranjem trouglova sa katetama a, c i b, d

Kao posledica medjusobne razmenljivosti unutrašnjih članova proporcije posebno dobija se sastavljivost proporcija:

ako je $a : b = a' : b'$ i $b : c = b' : c'$, onda je i $a : c = a' : c'$.
Naime, iz datih proporcija dobija se razmenom unutrašnjih članova $a : a' = b : b' = c : c'$, pa time $a : c = a' : c'$.

Uzimanjem u obzir egzistencije četvrte proporcionale dobija se naredno drugo pravilo o sastavljanju proporcija:
ako je $a : b = b' : a'$ i $b : c = c' : b'$, onda je i $a : c = c' : a'$.
Naime, ako je u četvrta proporcionala za a, b, c', tako da bude $a : b = c' : u$, važiće na osnovu ove pretpostavke $c' : u = b' : a'$, dakle $c' : b' = u : a'$ i dalje $u : a' = b : c$, a onda se sastavljanjem proporcija $c' : u = a : b$ i $u : a' = b : c$ (prema prethodnom pravilu) dobija: $c' : a' = a : c$.

Sad treba dokazati osnovni stav nauke o proporcijama koji glasi: Ako dve prave odsecaju duži a, a', odn. b, b' na kracima proizvoljnog ugla, onda važi proporcija $a : a' = b : b'$. Dokaz se izvodi (na odgovarajući način kao dokaz stava 41 u §16) pomoću stava, da se simetrale uglova trougla seku u jednoj tački. Ovaj stav se primenjuje na trouglove OAB i $OA'B'$, gde je O teme uočenog ugla, a A, B, odn. A', B' su tačke u kojima jedna i druga od dve paralelne seče krake ugla, i gde je dalje $OA = a$, $OB = b$, $OA' = a'$, $OB' = b'$ (vidi sliku).



Neka S bude presek simetrala uglova u trouglu OAB, a S' u trouglu $OA'B'$: tada S ima isto rastojanje r od pravih OA i OB, a isto tako ima S' isto rastojanje r' od ovih pravih. Pokazaćemo da je $a : a' = r : r'$. Na isti način se onda dobija $b : b' = r : r'$, a time i samo tvrdjenje.

Proporciju $a : a' = r : r'$ dobijamo posmatranjem trouglova OAS i $OA'S'$, za koje je $\angle SOA = \angle S'OA' = \angle SAO = \angle S'A'O$. Ova dva ugla su uostalom (kao polovine ugla u trouglu) oštri uglovi; stoga podnožja D i D' normala iz S i S' na pravoj OA, padaju u unutrašnjost duži OA i OA'. Razložimo OA u odsečke u, v, a OA' u odsečke u', v'; tada je

$$r : u = \angle SOA = \angle S'OA' = r' : u'$$
$$r : v = \angle SAO = \angle S'A'O = r' : v'$$

prema tome

$$r : r' = u : u' = v : v' = (u + v) : (u' + v') = a : a'$$

tako da je,ustvari,

$$a : a' = r : r'$$

Primenom osnovnog stava nauke o proporcijama, može se posebno stav, koji je Hilbert nazvao Paskalovim, svesti na maločas pomenuto drugo pravilo o sastavljanju proporcija. Taj stav (stav 40 u §14) tvrdi: Ako su A, B, C odn. $A', B'C'$ po tri tačke na dvema pravima koje se seku i sve su različite od presečne tačke te dve prave, onda, ako je BC' prema CB' i CA' prema AC' paraleleno, biće i AB' prema BA' paralelno. Obeležimo li duži OA, OB, OC sa a, b, c, a duži OA', OB', OC' sa a', b', c', biće prema osnovnom stavu nauke o proporcijama naša pretpostavka ekvivalentna ovim dvema proporcijama

$$b : c = c' : b' \quad (1) \qquad c : a = a' : c' \quad (2)$$

a tvrdjenje ekvivalentno proporciji

$$a : b = b' : a'.$$

Medjutim, ova proporcija se dobija iz dve prethodne prema drugom pravilu o sastavljanju proporcija.

Pošto je na taj način nauka o proporcijama dobijena bez upotrebe množenja duži, može se ovo naknadno uvesti, za što je potrebno utvrditi neku jediničnu dužinu e. Naime, kao proizvod duži a, b (u odnosu na jedinicu e) definiše se četvrta proporcionala za e, a, b.

Što se tiče zakona računanja za tako definisano množenje duži, to se komutativni zakon dobija iz medjusobne razmenljivosti unutrašnjih članova proporcije. Asocijativni zakon kaže: ako je $e : a = b : u$; $e : b = c : v$ i $e : u = c : w$, tada je $e : a = v : w$. Ovo se dobija na ovaj način: iz druge date proporcije dobijamo $b : e = v : c$; ova zajedno sa trećom datom proporcijom daje sastavljanjem $b : u = v : w$, a time na opsnovu prve date proporcije $e : a = v : w$. Distributivni zakon kaže: ako je $e : a = b : u$; $e : a = c : v$, onda je $e : a = (b + c) : (u + v)$. Za dokaz je dovoljno pokazati: ako je $b : u = c : v$, onda je $b : u = (b + c) : (u + v)$; ovo medjutim važi prema jednom stavu koji smo u početku pomenuli.

Na ovako uvedeni segmentni račun može se sad, kao što je to pokazano u §17, nadovezati zasnivanje jedne analitičke geometrije ravni.

P. Bernajs

Dopuna *III*

U dodatku *II* pokazano je izmedju ostalog (up. str. 126), da se na aksiomi kongruencije trouglova u užem smislu ne može zasnovati euklidska nauka o površini, pošto se na ovoj osnovi (bez korišćenja Arhimedove aksiome) ne može dokazati Euklidov stav, da dopunski jednaki trouglovi jednakih osnovica imaju uvek jednake visine, pa stoga ni stav 52.

U ranijim izdanjima je dodatak II sadržao i jednu inverziju ovog razmatranja, naime dokaz, da uzimanje jedne stavu 52 ekvivalentne aksiome smeštanja (*Einlagerung*) omogućava, da se iz uže aksiome kongruencije III_5^* dobije prvobitno šira aksioma kongruencije III_5. Ovo rasudjivanje navešćemo ovde u narednim izlaganjima sa samo nebitnim promenama koje su prilagodjene ovom novom izdanju.

"Pomenuli smo ranije (up. str. 112) da iz aksiome o podudarnosti trouglova u užoj formulaciji III_5^* i prethodnih aksioma pored aksioma III_6 i III_7 nužno sledi aksioma konvergencije III_5, a time uopšte kongruencija figura u široj formulaciji, čim uzmemo da važi stav o jednakosti uglova na osnovici u ravnokrakom trouglu.

Izgleda mi od značaja da se ovo upotpunjavanje aksiome kongruencije u užoj formulaciji III_5^* može izvesti još na jedan sasvim drugi način, naime pomoću jednog sasvim intuitivnog zahteva, čiji se sadržaj poklapa sa stavom 52 koji sam u Osnovama ja dokazao (str. 66), a koji zahtev sa druge strane, kako smo to pokazali u dodatku II (up. str. 126), nije posledica stavova kongruencije u užem smislu.

Neka su pojmovi „razloživo jednako"i „dopunski jednako" definisani kao u §18 „Osnova geometrije" - ali ipak tako, da se pri tome razume pojam kongruencije u užem smislu. U tom smislu će se u narednim izlaganjima primenjivati uvek samo aksioma kongruencije u užoj formulaciji III_5^* i njoj prethodne aksiome I, II, III_{1-4} kao i aksioma paralelnih IV.

Taj zahtev u pitanju, koji ovde treba da služi kao dopuna, glasi:

Aksioma smeštanja. Poligon nije nikad razloživo jednak drugom poligonu čije ograničenje sadrži unutrašnje tačke, ali ne sadrži ni jednu spoljašnju tačku prvog poligona, tj. koji je u prvom smešten.

Iz ove aksiome se prvo lako izvodi stav:

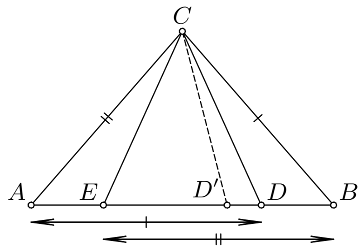
Poligon nije nikad dopunski jednak drugom poligonu koji je u prvom poligonu smešten.

I zaista, kad bi neki poligon P bio dopunski jednak poligonu Q koji se nalazi u unutrašnjosti P, tada bi morala postojati dva jedna drugom razloživo jednaka poligona P' i Q' tako, da poligon $P + P'$ bude razloživo jednak poligonu $Q + Q'$. Kako bi onda i $P + P'$ sa $P + Q'$ bilo razloživo jednako, morali bi i poligoni $P + Q'$ i $Q + Q'$ biti razloživo jednaki, što protivureči usvojenoj aksiomi smeštanja.

Sad ćemo redom dokazati naredne stavove:

Ako su u nekom trouglu ABC oba ugla kod A i B jedan drugom jednaka, biće onda uvek i ovim uglovima naspramne strane jednake.

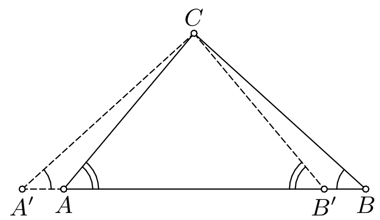
Radi dokaza odredimo na AB tačke E i D, tako da bude $AD = BC$ i $BE = AC$. Iz prvog stava kongruencije u užoj formulaciji sledi kongruencija trouglova DAC i CBE; oba ova trougla su stoga i dopunski



jednaka. Odavde zaključujemo da se i njihove osnovice AD i BE jedna sa drugom poklapaju.

Ako ovo ne bi bio slučaj, pa uzmemo, recimo, $AD' = BE$, onda bi iz poznatog Euklidovog postupka (up. str. 58) proizilazilo da su oba trougla $AD'C$ i BEC jedan drugom dopunski jednaka. Medjutim, tada bi i trouglovi ADC i $AD'C$ morali jedan drugom biti dopunski jednaki, što protivureči prethodnom stavu koji smo dobili iz aksiome smeštanja. Jednakost duži AD i BE vodi neposredno tvrdjenju koje smo postavili.

Ako su u nekom trouglu ABC dve strane AC i BC jedna drugoj jednake, biće uvek i ovim stranama naspramni uglovi jedan drugom jednaki.Radi dokaza uzmimo nasuprot da je ugao $\angle CAB$ veći od ugla $\angle CBA$. Zatim odredimo na pravoj AB tačke A' i B' na taj način da bude



$$CA'B = CBA \ \text{ i } \ CB'A = CAB.$$

Prema prethodno dokazanom stavu je stoga

$$CA' = CB \ \text{ i } \ CB' = CA,$$

a odavde se korišćenjem pretpostavke dobija

$$CA' = CB' \tag{1*}$$

Ako na trouglove ACA' i BCB' primenimo stav o spoljašnjem uglu, dobićemo jednačine

$$\angle ACA' = \angle CAB - \angle CA'B$$
$$\angle BCB' = \angle CB'A - \angle CBA;$$

stoga je

$$(2^*) \qquad \angle ACA' = \angle BCB'.$$

Obrasci (1^*) i (2^*) u vezi sa pretpostavkom kazuju, da su trouglovi ACA' i BCB' jedan drugom kongruentni u užem smislu; medjutim u tom slučaju posebno bi bilo

$$\angle AA'C = \angle BB'C$$

Ovaj zaključak je besmislica, pošto su ova dva ugla unutrašnji odn. nesusedni spoljašnji ugao u trouglu $A'B'C$.

Time je postavljeni stav dokazan, i mi odmah uvidjamo da su stavovi o podudarnosti trouglova u širem smislu nužna posledica aksiome kongruencije u užem obliku III_5^*, ako se još uzme u pomoć gornja intuitivna aksioma smeštanja koja se odnosi na pojam razložive jednakosti."

Iz ovog dokaza je odmah jasno, da se aksioma smeštanja za ovu primenu može zameniti sledećom prostijom aksiomom:

Ako u trouglu ABC tačka D leži na strani AB izmedju A i B, tada trouglovi ABC i ADC nisu dopunski jednaki.