Neeuklidske geometrije (materijali za predmet Odabrana poglavlja geometrije)

Miroslava Antić

O predmetu

Tokom prethodnih godina, imali smo prilike da se upoznamo sa nekoliko različitih geometrija: euklidskom, hiperboličkom, afinom, projektivnom. U euklidskoj geometriji smo se upoznali i sa inverzijom u odnosu na krug i videli da, u izvesnom smislu, predstavlja generalizaciju osne refleksije.

Jedan od načina posmatranja neke geometrije i njene karakterizacije je posmatranje njene odgovarajuće grupe transformacija i objekata i osobina koje su u tim transformacijama invarijantne. Ovaj pristup je predložio F. Klajn, u svom radu, objavljenom 1872. godine, koji po univerzitetu gde je Klajn radio nosi naziv *Erlangenski program*.

U ovom kursu, detaljnije ćemo analizirati grupe transformacija geometrija sa kojima smo već imali dodira, kao i grupu transformacija generisanu osnim refleksijama i inverzijama u odnosu na krug koja karakteriše inverzivnu geometriju. Takođe, videćemo da su neke od ovih grupa i podgrupe drugih, što će nam dati uvid u hijerarhiju među ovim geometrijama.

Tokom kursa ćemo koristiti pojmove koje su studenti naučili na Geometrijama 1, 2, 4, 5 kao i na Linearnoj algebri. Ipak, podsetićemo se definicija mnogih od tih pojmova, a i ponovo ćemo pokazati da važe neka od tvrđenja koja su nam iz ugla ovog predmeta posebno interesantna. Autor će se truditi da ovaj materijal bude pisan jednostavnim jezikom, sa tumačenjima i ilustracijama tvrđenja koja se daju, nadajući se da i studenti koji možda neki od navedenih kurseva nisu slušali, moći da savladaju dato gradivo.

Ilustracije su izrađene pomoću alata GCLC.

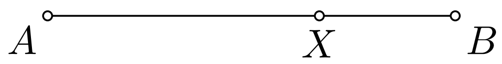
Sadržaj

1 Euklidska geometrija

1.1 Koordinate

Do sada smo imali prilike, u okviru različitih predmeta, da se upoznamo sa euklidskim prostorom, na razne načine. U predmetu G2 videli smo sintetički pristup, zasnovan na sistemu aksioma, kojim dobijamo euklidsku geometriju. U G1, sa druge strane, euklidski prostor je analiziran aritmetičkim metodama, često pomoću teorema linearne algebre. Tada smo uočili i da je euklidskom prostoru $E^n, n = 1, 2, 3$ pridružen, na prirodan način, i vektorski prostor iste dimenzije. Sada ćemo se podsetiti kako u euklidski prostor možemo uvesti koordinate, kako izgledaju jednačine pravih i ravni, a i kako nam koordinatni pristup jednostavno omogućava generalizaciju ovih prostora na proizvoljne dimenzije.

Otvorena duž AB u euklidskom prostoru je skup svih tačaka X koje su između tačaka A i B. Unija otvorene duži AB i $\{A, B\}$ je zatvorena duž AB. Specijalno, ako se tačke A i B poklapaju, odgovarajuća otvorena duž je prazan skup, a zatvorena sadrži tačno jednu tačku $A = B$.

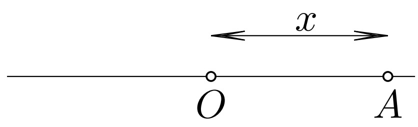


Sl. 1.1 Duž

Definicija 1.1 Preslikavanje $\ell : D \to R^+$, gde je D skup svih zatvorenih duži, a R^+ skup nenegativnih realnih brojeva, koje ima sledeće osobine:
1) ako su $d_1, d_2 \in D$ podudarne duži onda je $\ell(d_1) = \ell(d_2)$,
2) ako je $d_3 = d_1 + d_2$ onda je i $\ell(d_3) = \ell(d_1) + \ell(d_2)$,
3) postoji duž d takva da je $\ell(d) = 1$,
naziva se **merom duži**.

Može se pokazati da u euklidskom prostoru postoji mera duži. To je jedna od najbitnijih posledica aksioma neprekidnosti. Ako je ℓ mera duži i $\lambda > 0$ realan broj, onda postoji duž d takva da je $\ell(d) = \lambda$. Naglasimo da preslikavanje mere duži nije jedinstveno određeno. Naime, ako je d data otvorena duž, onda postoji mera ℓ takva da je $\ell(d) = 1$. Pri tom, može se pokazati da su svake dve mere ℓ_1 i ℓ_2 srazmerne, odnosno da postoji pozitivan realan koeficijent k takav da je $\ell_1 = k\ell_2$. Tada je k koeficijent kojim mi reskaliramo meru, odnosno određujemo koja je duž jedinična.

Koordinate na pravoj. Ako je p euklidska prava i ℓ mera duži definišimo preslikavanje $x : p \to R$ na sledeći način. Neka je $O \in p$ jedna proizvoljno odabrana tačka, sada fiksirana. Neka je $x(O) = 0$. Tada tačku O nazivamo **koordinatnim početkom**. Tačka O razlaže pravu p na dve poluprave p_1 i p_2. Ako je $A \in p_1$ neka je $x(A) = \ell(OA)$, a ako je $A \in p_2$ neka je $x(A) = -\ell(OA)$.

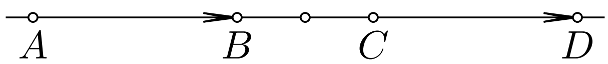


Sl. 1.2 Koordinate na pravoj

Ovako definisano preslikavanje x je bijekcija. Pri tom, x je usaglašeno sa uređenjem polja R, odnosno, važi da je $x(B)$ između $x(A)$ i $x(C)$ u smislu uređenja polja R, onda i samo onda kada je tačka B euklidske prave p između tačaka A i C. Zato se polje R često vizuelizuje euklidskom pravom i naziva **realna prava**. Odabirom odgovarajuće mere ℓ biramo i (međusobno podudarne) duži te prave koje su u datoj meri **jedinične**. Realan broj $x(A)$ nazivamo tada **koordinatom tačke** A, a funkciju x **koordinatnom funkcijom**. Euklidsku pravu označavamo i sa $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2 Funkcija rastojanja euklidske prave $\mathbb{R}$, $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R_0^+$ data je sa $\rho(A, B) = \ell(AB) = |x(A) - x(B)|$, gde $A, B \in \mathbb{R}$.

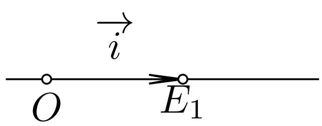
Neka su A, B, C i D proizvoljne tačke euklidske prave. Posmatrajmo uređene parove (A, B) i (C, D). Funkcija mera duži je usaglašena sa proporcijom duži pa lako možemo videti da je $x(B) - x(A) = x(D) - x(C)$ onda i samo onda kada se središta duži AD i BC poklapaju. Tada smatramo da su uređeni parovi (A, B) i (C, D) u relaciji $\sim$. Pri tom, ukoliko se dve tačke poklapaju, formalno smatramo i da se odgovarajuće središte poklapa sa njima. Očigledno je $\sim$ relacija ekvivalencije, a njene klase nazivamo vektorima i označavamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Sl. 1.3 Vektori prave

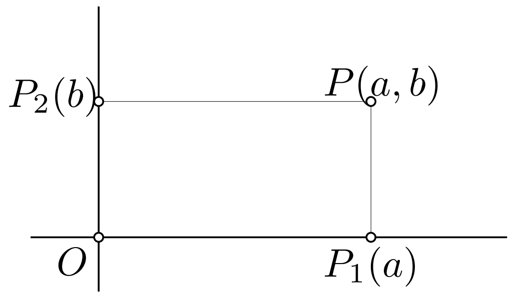
Skup R, zajedno sa operacijom sabiranja i množenja realnog broja realnim brojem (skalarom) jeste jednodimenzioni vektorski prostor. Preslikavanje iz R u skup vektora prave koje $x \in R$ slika u klasu uređenog para (O, A) gde je $x(A) = x$ je bijekcija koja čini skup vektora prave realnim vektorskim prostorom. Tada vektor $\overrightarrow{BC}$ identifikujemo sa realnim brojem x ako i samo ako je je $x(C) - x(B) = x$. Ovde je $x = x - 0 = x(A) - x(0)$ gde je $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

Ako je E_1 jedinična tačka te prave, označimo $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{i}$. Tada je $\overrightarrow{OA} = x(A)\overrightarrow{i}$.



Sl. 1.4 Vektor $\overrightarrow{i}$

Koordinate u ravni. Posmatrajmo sada euklidsku ravan. Možemo uočiti u njoj dve ortogonalne prave p i q koje se seku u tački O. Možemo te prave, kao malopre, interpretirati kao dve realne prave, pomoć u koordinatnih funkcija x_1 i x_2 i to tako da za tačku O važi $x_1(O) = x_2(O) = 0$. Tačka O je tada **koordinatni početak**. Štaviše, možemo tražiti i da su jedinične duži pravih p i q i međusobno podudarne, odnosno da su x_1 i x_2 indukovane istom merom ℓ. Neka je P proizvoljna tačka te ravni. Prave kroz P, paralelne redom, pravama q i p seku p i q u tačkama P_1 i P_2. Ako označimo koordinate tačaka P_1 i P_2 na odgovarajućim pravama sa $a = x_1(P_1), b = x_2(P_2)$, tački P pridružujemo uređen par $x(P) = (a, b)$, pišemo da je $x_1(P) = a$, $x_2(P) = b$ i nazivamo ga **koordinatama tačke** P u ravni. Ovo pridruživanje x je bijekcija između euklidske ravni i skupa R^2, uređenih realnih parova. Označavaćemo euklidsku ravan i sa $\mathbb{R}^2$.



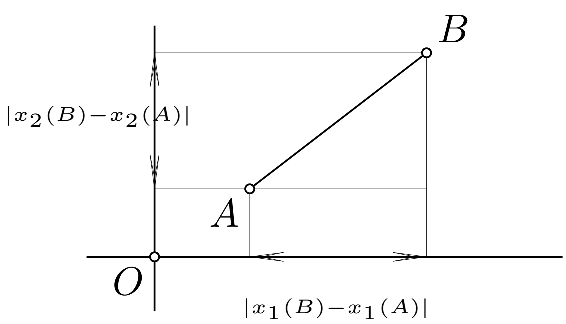
Sl. 1.5 Koordinate u ravni

Definicija 1.3 Funkcija rastojanja u ravni $\mathbb{R}^2$, $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to R_0^+$ data je sa

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1(A) - x_1(B))^2 + (x_2(A) - x_2(B))^2},$$

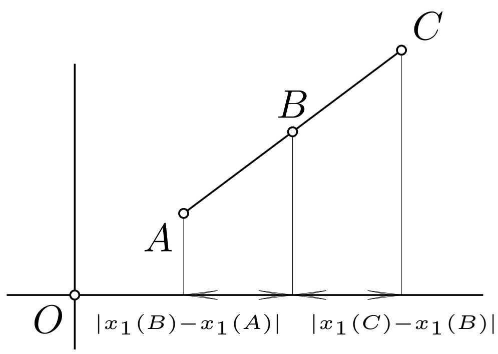
za $A, B \in \mathbb{R}^2$.

Na osnovu Pitagorine teoreme, slično kao i u slučaju euklidske prave, važi da je $\rho(A, B) = \ell(AB)$.



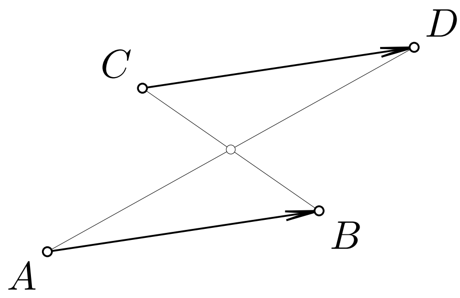
Sl. 1.6 Rastojanje u ravni

Neka su A, B dve razne tačke i C tačka euklidske prave određene tačkama A i B u euklidskoj ravni. Pretpostavimo, prvo, da se C ne poklapa ni sa A ni sa B. Tada, na osnovu Talesove teoreme znamo da se razlika koordinata $|x_i(A) - x_i(C)| : |x_i(A) - x_i(B)|, i = 1, 2$ odnosi kao razmera duži $AC : AB$. Zato je i uređen par $(x_1(A) - x_1(C), x_2(A) - x_2(C))$ srazmeran $(x_1(A) - x_1(B), x_2(A) - x_2(B))$. Isto važi kada se tačka C poklapa sa A ili B. Zato se središta duži AD i BC poklapaju ako i samo ako važi $x_i(B) - x_i(A) = x_i(D) - x_i(C), i = 1, 2$.



Sl. 1.7 Razmera duži

Dva uređena para tačaka (A, B) i (C, D) su u relaciji $\sim$ ako se središta duži AD i BC poklapaju. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije, a klase nazivamo vektorima i označavamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



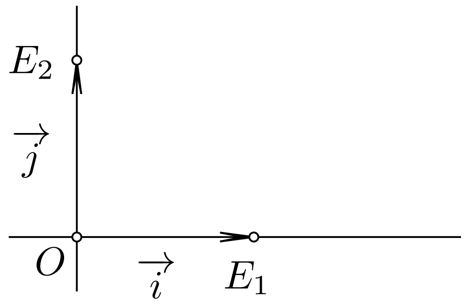
Sl. 1.8 Relacija $\sim$

Setimo se da skup R^2 sa operacijama sabiranja uređenih parova i množenja uređenog para realnim skalarom jeste vektorski prostor.

Preslikavanje iz R^2 u skup vektora jedne ravni koje par (x_1, x_2) slika u klasu uređenog para (O, A) gde je $(x_1(A), x_2(A)) = (x_1, x_2)$ je bijekcija kojom skup vektora ravni dobija strukturu realnog vektorskog prostora. Tada je vektor $\overrightarrow{BC}$ slika para (x_1, x_2) ako je $x_i(C) - x_i(B) = x_i, i = 1, 2$. Vektore $\overrightarrow{BC}$ i (x_1, x_2) identifikujemo. Uočimo da tada važi i da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ za proizvoljne tačke A, B, C euklidske ravni, jer je

$$(x_i(B) - x_i(A)) + (x_i(C) - x_i(B)) = x_i(C) - x_i(A), i = 1, 2.$$

Neka su E_1 i E_2 jedinične tačke pravih p i q. Tada su prave p i q određene tačkom O i vektorima $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{E_1}$ i $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{E_2}$. Ako je P proizvoljna tačka ravni tada je $\overrightarrow{OP} = x_1(P)\overrightarrow{i} + x_2(P)\overrightarrow{j}$.



Sl. 1.9 Vektori $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$

Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ onda je $\ell(AB) = \ell(CD)$, a samim tim i $\rho(A,B) = \rho(C,D)$. Posmatrajmo skalarni proizvod

$$(v_1, v_2) \circ (u_1, u_2) = v_1u_1 + v_2u_2,$$

gde su vektori identifikovani sa parovima odgovarajućih koordinata. Uočimo da važi $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \rho^2(A,B)$, za proizvoljne tačke A, B. Zato, dati skalarni proizvod u vektorskom prostoru R^2 odgovara meri duži u odgovarajućojn euklidskoj ravni. Samim tim, za dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ važi i

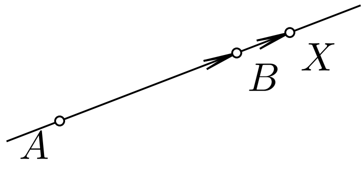
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \rho(A,B) \cdot \rho(A,C) \cos\angle BAC.$$

Uočimo da tada $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ čine jednu ortonormiranu bazu prostora R^2.

Prava u ravni. Uočili smo da za kolinearne tačke A, B, C, gde je $A \neq B$, jedne euklidske prave postoji $\lambda \in R$, tako da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, odnosno da važi

$$x_i(C) = x_i(A) + \lambda(x_i(B) - x_i(A)), i = 1, 2.$$

Možemo reći i da je prava AB određena tačkom A i vektorom $\overrightarrow{AB}$. Setimo se da su A i B proizvoljne tačke te prave, a da uslov $A \neq B$ obezbeđuje da je vektor $\overrightarrow{AB} = (v_1, v_2)$ različit od nule.



Sl. 1.10 $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$

Zato su koordinate (x_1, x_2) proizvoljne tačke prave koja sadrži tačku A i određena je vektorom (v_1, v_2) date sledećim jednačinama koje nazivamo **parametarskim jednačinama prave**

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(A) + \lambda v_1, \\ x_2 &= x_2(A) + \lambda v_2, \quad \lambda \in R. \end{aligned}$$

Eliminacijom parametra λ iz njih dobijamo jednačinu $(x_1 - x_1(A))v_2 = (x_2 - x_2(A))v_1$, odnosno $v_2x_1 - v_1x_2 + x_2(A)v_1 - x_1(A)v_2 = 0$ ili ako označimo $a = v_2$, $b = -v_1$, $c = x_2(A)v_1 - x_1(A)v_2$ dobijamo **opštu jednačinu prave u ravni**

$$ax_1 + bx_2 + c = 0.$$

Pri tom, par $(a, b) = (v_2, -v_1)$ mora biti različit od nule.

Neka su prave

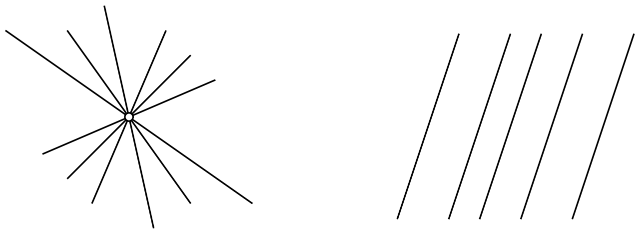
$$l_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 = 0,$$
$$l_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 = 0.$$

određene vektorima $(v_1, v_2) = (-b_1, a_1)$ $(u_1, u_2) = (-b_2, a_2)$.

Prave l_1 i l_2 su paralelne ako i samo ako su vektori (v_1, v_2) i (u_1, u_2) srazmerni, odnosno ako su srazmerni parovi (a_1, b_1) i (a_2, b_2). Pri tom, ako su srazmerne trojke (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2), odgovarajuće jednačine opisuju isti skup tačaka odnosno, prave se poklapaju. Ako ove trojke nisu srazmerne, prave l_1 i l_2 se ne seku.

Prave l_1 i l_2 su ortogonalne ako i samo ako su vektori (v_1, v_2) i (u_1, u_2) ortogonalni, odnosno ako je $v_1u_1 + v_2u_2 = 0$, to jest ako je $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

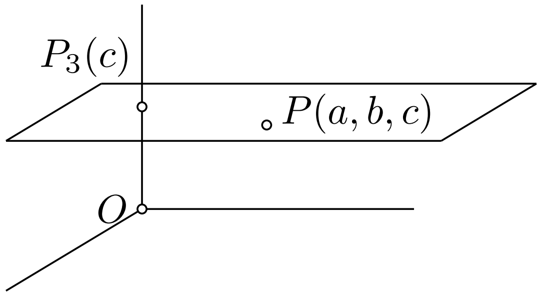
Sve prave euklidske ravni koje sadrže datu tačku čine **pramen konkurentnih pravih.** Sve prave euklidske ravni koje su paralelne datoj pravoj čine **pramen paralelnih pravih**.



Sl. 1.11 Konkurentne i paralelne prave

Primedba 1.1 Dve razne prave euklidske ravni određuju tačno jedan pramen. Ako su njihove jednačine date sa $l_1 : a_1x_1+b_1x_2+c_1 = 0$ i $l_2 : a_2x_1+b_2x_2+c_2 = 0$ tada je jednačina proizvoljne prave tog pramena data sa $\lambda(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1) + \mu(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2) = 0$ gde $\lambda, \mu \in R$ i $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. $\diamond$

Koordinate u prostoru. Neka su p, q, r tri međusobno ortogonalne prave euklidskog prostora koje se seku u tački O. Neka su x_1, x_2, x_3, redom, koordinatne funkcije tih pravih, indukovane istom merom ℓ, takve da je $x_1(O) = x_2(O) = x_3(O) = 0$. Tad je O **koordinatni početak.** Neka je dalje, P proizvoljna tačka i π_1, π_2, π_3 ravni koje sadrže tačku P i paralelne su redom parovima pravih q, r; p, r; p, q. Ako su P_1, P_2, P_3 presečne tačke π_1 i p; π_2 i q; π_3 i r, tački P pridružujemo uređenu trojku $x(P) = (a, b, c)$ gde je $a = x_1(P_1)$, $b = x_2(P_2)$, $c = x_3(P_3)$. Tada su (a, b, c) koordinate tačke P i označavamo $a = x_1(P)$, $b = x_2(P)$, $c = x_3(P)$. Preslikavanje x je bijekcija između euklidskog prostora i skupa uređenih realnih trojki R^3. Zato euklidski prostor označavamo sa $\mathbb{R}^3$.



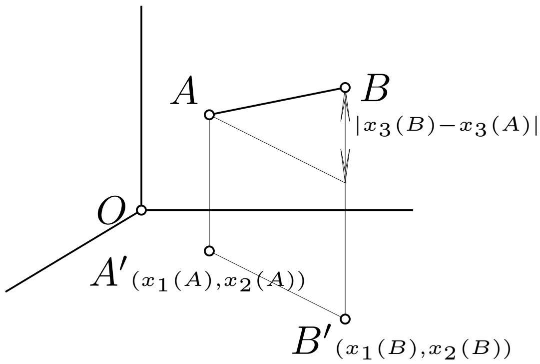
Sl. 1.12 Koordinate u prostoru

Definicija 1.4 Funkcija rastojanja u prostoru $\mathbb{R}^3$, $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to R_0^+$ data je sa

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_1(A) - x_1(B))^2 + (x_2(A) - x_2(B))^2 + (x_3(A) - x_3(B))^2},$$

za $A, B \in \mathbb{R}^3$.

Uočimo, ako je A' ortogonalna projekcija tačke A na ravan pq tada je $x_1(A) = x_1(A')$, $x_2(A) = x_2(A')$. Zato, ponovo korišćenjem Pitagorine teoreme, možemo pokazati da je $\rho(A,B) = \ell(AB)$.

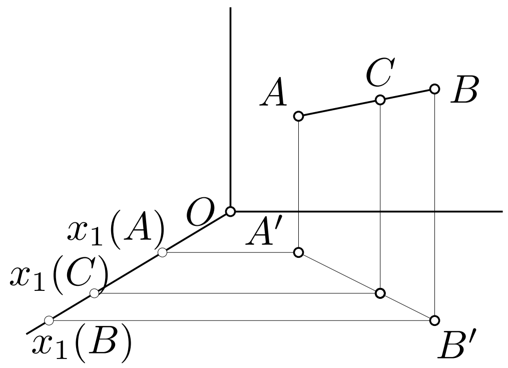


Sl. 1.13 Rastojanje u prostoru

Neka je data jedna euklidska prava a u prostoru i neka su A, B dve njene razne tačke. Neka je C proizvoljna tačka prave a. Pretpostavimo, prvo, da se C ne poklapa ni sa A ni sa B. Pretpostavimo i da prava AB nije paralalena nekoj od pravih p, q, r, odnosno da tačke A, B, C nemaju istu neku od kordinata xi. Tada, slično kao i u dvodimenzionom slučaju, na osnovu Talesove teoreme znamo da se razlika koordinata $|x_i(C) - x_i(A)| : |x_i(B) - x_i(A)|, i = 1,2,3$ odnosi kao razmera $AC : AB$ odgovarajućih duži. Zato je i uredjena trojka $(x_1(C) - x_1(A), x_2(C) - x_2(A), x_3(C) - x_3(A))$ srazmerna trojci $(x_1(B) - x_1(A), x_2(B) - x_2(A), x_3(B) - x_3(A))$. Ponovo, isti rezultat dobijamo i kada se tačka C poklapa sa A ili B, a ukoliko je prava AB paralelna nekoj od koordinatnih osa tada ovo tvrđenje trivijalno važi.

Sada, na osnovu ovog zaključka vidimo da se središta duži AD i BC poklapaju ako i samo ako važi je

$$x_i(B) - x_i(A) = x_i(D) - x_i(C), i = 1,2,3.$$



Sl. 1.14 Proporcija koordinata

Smatramo da su dva uređena para tačaka (A, B) i (C, D) u relaciji $\sim$ ako se središta duži AD i BC poklapaju. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije, a klase nazivamo vektorima i označavamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Skup R^3 sa operacijama sabiranja uređenih trojki i množenja uređene trojke realnim brojem je vektorski prostor.

Preslikavanje iz R^3 u skup vektora jedne ravni koje slika trojku $(x_1, x_2,\ x_3)$ u klasu uređenog para (O, A) gde je $(x_1(A), x_2(A), x_3(A)) = (x_1, x_2,\ x_3)$ je bijekcija kojom skup vektora ravni dobija strukturu realnog vektorskog prostora. Tada je vektor $\overrightarrow{BC}$ slika trojke (x_1, x_2, x_3) ako je $x_i(C) - x_i(B) = x_i, i = 1, 2, 3$. Vektore $\overrightarrow{BC}$ i (x_1, x_2, x_3) identifikujemo. Ponovo i ovde važda je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ za proizvoljne tačke A, B, C euklidskog prostora.

Neka su E_1, E_2, E_3 jedinične tačke pravih p, q i r. Tada su prave p, q i r određene tačkom O i vektorima $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{E_2}$ i $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{E_3}$. Ako je P proizvoljna tačka prostora tada je $\overrightarrow{OP} = x_1(P)\overrightarrow{i} + x_2(P)\overrightarrow{j} + x_3(P)\overrightarrow{k}$.

Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ onda je $\ell(AB) = \ell(CD)$, pa je $\rho(A, B) = \rho(C, D)$. Slično kao i u slučaju euklidske ravni, skalarni proizvod u euklidskom prostoru takav da je $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \rho^2(A, B)$, za proizvoljne tačke A, B, dat je sa

$$(v_1, v_2, v_3) \circ (u_1, u_2, u_2) = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3,$$

gde smo dva vektora identifikovali sa odgovarajućim uređenim parovima (v_1, v_2, v_3) i (u_1, u_2, u_3).

Vektori $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ čine jednu ortonormiranu bazu prostora R^3.

Prava i ravan u prostoru Ako su A i B dve razne tačke, tada proizvoljna tačka C pripada pravoj AB euklidskog prostora ako postoji $\lambda \in R$, tako da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, odnosno da važi $x_i(C) = x_i(A) + \lambda(x_i(B) - x_i(A)), i = 1, 2, 3$. Prava AB određena svojom proizvoljnom tačkom A i vektorom $\overrightarrow{AB} = (v_1, v_2, v_3)$ različitim od nule. Koordinate (x_1, x_2, x_3) proizvoljne tačke prave koja sadrži tačku A i određena je vektorom (v_1, v_2, v_3) date sledećim **parametarskim jednačinama prave**

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(A) + \lambda v_1, \\ x_2 &= x_2(A) + \lambda v_2, \\ x_3 &= x_2(A) + \lambda v_3, \quad \lambda \in R. \end{aligned}$$

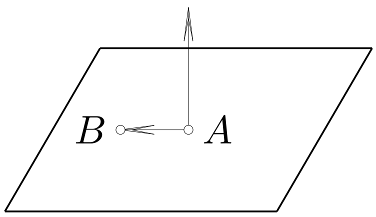
Eliminacijom parametra λ dobijamo **kanonsku jednačinu prave**

$$\frac{x_1 - x_1(A)}{v_1} = \frac{x_2 - x_2(A)}{v_2} = \frac{x_3 - x_3(A)}{v_3}.$$

Ako je neka od koordinata v_i vektora (v_1, v_2, v_3) jednaka nuli, možemo formalno dopustiti ovakav zapis, podrazumevajući tada da je i odgovarajuća razlika $x_i - x_i(A) = 0$.

Prave l_1 i l_2 su paralelne ako i samo ako su njihovi vektori (v_1, v_2, v_3) i (u_1, u_2, u_3) srazmerni, a ortogonalne ako su (v_1, v_2, v_3) i (u_1, u_2, u_3) ortogonalni, odnosno ako važi $v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = 0$.

Neka je A tačka euklidskog prostora, a (a, b, c) vektor različit od nule. Proizvoljna tačka B sa koordinatama (x_1, x_2, x_3) pripada ravni koja sadrži A i ortogonalna je na (a, b, c) ako i samo ako su vektori (a, b, c) i $\overrightarrow{AB}$ međusobno ortogonalni, odnosno ako važi da je $a(x_1 - x_1(A)) + b(x_2 - x_2(A)) + c(x_3 - x_3(A)) = 0$. Ako označimo $d = -(ax_1(A) + bx_2(A) + cx_3(A))$, dobijamo **opštu jednačinu ravni**



Sl. 1.15 Ravan ortogonalna na vektor

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Neka su

$$\alpha_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0$$

dve ravni euklidskog prostora. One su paralelne ako i samo ako su ortogonalne na srazmerne vektore, odnosno ako su trojke (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) srazmerne. Ako su, pri tom, srazmerne i uređene četvorke (a_1, b_1, c_1, d_1) i (a_2, b_2, c_2, d_2), date jednačine opisuju isti skup tačaka, te se ravni poklapaju. Ako ove četvorke nisu srazmerne α_1 i α_2 nemaju zajedničkih tačaka.

Ravni α_1 i α_2 su ortogonalne ako su ortogonalni njihovi normalni vektori, odnosno ako je $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. Sve ravni paralelne zadatoj čine **pramen paralelnih ravni**, a sve ravni koje sadrže datu pravu čine **koaksijalni pramen ravni.**

Primedba 1.2 Dve razne ravni euklidskog prostora određuju tačno jedan pramen prostora. Ako su njihove jednačine date sa $\alpha_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0$ i $\alpha_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0$ tada je jednačina proizvoljne ravni tog pramena data sa $\lambda(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1) + \mu(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2) = 0$ gde $\lambda, \mu \in R$ i $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. $\diamond$

Uopštenje trodimenzionog euklidskog prostora. Neka je $R^n = \{(x_1, \ldots, x_n)| x_i \in R\}$ skup realnih n-torki. Njega možemo interpretirati na više načina. Prvo, možemo ga smatrati skupom pomoću koga gradimo geometriju i tada njegove elemente zovemo **tačkama**. Sa druge strane, R^n zajedno sa operacijom sabiranja n-torki i množenja n-torki realnim skalarom jeste n-dimenzioni realni vektorski prostor. U tom prostoru postoji skalarni proizvod dat sa $(v_1, \ldots, v_n) \circ (u_1, \ldots, u_n) = v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots v_nu_n$ koji ga čini unitarnim prostorom. Pri tom, vektori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ čine jednu ortonormiranu bazu prostora R^n.

Dvema raznim tačkama A i B sa koordinatama $(x_1(A), \ldots, x_n(A))$ i $(x_1(B), \ldots, \ldots, x_n(B))$ možemo pridružiti vektor

$$\overrightarrow{AB} = (x_1(B) - x_1(A), \ldots, x_n(B) - x_n(A)).$$

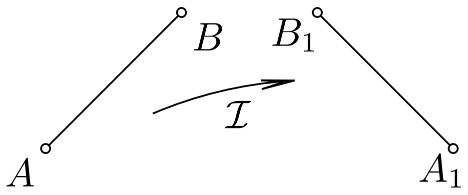
Pri tom, ovo pridruživanje ima sledeće osobine:
a) Za svaku tačku A i vektor $(v_1, \ldots, v_n)$ postoji tačka B takva da je $\overrightarrow{AB} = (v_1, \ldots, v_n)$,
b) Za proizvoljne tačke A, B, C važi da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Skup tačaka R^n, zajedno sa unitarnim prostorom R^n i preslikavanjem $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ nazivamo n-**dimenzionim euklidskim prostorom** i označavamo sa $\mathbb{R}^n$.

1.2 Izometrije

U ovom poglavlju ćemo se baviti izometrijama, transformacijama euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ *za koje je ta euklidska struktura invarijantna. Definicije i tvrđenja su data uglavnom za proizvoljno* n*, mada ćemo najviše pažnje posvetiti slučajevima* $n = 1, 2, 3$.

Definicija 1.5 Bijektivno preslikavanje $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ naziva se *izometrijom* prostora $\mathbb{R}^n$ ukoliko za proizvoljne dve tačke $A, B \in \mathbb{R}^n$ važi $\rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)) = \rho(A, B)$. Skup svih izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ označavamo sa $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.



Sl. 1.16 Slike dve tačke u izometriji

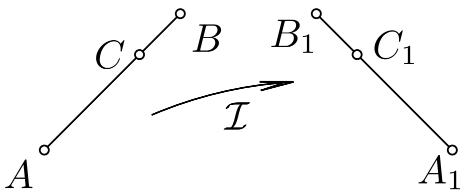
Primer 1.3 Preslikavanje $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dato sa $\varepsilon(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ je izometrija tog prostora. Nazivamo je **koincidencija** ili **identitet**. $\diamond$

Teorema 1 *Skup* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ *sa operacijom kompozicije preslikavanja čini grupu.*

Dokaz. Za svaku od aksioma grupe se jednostavno pokazuje da važi korišćenjem definicije izometrija. $\square$

Teorema 2 *Proizvoljnom izometrijom* $\mathcal{I}$ *se kolinearne tačke slikaju u kolinearne tačke. Pri tom, ako je tačka* B *između tačaka* A *i* C*, onda je i* $\mathcal{I}(B)$ *između tačaka* $\mathcal{I}(A)$ *i* $\mathcal{I}(C)$.

Dokaz. Neka su tačke A, B, C kolinearne i neka je tačka B između tačaka A i C. Tada je $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$. Zato važi i $\rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)) + \rho(\mathcal{I}(B), \mathcal{I}(C)) = \rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(C))$. Kako funkcija rastojanja zadovoljava nejednakost trougla, ovo je moguće samo ukoliko su $\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B), \mathcal{I}(C)$ kolinearne i ako je pri tom $\mathcal{I}(B)$ između tačaka $\mathcal{I}(A)$ i $\mathcal{I}(C)$. $\square$



Sl. 1.17 Kolinearne tačke se slikaju u kolinearne

Dakle, izometrije "čuvaju" kolinearnost, pa se prave slikaju u prave. Dve prave koje se seku u tački X izometrijom $\mathcal{I}$ slikaju se u prave koje se seku u tački $\mathcal{I}(X)$. Obratno, ako se dve prave p_1 i q_1 seku u tački X_1 onda se njihovi originali $\mathcal{I}^{-1}(p_1)$ i $\mathcal{I}^{-1}(q_1)$ seku u tački $\mathcal{I}^{-1}(X_1)$.

Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π, proizvoljna tačka te ravni pripada nekoj od pravih koje sadrže jedno teme trougla ABC i seku naspramnu stranu tog trougla (Drugi Peanov stav). Recimo, neka tačka X, pripada pravoj AD gde je D tačka duži BC. Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 i X_1 slike ovih tačaka u izometriji $\mathcal{I}$. S obzirom da su A, B, C nekolinearne tačke sledi da su nekolinerane i A_1, B_1 i C_1. Neka je π_1 ravan koja sadrži A_1, B_1, C_1. Tada tačka D_1, kao slika tačke duži BC, pripada duži B_1C_1, pa pripada i ravni π_1. Dalje, kako tačka X pripada pravoj AD, tačka X_1 pripada pravoj A_1D_1, pa pripada ravni π_1.

Dalje, dve paralelne prave, tj. komplanarne i disjunktne prave, slikaju se u komplanarne i disjunktne prave, tj. u paralelne prave. Trougao se slika u trougao čije su ivice jednake ivicama polaznog trougla, pa su tada i odgovarajući uglovi dva trougla jednaki.

Zato sledi da važe sledeće posldice Teoreme 2.

Posledica 1 *Izometrijom euklidskog prostora se duži slikaju u duži, poluprave u poluprave, prave slikaju u prave, a ravni se slikaju u ravni.*

Posledica 2 *Izometrijom se paralelne prave i ravni slikaju u paralelne prave i ravni. Izometrijom se uglovi slikaju u njima jednake uglove. Specijalno, ortogonalne prave se slikaju u ortogonalne prave.*

Linearni deo preslikavanja. Neka je $\mathcal{I}$ jedna izometrija. Neka su A, B, C, D tačke takve da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Tada se središta duži AD i BC poklapaju, neka je to tačka X. Izometrijom $\mathcal{I}$ tačka X se slika u središte duži $\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(D)$ i u središte $\mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C)$. Zato važi da je $\overrightarrow{\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)} = \overrightarrow{\mathcal{I}(C)\mathcal{I}(D)}$. Dakle, izometrija $\mathcal{I}$ indukuje i preslikavanje vektorskog prostora R^n u sebe, označimo to preslikavanje sa $\overline{\mathcal{I}}$. S obzirom da se paralelne prave, slikaju u paralelne prave, kolinerani vektori koji ih određuju, slikaju se u kolinearne vektore. Pri tom, ako je tačka B između A i C, onda je

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = AB : BC = \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B) : \mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C) = \overrightarrow{\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)} : \overrightarrow{\mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C)},$$

odnosno $\overline{\mathcal{I}}$ je homogeno preslikavanje. Proizvoljni vektor $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ za neke tačke P, Q i R se slika u $\overrightarrow{\mathcal{I}(P)\mathcal{I}(R)} = \overrightarrow{\mathcal{I}(P)\mathcal{I}(Q)} + \overrightarrow{\mathcal{I}(Q)\mathcal{I}(R)}$ te je preslikavanje $\overline{\mathcal{I}}$ i aditivno, odnosno $\overline{\mathcal{I}}$ je linearna transformacija vektorskog prostora R^n. Nazivamo je **linearnim delom preslikavanja** $\mathcal{I}$.

Neka je za proizvoljnu tačku X $\mathcal{I}(X) = X'$ i posebno $\mathcal{I}(O) = O'$. Označimo sa $[X]$ kolonu koordinata tačke X. Preslikavanje $\overline{\mathcal{I}}$ slika linearno vektor $\overrightarrow{OX}$ sa koordinatama $[X] - [O] = [X]$ u $\overrightarrow{O'X'}$ sa koordinatama $[X'] - [O']$. Zato postoji kvadratna matrica A takva da važi $[X'] - [O'] = A([X] - [O])$ odnosno da je

$$X' = AX + O', \tag{1}$$

gde smo sa X', X, O' označili i kolonu koordinata odgovarajućih tačaka. Kako je $\overline{\mathcal{I}}$ bijektivno, matrica A je nedegenerisana.

Primer 1.4 Koincidencija je data jednačinom $[X'] = [X]$, pa je odgovarajuća matrica linearnog preslikavanja jedinična E. ◇

Tvrđenje 1 *Preslikavanje dato formulom (1) je izometrija ako i samo ako je A ortogonalna matrica, odnosno ako važi $AA^t = A^tA = E$,*

Dokaz. Neka je sa (1) data jedna izometrija. Označimo l-tu kolonu matrice A sa A_l. Ove kolone su slike vektora ortonormirane baze $e_1, \ldots, e_n$. Zato je $A_i \circ A_j = 0$ za $i \neq j$ i $A_i \circ A_i = 1$. Samim tim $AA^t = E$.

Obratno, ako je (1) preslikavanje takvo da je $AA^t = E$, onda kolone matrice A predstavljaju vektore neke ortonormirane baze u koju se slika baza $e_1, \ldots, e_n$, te $\overline{\mathcal{I}}$ slika vektore u vektore njima podudarnih normi. Kako je norma vektora $\overrightarrow{AB}$ jednaka $\rho(A, B)$ preslikavanje $\mathcal{I}$ čuva rastojanja, odnosno izometrija je. □

Posledica 3 *Neka je formulom (1) data izometrija. Tada je* $\det A \in \{-1, 1\}$.

Ako su izometrije $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ date redom formulama $X' = A_1X + B_1$ i $X' = A_2X + B_2$ tada je njihova kompozicija $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ je data formulom $X' = A_2A_1X + (A_2B_1 + B_2)$.

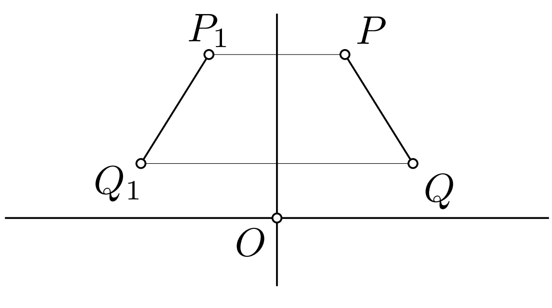
Definicija 1.6 Izometrija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ data formulom $X' = AX + B$ je **direktna transformacija** ako je $\det A = 1$, a **indirektna** ako je $\det A = -1$.

Tvrđenje 2 *Kompozicija dve direktne ili dve indirektne izometrije prostora* $\mathbb{R}^n$ *je direktna izometrija. Kompozicija jedne direktne i jedne indirektne izometrije je indirektna izometrija.*

Dokaz. Neka su A_1 i A_2 matrice izometrija $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$. Tada je $A_2 \cdot A_1$ matrica izometrije $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$. S obzirom da je $\det A_2A_1 = \det A_2 \cdot \det A_1$ tvrđenje sledi. □

Lema 1 *Skup svih direktnih izometrija prostora* $\mathbb{R}^n$ *je podgrupa grupe* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Primer 1.5 Refleksija u odnosu na osu q**.** Posmatrajmo u euklidskoj ravni x_2-osu, datu jednačinom $x_1 = 0$. Preslikavanje koje svaku tačku ravni $P(x_1, x_2)$ slika u $P_1(-x_1, x_2)$ čuva rastojanje među tačkama, pa jeste izometrija ravni koju nazivamo refleksijom u odnosu na pravu $x_1 = 0$. Za proizvoljnu tačku P, središte duži PP_1 pripada pravoj $x_1 = 0$, i ako je $P \neq P_1$ prave PP_1 i $x_1 = 0$ su ortogonalne.



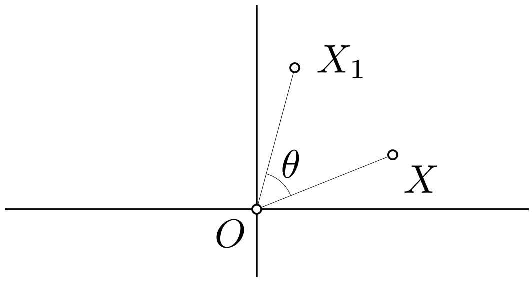
Sl. 1.18 Refleksija u odnosu na q

Matrica preslikavanja je data sa

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i važi $\det A = -1$ pa je u pitanju indirektna izometrija. ◇

Primer 1.6 Rotacija oko tačke O**.** Izometrija $\mathcal{I}$ euklidske ravni takva da je $\mathcal{I}(O) = O$, dok je za proizvoljnu drugu tačku X te ravni orijentisani ugao izmedju $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OX_1}$ podudaran datom uglu θ je rotacija ravni oko tačke O.



Sl. 1.19 Rotacija sa centrom u O

Vektori $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$ se tada preslikavanjem $\overline{\mathcal{I}}$ redom slikaju u $\overrightarrow{i}' = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{j}' = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$, pa je matrica A preslikavanja data sa

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

a izometrija $\mathcal{I}$ je data formulom $X' = AX$. Očigledno je $\mathcal{I}$ direktna transformacija. $\diamond$

Primer 1.7 Izometrija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ data formulom $X = X + B$ je direktna izometrija koju nazivamo **translacijom**. $\diamond$

Teorema 3 *Neka je A ortogonalna matrica dimenzije n, $n \in \mathbb{N}$, odnosno matrica jedne izometrije. Tada je postoji ortonormirana baza prostora R^n u kojoj data izometrija ima matricu*

$$\begin{bmatrix} E_i & & & & \\ & -E_j & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_l \end{bmatrix} \tag{2}$$

gde su E_i i E_j jedinične matrice reda i, odnosno j, redom, a
$R_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$ *gde je $i + j + 2l = n$. Pri tom je* $\det A = (-1)^j$.

Dokaz. Blokovi matrice E_i i $-E_j$, očigledno odgovaraju vektorima koji su sopstveni za matricu A. Zato ćemo potražiti sopstvene vrednosti te matrice. Sopstvene vrednosti matrice A mogu biti realne ili konjugovano kompleksne.

Neka je λ jedna realna sopstvena vrednost matrice A i v odgovarajući sopstveni vektor. Funkcija rastojanja je na prirodan način usklađena sa normom vektora. Zato preslikavanje $\overline{\mathcal{I}}$ slika vektor v u vektor iste norme, odnosno

$$\|v\| = \|\overline{\mathcal{I}}v\| = \|\lambda v\|,$$

pa je $|\lambda| = 1$.

Neka su z_1, z_2 sopstveni vektori (realni ili kompleksni) za sopstvene vrednosti λ_1, λ_2. Njihov skalarni proizvod (ili odgovarajuće proširenje na kompleksne vektore) $z_2 \circ z_1$ dobijamo kada pomnožimo (vrstu) z_2^t sa (kolonom) z_1. Tada važi

$$\begin{aligned} &z_2^t z_1 = z_2^t A^t A z_1 = (Az_2)^t (Az_1) = \lambda_2\lambda_1 z_2^t z_1, \\ &z_2^t z_1 (1 - \lambda_2\lambda_1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ako su $\lambda_{1,2} = a \pm \imath b$ konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti i $z_{1,2} = v_1 \pm \imath v_2$ njima odgovarajući konjugovano kompleksni sopstveni vektori tada je $z_2 \circ z_1 = |v_1|^2 + |v_2|^2 \neq 0$, pa iz (3) sledi da je $|\lambda_1|^2 = \lambda_1\lambda_2 = 1$. Označimo zato $\lambda_1 = e^{\imath\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$.

Sada vidimo da $1 - \lambda_2\lambda_1 = 0$, ukoliko su λ_1 i λ_2 jednaki realni brojevi ili konjugovano kompleksni brojevi. U svim ostalim slučajevima iz (3) sledi da je $z_1 \circ z_2 = 0$, odnosno, da su odgovarajući sopstveni vektori međusobno ortogonalni. Specijalno, posmatrajmo sopstvene vrednosti $\lambda_1 = e^{i\theta_1}$ i $\lambda_2 = e^{i\theta_2}$ koje nisu konjugovano kompleksne i neka su odgovarajući sopstveni vektori $z_1 = v_1(\theta_1) + \imath v_2(\theta_1)$ i $z_2 = v_1(\theta_2) + \imath v_2(\theta_2)$. Tada iz $z_1 \circ z_2 = 0 = z_1 \circ \overline{z_2}$ sledi da je

$$\begin{aligned}&(v_1(\theta_1) + \imath v_2(\theta_1)) \circ (v_1(\theta_2) \pm \imath v_2(\theta_2)) = 0,\\ &(v_1(\theta_1) \circ v_1(\theta_2) \mp v_2(\theta_1) \circ v_2(\theta_2)) + \imath(\pm v_1(\theta_1) \circ v_2(\theta_2) + v_2(\theta_1) \circ v_1(\theta_2)) = 0.\end{aligned}$$

Zato sledi da su vektori $v_1(\theta_1), v_2(\theta_1), v_1(\theta_2), v_2(\theta_2)$ međusobno ortogonalni.

Posmatrajmo sada kompleksni sopstveni vektor $z = v_1 + \imath v_2$ i njegovu sopstvenu vrednost $\lambda = \cos\theta + \imath \sin\theta, \sin\theta \neq 0$.

Tada, iz $Az = \lambda z$ sledi da je

$$\begin{aligned}Av_1 &= \cos\theta v_1 - \sin\theta v_2,\\ Av_2 &= \sin\theta v_1 + \cos\theta v_2.\end{aligned}$$

Štaviše, direktno iz $\|Av_1\|^2 = \|v_1\|^2$ i $(Av_1) \circ (Av_2) = v_1 \circ v_2$ sledi i da je

$$\begin{aligned}\sin\theta(\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2) &= -2\cos\theta v_1 \circ v_2,\\ \cos\theta(\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2) &= 2\sin\theta v_1 \circ v_2,\end{aligned}$$

pa je $(\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2) = 0$, odnosno $\|v_1\| = \|v_2\|$ i dalje $v_1 \perp v_2$.

Odredimo sada ortonormiranu bazu u kojoj izometrija ima matricu (2). Neka su $e_1, \ldots, e_i$ jedinični međusobno ortogonalni sopstveni vektori matrice A za $\lambda = 1$, $f_1, \ldots, f_j$ jedinični, međusobno ortogonalni sopstveni vektori za $\lambda = -1$ i $v_1(\theta_1), v_2(\theta_2), \ldots\ v_1(\theta_l)$, $v_2(\theta_l)$ jedinični vektori koji predstavljaju realne i imaginarne delove sopstvenih vektora za konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti. Tada ovi vektori čine jednu ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^n$. Ako je Q matrica čije su kolone redom koordinate ovih vektora, tada je matrica $Q^{-1}AQ$ data sa (2). □

Primedba 1.8 Dakle matrica A je slična matrici (2), a pri tom, s obzirom da su obe matrice date u ortonormiranim bazama, matrica prelaska Q takođe odgovara izometriji, tj. ortogonalna je. Zato važi da je $Q^{-1} = Q^t$. ◇

Primedba 1.9 U slučaju da je $n = 1$, matrica preslikavanja ima samo jednu koordinatu. Pri tom je ta koordinata 1 ili -1.

U sličaju da je $n = 2$, matrica preslikavanja A je data sa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gde je $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$. Zato postoje realni brojevi α i β takvi da je $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$ i da pri tom važi $\sin(\alpha + \beta) = 0$. Tada je $\sin\beta = -(-1)^k \sin\alpha$, $\cos\beta = (-1)^k \cos\alpha$, za $k \in \mathbb{N}$. Za parno k matrica A preslikavanja je jednaka

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

a za neparno k ima oblik

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Pri tom, matrica R_α ima konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti za $\sin\alpha \neq 0$, a dvostruku realnu $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos\alpha \in \{-1, 1\}$, za $\sin\alpha = 0$. Matrica S_α za sopstvene vrednosti ima $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$.

Važi

$$R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}, \qquad S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\beta-\alpha},$$
$$S_\alpha \cdot R_\beta = S_{\alpha+\beta}, \qquad R_\alpha \cdot S_\beta = S_{\beta-\alpha}.$$

$\diamond$

Definicija 1.7 Tačka P, prava p ili ravan π su invarijantne u transformaciji $\mathcal{I}$ ako se tom transformacijom slikaju u sebe, odnosno ako važi $\mathcal{I}(P) = P$, odnosno $\mathcal{I}(p) = p$, tj. $\mathcal{I}(\pi) = \pi$.

Lema 2 *Neka je transformacija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ (ne nužno izometrija), data formulom $X' = AX + B$. Ova transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku ako i samo ako $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost matrice A.*

Dokaz. Neka je transformacija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ data formulom $X' = AX + B$. Tačka P je invarijantna tačka ove transformacije ako i samo ako je $P' = P$ odnosno ako je n-torka $[P]^t$ rešenje matrične jednačine

$$(A - E)X = -B. \tag{4}$$

Jednačina (4) ima jedinstveno rešenje, ako i samo ako je matrica $(A - E)$ invertibilna, odnosno ako $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost matrice A. $\square$

Primedba 1.10 Jednačina (4) je ekvivalentna jednom linearnom sistemu jednačina. Zato, ako matrica $(A - E)$ nije invertibilna onda jednačina (4) ili nema rešenja ili ih ima beskonačno mnogo. $\diamond$

Da bismo analizirali i klasifikovali izometrijske transformacije euklidskih prostora $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ zanimaće nas njihove invarijantne tačke, ali i sopstveni vektori.

Neka transformacija $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A i neka ima netrivijalni sopstveni potprostor V_1 za sopstvenu vrednost $\lambda = 1$. Ako je B neka druga invarijantna tačka, tada se vektor $\overrightarrow{AB}$ slika u vektor $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, tj. $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, pa je $\overrightarrow{AB}$ sopstveni za $\lambda = 1$ i pripada prostoru V_1.

Obrnuto, neka je $\overrightarrow{v} \in V_1$ i B takva da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Označimo $\mathcal{I}(B) = B_1$. Tada je $\overrightarrow{\mathcal{I}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB_1}$, pa je $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{v}$, tj. $B = B_1$, odnosno i tačka B je invarijantna. Pokazali smo da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 4 *Neka je $\mathcal{I} : X' = AX + B$ jedna transformacija (ne nužno izometrijska) prostora R^n. Tada se skup svih invarijantnih tačaka transformacije $\mathcal{I}$ se može zapisati u obliku $\{A + \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \in V_1\}$, gde je A jedna, fiksirana invarijantna tačka, a V_1 sopstveni potprostor za $\lambda = 1$.*

U slučaju da izometrijska transformacija nema invarijantnih tačaka, za njeno bolje razumevanje nam može pomoći sledeća teorema.

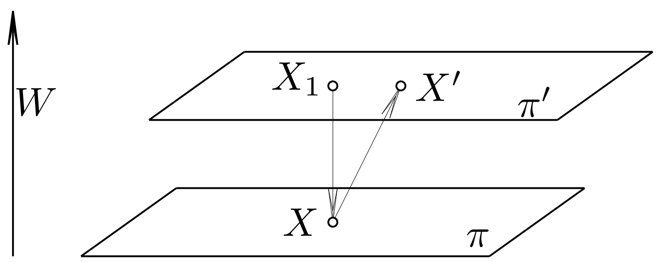
Teorema 5 *Neka je $\mathcal{I}$ izometrija data formulom $X' = AX + B$, koja nema invarijantnih tačaka. Tada postoji izometrija $\mathcal{J}$ takva de je $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{J}$, gde je $\mathcal{J}$ izometrija sa bar jednom invarijantnom tačkom, a τ_v je translacija za vektor v koji pripada sopstvenom potprostoru matrice A za vrednost $\lambda = 1$.*

Primedba 1.11 Prvo, s obzirom da transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka sledi da $\lambda = 1$ jeste njena sopstvena vrednost, te je sopstveni potprostor za $\lambda = 1$ netrivijalan.

Dalje, matrica translacije $[\tau] = E$ je jedinična matrica pa je $[\mathcal{I}] = E[\mathcal{J}]$, pa izometrije $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ imaju iste matrice, a samim tim i iste sopstvene vrednosti i potprostore. $\diamond$

Dokaz. Kako izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, matrica A ima sopstveni potprostor za vrednost $\lambda = 1$, označimo ga sa W. Ako je višestrukost $\lambda = 1$ jednaka n, onda je transformacija data formulom $X' = EX + B$, pa je u pitanju translacija za vektor $v = B^t$ i tvrđenje trivijalno važi.

Pretpostavimo zato da je vektorski prostor $W^\perp$, ortogonalna dopuna W do R^n netrivijalan. Neka je P proizvoljna tačka i $P' = \mathcal{I}(P)$. Neka su σ i π euklidski potprostori (prave ili ravni) prostora $\mathbb{R}^n$ koji sadrže P, čiji su odgovarajući vektorski prostori W i $W^\perp$ i neka su dalje, σ' i π' njihove slike u izometriji $\mathcal{I}$. S obzirom da izometrija čuva paralelnost i ortogonalnost, vektorski prostor za σ' je takođe W, a za π' je $W^\perp$. Označimo sa Pr ortogonalnu projekciju π' na π. Ako se tačke $X_1, Y_1 \in \pi'$ slikaju u $X, Y \in \pi$ tada je $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X_1Y_1}$, pa je i $\rho(X_1, Y_1) = \rho(X, Y) = \rho(\mathcal{I}(X), \mathcal{I}(Y))$.



Sl. 1.20 Kompozicija $\mathcal{I}|_\pi \circ Pr$

Zato, kompozicija preslikavanja $\mathcal{I}|_\pi$ i Pr, $\mathcal{I}|_\pi \circ Pr$ koja slika potprostor π' u sebe je i izometrija. Pri tom, linearni deo tog preslikavanja je jednak $\overline{\mathcal{I}}|_{W^\perp}$, pa $\lambda = 1$ nije njegova sopstvena vrednost. Zato $\mathcal{I}|_\pi \circ Pr$ ima tačno jednu invarijantnu tačku M'. Neka je $M = Pr(M') \in \pi$. Tada je $\mathcal{I}(M) = M'$, a $Pr(M') = M$, odnosno $\overrightarrow{MM'} \in W$.

Neka je sada $\mathcal{J}$ izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ takva da je $\overline{\mathcal{J}}$ opisan matricom A sa invarijantnom tačkom M. Tada je ona data formulama $X' = AX + B_1$ gde je $B_1 = (E - A)M$. Inverz ovog preslikavanja $\mathcal{J}^{-1}$ dat je formulama $X' = A^{-1}X - (A^{-1} - E)M$, a kompozicija $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}^{-1}$ formulama $X' = X + (A - E)M + B$, te je $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}^{-1}$ translacija za vektor $v = ((A - E)M + B)^t$. Kako je $M' = AM + B$, važi da je $v = [M'] - [M] = \overrightarrow{MM'}$, pa $v \in W$. $\square$

1.3 Izometrijske transformacije prostora $R^n, n = 1, 2, 3$

Izometrije euklidske prave. Formule jedne izometrije prave $\mathcal{I}$ glase

$$x' = ax + b. \tag{5}$$

Pri tom je $A = [a]$, gde je $a \in \{-1, 1\}$.

Teorema 6 *Neka su A i B, odnosno A_1 i B_1, dva para različitih tačaka euklidske prave $\mathbb{R}$ i neka je $AB = A_1B_1$. Tada postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ prave $\mathbb{R}$ takva da je $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1$.*

Dokaz. Neka je $x' = ax + b$ jednačina transformacije $\mathcal{I}$. Tada su a i b rešenja sistema

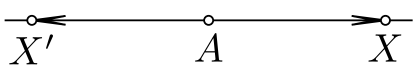
$$\begin{aligned} ax(A) + b &= x(A_1), \\ ax(B) + b &= x(B_1). \end{aligned}$$

Pri tom je determinanta sistema jednaka $(x(A) - x(B)) \neq 0$, te postoji jedinstveno rešenje po a, b. Dalje kako je $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$ oduzimanjem ovih jednačina sledi da je $a \in \{-1, 1\}$ odnosno da je $\mathcal{I}$ izometrija. $\square$

Primedba 1.12 U prethodnom dokazu smo videli da je linearno preslikavanje prave na jedinstven način određeno slikama proizvoljne dve tačke A i B te prave. Ukoliko su još duži AB i njena slika jednake, preslikavanje je izometrija.

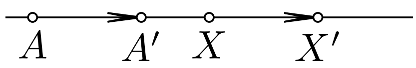
Posmatrajmo jednačinu (5).

1. Ako je $a = -1$, $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost matrice A pa $\mathcal{I}$ ima tačno jednu invarijantnu tačku A, a za jedinični vektor $\overrightarrow{i}$ važi $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{i}$. Zato se proizvoljna tačka prave X slika u tačku X' takvu da je $\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{X'A}$, te je A središte duži XX'. Ovu transformaciju nazivamo **centralnom refleksijom prave** i označavamo $\mathcal{S}_A$. Centralna refleksija je indirektna transformacija.



Sl. 1.21 Centralna refleksija prave

2. (a) Neka je sada $a = 1$. U ovom slučaju radi se o direktnoj izometriji. Tada važi $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$. Ako $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A, tada za proizvoljnu tačku X prave i njenu sliku X' važi da je $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX'}$, pa je i $X' = X$, odnosno $\mathcal{I} = \varepsilon$.



Sl. 1.22 Translacija prave

(b) Ako $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, tada je, na osnovu Teoreme 5, $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{J}$, gde izometrija $\mathcal{J}$ ima isti koeficijent $a = 1$ i bar jednu invarijatntnu tačku, pa je koincidencija. Izometrija $\mathcal{I}$ je tada kompozicija translacije i koincidencije, odnosno translacija τ_v. Pri tom, uočimo da je za $v = \overrightarrow{0}$, $\tau_v = \varepsilon$, pa koincidenciju možemo smatrati translacijom za vektor $\overrightarrow{0}$.

izometrija	inv. tačke	direktnost
ε	sve	$+$
τ_v	0	$+$
$\mathcal{S}_A$	1	$-$

Tab. 1.1 Izometrije prave

Pokažimo sada šta su kompozicije parova izometrijskih transformacija ravni.

Tvrđenje 3
a) Kompozicija dve centralne refleksije prave je translacija ili koincidencija, odnosno važi

$$\mathrm{S}_B \circ \mathrm{S}_A = \tau_{2\overrightarrow{AB}}.$$

b) Kompozicija dve translacije prave je translacija ili koincidencija, odnosno važi

$$\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}.$$

c) Kompozicija translacije prave i centralne refleksije je centralna refleksija prave.

Dokaz.
a) Kompozicija dve indirektne transformacije, centralne refleksije prave, je direktna transformacija, data je formulom $x' = x + b$, te je translacija τ_b (specijalno smatramo da je $\varepsilon = \tau_0$). Vektor translacije je jednak $\overrightarrow{AA'}$, gde je $A' = \mathrm{S}_B \circ \mathrm{S}_A(A)$ slika tačke A, pa važi $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$.
b) Kompozicija dve direktne izometrije je direktna, pa je u pitanju translacija. Kako postoje tačke A, B, C takve da je $v = \overrightarrow{AB}, u = \overrightarrow{BC}$ i pri tom važi da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tvrđenje direktno važi.
c) Kompozicija direktne i indirektne izometrijske transformacije prave je indirektna transformacija, tj. centralna refleksija. Zato je $\tau_v \circ \mathrm{S}_A = \mathrm{S}_B$. Pri tom, kako je $\mathrm{S}_A^{-1} = \mathrm{S}_A$ sledi da je $\tau_v = \mathrm{S}_B \circ \mathrm{S}_A = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$, pa je tačka B takva da je $\overrightarrow{AB} = v/2$. □

Sledeće tvrđenje direktno sledi.

Teorema 7 *Proizvoljna izometrija $\mathcal{I}$ euklidske prave $\mathbb{R}$ može se predstaviti kao kompozicija do dve centralne refleksije.*

Izometrije euklidske ravni. Neka je izometrija $\mathcal{I}$ data formulama

$$X' = AX + B. \tag{6}$$

Teorema 8 *Neka su A, B i C odnosno A_1, B_1 i C_1, dva trojke nekolinearnih tačaka euklidske ravni $\mathbb{R}^2$ i neka je $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$. Tada postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ ravni $\mathbb{R}^2$ takva da je $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1, \mathcal{I}(C) = C_1$.*

Dokaz. Tražimo transformaciju $\mathcal{I} : X' = AX + B$. Neka su koordinate kvadratne matrice A date sa $a_{ij}, i, j = 1, 2$, a koordinate kolone B sa b_1, b_2. Tada se uslov da $\mathcal{I}$ slika A, B, C u A_1, B_1, C_1 svodi na dva sistema jednačina po $a_{i1}, a_{i2}, b_i, i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
a_{i1}x_1(A) + a_{i2}x_2(A) + b_i &= x_i'(A),\\
a_{i1}x_1(B) + a_{i2}x_2(B) + b_i &= x_i'(B),\\
a_{i1}x_1(C) + a_{i2}x_2(C) + b_i &= x_i'(C), \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Determinante oba sistema su iste i jednake

$$\det \begin{bmatrix} x_1(B) - x_1(A) & x_2(B) - x_2(A) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) \end{bmatrix}.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ nekolinearni i dati sa $(x_1(B) - x_1(A), x_2(B) - x_2(A))$ i $(x_1(C) - x_1(A), x_2(C) - x_2(A))$, determinanta je različita od nule, pa postoji jedinstvena matrica A i kolona B koje ispunjavaju ovaj uslov.

Pri tom, kako je, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A_1C_1}\|$ i $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B_1C_1}\|$ sledi i da je $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$. Tada je

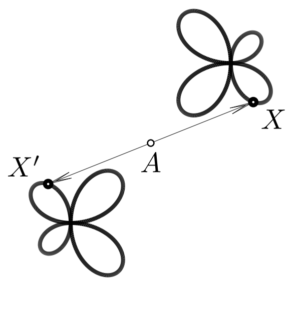
$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{I}}\Big(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\Big) = \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{AB}}}{\|\overrightarrow{\overrightarrow{AB}}\|},\\
&\overline{\mathcal{I}}\Big(\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} \circ \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|})\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\Big) = \Big(\overrightarrow{A_1C_1} - (\overrightarrow{A_1C_1} \circ \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|})\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\Big),
\end{aligned}$$

pa $\overline{\mathcal{I}}$ slika ortonormiranu bazu ravni koja se dobija Gram-Šmitovim postupkom od $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ u ortonormiranu bazu koja se dobija od $\{\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\}$. Zato je matrica preslikavanja A ortonormirana, pa je $\mathcal{I}$ izometrija. □

Primedba 1.13 Iz dokaza prethodne teoreme sledi da je linearna transformacija ravni određena na jedinstven način slikama tri nekolinearne tačke A, B, C, a u pitanju je izometrija ako i samo se duži AB, BC i CA slikaju u sebi jednake duži.

Neka je $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija $\mathbb{R}^2$, data formulama (6). Matrica A je kvadratna, pa može imati ili dve realne sopstvene vrednosti ili dve konjugovano kompleksne.

1. Pretpostavimo, prvo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Tada $\mathcal{I}$ ima tačno jednu invarijantnu tačku A. Svaki vektor odgovarajućeg vektorskog prostora je sopstveni za sopstvenu vrednost $\lambda = -1$. Zato, ako se proizvoljna tačka X slika u X' važi da je $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AX'}$, te je A središte duži XX'.



Sl. 1.23 Centralna simetrija ravni

Ovu transformaciju nazivamo **centralnom simetrijom ravni** i označavamo $\mathcal{S}_A$. Kako je dimenzija sopstvenog potprostora za $\lambda = -1$ dvodimenzion, centralna simetrija ravni je direktna transformacija.

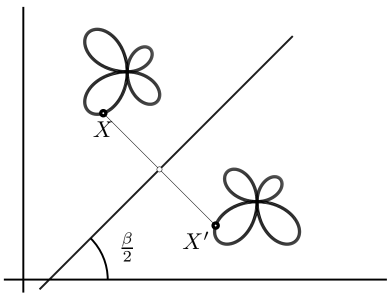
2. Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ onda, slično kao u slučaju euklidske prave, u pitanju je direktna transformacija.

   (a) **koincidencija ravni** ε ukoliko postoji bar jedna invarijantna tačka

   (b) **translacija** τ_v ukoliko invarijantnih tačaka nema.

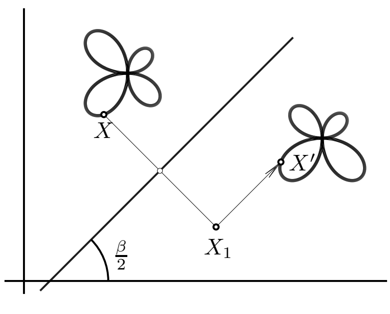
3. Neka je sada $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Tada je u pitanju indirektna transformacija i matrica preslikavanja je oblika S_β, videti Primedbu 1.9. Uočimo da je jedinični sopstveni vektor za $\lambda_1 = 1$ dat sa $v_1 = (\cos\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\beta}{2})$, odnosno da određuje orijentisani ugao $\frac{\beta}{2}$ sa x_1-osom.

   (a) Ako izometrijska transformacija ima bar jednu invarijantnu tačku A onda su, na osnovu Teoreme 4, invarijantne i sve tačke prave p koja sadrži tačku A i određena je vektorom v_1, odnosno određuje ugao $\frac{\beta}{2}$ sa x_1-osom. Neka je X proizvoljna tačka ravni koja ne pripada p i $X_0 \in p$, takva da su prave XX_0 i p ortogonalne. S obzirom da su sopstveni vektori za razne sopstvene vrednosti među sobno ortogonalni, sledi da je vektor $\overrightarrow{XX_0}$ sopstveni za $\lambda_2 = -1$. Pri tom, $\mathcal{I}(X_0) = X_0$, pa ako je $\mathcal{I}(X) = X'$, važi da je $\overrightarrow{XX_0} = -\overrightarrow{X'X_0}$, odnosno tačka X_0 je središte duži XX'. Ovu transformaciju nazivamo **osnom refleksijom ravni** u odnosu na pravu p i označavamo S_p.



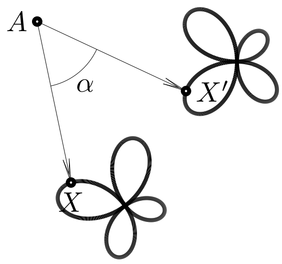
Sl. 1.24 Osna refleksija ravni

   (b) Ako transformacija nema invarijantnih tačaka tada je, prema Teoremi 5, $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathrm{S}_p$, gde je v vektor paralelan pravoj p, a transformaciju nazivamo **klizajućom refleksijom ravni** i označavamo $\mathcal{G}_{p,v}$.



Sl. 1.25 Klizajuća refleksija ravni

4. Ako su λ_1 i λ_2 konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti, izometrija $\mathcal{I}$ ima tačno jednu invarijantnu tačku A. Pri tom, matrica preslikavanja je oblika $R_{-\alpha}$, za neko $\alpha \in R$. Ako se proizvoljna tačka X ravni slika u X', važi $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{AX'}$, te je orijentisani ugao između $\overrightarrow{AX}$ i $\overrightarrow{AX'}$ jednak α. Ovu transformaciju nazivamo **centralnom rotacijom ravni** oko tačke A za ugao α i označavamo $\mathcal{R}_{A,\alpha}$. Uočimo da je $\mathrm{S}_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$.



Sl. 1.26 Centralna rotacija ravni

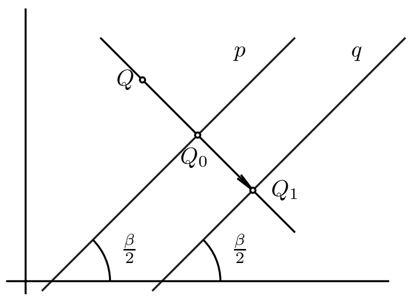
izometrija	inv. tačke	sops. vrednosti	direktnost
ε	sve	$\lambda_{1,2} = 1$	$+$
τ_v	0	$\lambda_{1,2} = 1$	$+$
S_p	$P \in p$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$	$-$
$\mathcal{G}_{p,v}$	$\emptyset$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$	$-$
$\mathcal{R}_{A,\alpha}$	A	$\lambda_{1,2} = e^{\pm \imath\alpha}$	$+$
$\mathrm{S}_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$	A	$\lambda_{1,2} = -1$	$+$

Tab. 1.2 Izometrije ravni

Teorema 9 *Proizvoljna izometrija $\mathcal{I}$ euklidske ravni $\mathbb{R}^2$ može se predstaviti kao kompozicija do tri osne refleksije.*

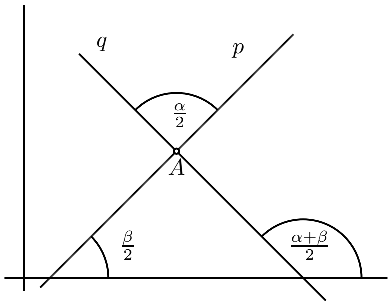
Dokaz. Ako je $\mathcal{I} = \varepsilon$ tada za proizvoljnu pravu p ravni $\mathbb{R}^2$ važi $\varepsilon = \mathrm{S}_p^2$.

Neka je $\mathcal{I} = \tau_v$ translacija. Neka je, dalje, p proizvoljna prava ravni $\mathbb{R}^2$ ortogonalna na pravac vektora v, $Q_0 \in p$, Q_1 takva da je $\overrightarrow{Q_0Q_1} = \frac{v}{2}$ i $Q = \mathrm{S}_p(Q_1)$. Tada je $\overrightarrow{QQ_1} = v$. Posmatrajmo transformaciju $\tau_v \circ \mathrm{S}_p$. Ako je matrica refleksije S_p data sa S_β, onda je ona ujedno i matrica preslikavanja $\tau_v \circ \mathrm{S}_p$. Pri tom $\tau_v \circ \mathrm{S}_p(Q_1) = \tau_v(Q) = Q_1$, pa ova transformacija ima i bar jednu invarijantnu tačku Q_1. Zato je $\tau_v \circ \mathrm{S}_p = \mathrm{S}_q$ osna refleksija, gde $Q_1 \in q$. Pri tom prave p i q određuju sa osom x_1 isti orijentisani ugao $\frac{\beta}{2}$ te su paralelne. Sada važi $\tau_v = \mathrm{S}_q \circ \mathrm{S}_p$.



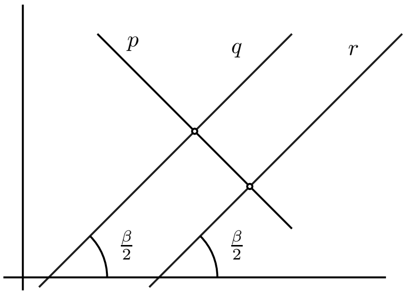
Sl. 1.27 Rastavljanje translacije na osne refleksije

Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$ rotacija. Neka je dalje p proizvoljna prava ravni $\mathbb{R}^2$ takva da $A \in p$. Matrice izometrija $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i S_p su redom, $R_{-\alpha}$ i S_β. Zato je matrica kompozicije $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathrm{S}_p$ data sa $S_{\beta+\alpha}$, videti Primedbu 1.9. Važi i da je $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathrm{S}_p(A) = A$, pa ova kompozicija ima i bar jednu invarijantnu tačku. Zato je $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathrm{S}_p = \mathrm{S}_q$ osna refleksija, gde $A \in q$. Pri tom, orijentisani ugao između x_1-ose i prave q je $\frac{\beta+\alpha}{2}$. Zato je $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathrm{S}_q \circ \mathrm{S}_p$, gde je orijentisani ugao između p i q jednak $\frac{\alpha}{2}$.



Sl. 1.28 Rastavljanje rotacije na osne refleksije

Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{p,v} = \tau_v \circ \mathrm{S}_p$ i neka su q i r dve prave ortogonalne na p takve da je $\tau_v = \mathrm{S}_r \circ \mathrm{S}_q$. Tada je $\mathcal{G}_{p,v} = \mathrm{S}_r \circ \mathrm{S}_q \circ \mathrm{S}_p$.



Sl. 1.29 Rastavljanje klizajuće refleksije na osne

$\square$

Primer 1.14 Neka su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve rotacije ravni i neka je p prava koja sadrži tačke A i B. Ako je $A \neq B$ takva prava je jedinstvena. Neka su dalje q i r prave takve da je $A \in q$, $B \in r$ i neka su orijentisani uglovi između p i q, odnosno r i p, redom jednaki $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$. Tada je $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathrm{S}_q \circ \mathrm{S}_p$, $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathrm{S}_p \circ \mathrm{S}_r$, pa je $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathrm{S}_q \circ \mathrm{S}_r$.

Ako zbir uglova $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ nije jednak opruženom uglu, prave q i r su dve razne prave koje se seku u nekoj tački C (ako je $A = B$ onda je i $C = A$) i pri tom je orijentisani ugao između r i q jednak $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Tada je $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$.

Ako je $\frac{\alpha+\beta}{2}$ jednak opruženom uglu tada su prave q i r paralelne. Pri tom, ako je $A = B$ one se poklapaju i $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \varepsilon$, a ako je $A \neq B$ one su disjunktne i $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \tau_v$ je translacija.

$\diamond$

Izometrije euklidskog prostora. Ako je izometrijska transformacija prostora data sa

$$\mathcal{I} : X' = AX + B, \tag{7}$$

kvadratna matrica A je reda tri. Pri tom se sledeća teorema dokazuje u analogiji sa dokazom Teoreme 8.

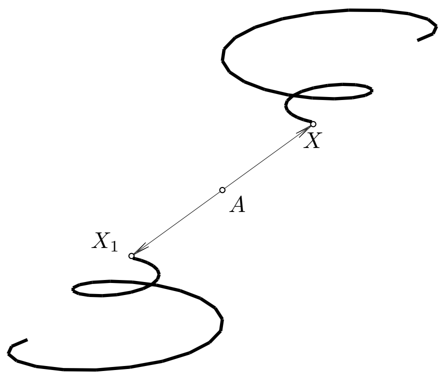
Teorema 10 *Neka su A, B, C i D, odnosno A_1, B_1, C_1 i D_1 dve četvorke nekomplanarnih tačaka euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$ i neka je $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AD = A_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $BD = B_1D_1$, $CD = C_1D_1$. Tada postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ prostora $\mathbb{R}^3$ takva da je $\mathcal{I}(A) = A_1$, $\mathcal{I}(B) = B_1$, $\mathcal{I}(C) = C_1$, $\mathcal{I}(D) = D_1$.*

Naglasimo da i u ovom slučaju četiri nekomplanarne tačke A, B, C, D i njihove slike određuju na jedinstven način jedno linearno preslikavanje prostora, a da iz uslova da su duži određene ovim tačkama i njihove slike jednake sledi da je dato linearno preslikavanje i izometrija.

Posmatrajmo sada formule (7).

Kako je matrica A reda tri, ona ima bar jednu realnu sopstvenu vrednost. Druge dve sopstvene vrednosti su ili obe realne ili konjugovano kompleksne.

1. Neka je, prvo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Tada je $\mathcal{I}$ indirektna transformacija i 1 nije njena sopstvena vrednost, pa transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku A. Pri tom, vektorski prostor R^3 je sopstveni za $\lambda_1 = -1$, pa za svaki vektor važi da je $\overline{\mathcal{I}}(v) = -v$. Ako je X proizvoljna tačka prostora, $\mathcal{I}(X) = X'$, tada je $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{AX'}$, te je $\overrightarrow{AX'} = -\overrightarrow{AX}$. Zato je A središte duži XX'. Ovu izometrijsku transformaciju zovemo **centralnom simetrijom prostora** u odnosu na tačku A i označavamo S_A.



Sl. 1.30 Centralna simetrija prostora

2. Neka je, sada, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Tada je R^3 sopstveni potprostor za $\lambda_1 = 1$, a izometrija je direktna.

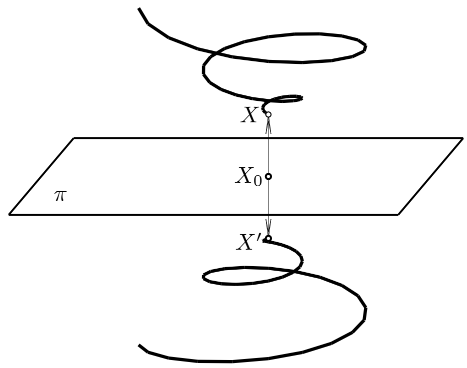
   (a) Neka $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A i neka je $\mathcal{I}(X) = X'$ gde je X proizvoljna. Tada je $\overrightarrow{AX} = \overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{AX'}$ pa je $X' = X$. Zato je $\mathcal{I} = \varepsilon$ **koincidencija prostora**.

   (b) Ako $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka tada je, na osnovu Teoreme 5, $\mathcal{I} = \tau_v \circ \varepsilon = \tau_v$ **translacija prostora**.

3. Pretpostavimo sada da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Tada je $\mathcal{I}$ indirektna transformacija. Neka su v_1, v_2 i v_3 jedinični ortogonalni vektori takvi da v_1, v_2 razapinju sopstveni potprostor za $\lambda_1 = 1$, a v_3 za $\lambda_3 = -1$.

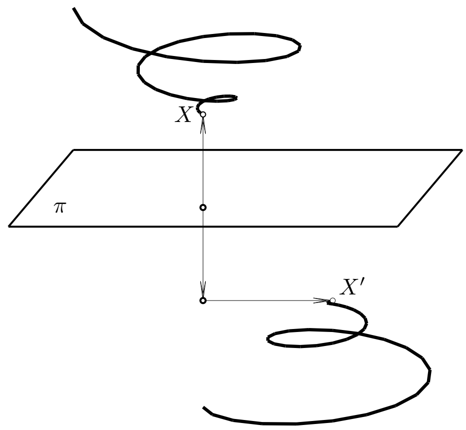
   (a) Neka $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A. Neka je π ravan koja sadrži A i paralelna je vektorima v_1, v_2. Tada su (videti Teoremu 4) tačke ravni π invarijantne za $\mathcal{I}$.

Neka je X proizvoljna tačka koja ne pripada ravni π i X_0 njena ortogonalna projekcija na π. Tada je X_0 invarijantna tačka izometrije. S obzirom da je vektor $\overrightarrow{XX_0}$ ortogonalana na v_1, v_2, on je sopstveni za $\lambda_3 = -1$ (i paralelan v_3). Ako je $\mathcal{I}(X) = X'$ sledi da je $\overrightarrow{X_0X'} = \overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{X_0X}) = -\overrightarrow{X_0X}$. Dakle X_0 je središte duži XX' i pri tom je XX' ortogonalno na π. Ovu izometriju zovemo **ravanskom refleksijom prostora** u odnosu na ravan π i označavamo sa S_π.



Sl. 1.31 Ravanska refleksija prostora

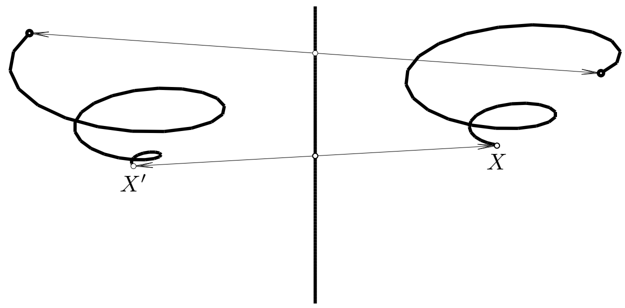
(b) Ako $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka onda postoje vektor v i ravan π takvi da je $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathrm{S}_\pi$, gde su π i v paralelni sopstvenom potprostoru za $\lambda_1 = 1$. Izometriju $\mathcal{I}$ nazivamo **klizajućom refleksijom** prostora i označavamo sa $\mathcal{G}_{\pi,v}$.



Sl. 1.32 Klizajuća refleksija prostora

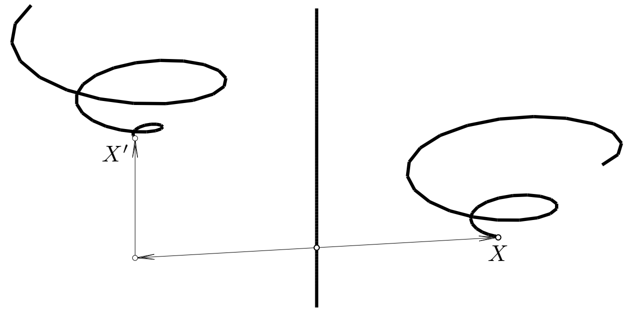
4. Ako je $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ transformacija $\mathcal{I}$ je direktna. Neka su v_1 i v_2, v_3 jedinični ortogonalni vektori koji razapinju sopstvene potprostore za $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$ redom.

   (a) Ako $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A, neka je p prava koja sadrži A i određena je vektorom v_1. Tada su invarijantne tačke izometrije $\mathcal{I}$ tačke prave p. Neka je X tačka koja ne pripada pravoj p i X_0 njena projekcija na p. Tada je X_0 invarijantna tačka izometrije, a $\overrightarrow{X_0X}$ sopstveni vektor za vrednost $\lambda_2 = -1$, pa je $\mathcal{I}(X) = X'$, gde je X_0 središte XX'. Ovu transformaciju nazivamo **osnom simetrijom prostora** u odnosu na pravu p i označavamo sa S_p.



Sl. 1.33 Osna simetrija prostora

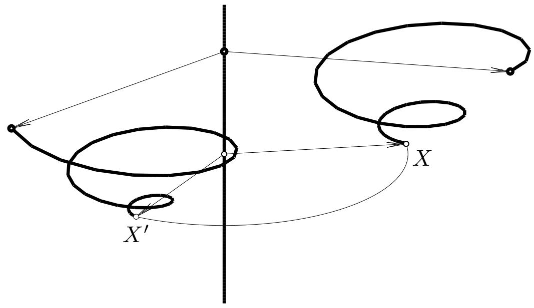
(b) Ako $\mathcal{I}$ nema invarijantne tačke tada postoji vektor v sopstveni za $\lambda_1 = 1$, i prava p njemu paralelna, takvi da je $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathrm{S}_p$. Ova transformacija je **zavojni poluobrtaj prostora** oko prave p, $\mathcal{Z}_{p,v}$.



Sl. 1.34 Zavojni poluobrtaj

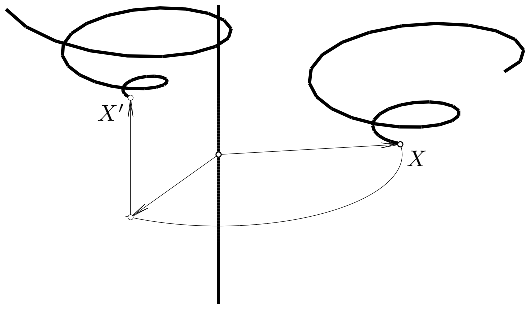
5. Pretpostavimo da je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_{2,3} = e^{\pm \imath\alpha}$ konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti. Tada je $\mathcal{I}$ direktna izometrija. Neka je v_1 vektor sopstveni za $\lambda_1 = 1$, i v_2, v_3 ortogonalni i jedinični vektori koji razapinju ortogonalni komplement ovog prostora.

   (a) Ako $\mathcal{I}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A tada su sve tačke prave p koja sadrži A i određena je sa v_1 invarijantne. Ako je X tačka koja ne pripada p, neka je π ravan takva da je $X \in \pi$, $\pi \perp p$, odnosno π je paralelna v_2, v_3, pa se slika transformacijom $\mathcal{I}$ u sebi paralelnu ravan. Ako je X_0 presečna tačka prave p i ravni π, ona je invarijantna, te se π slika u sebe. Pri tom je, videti Teoremu 3, restrikcija $\mathcal{I}_\pi$ rotacija ravni π oko tačke X_0 za neki ugao α koji ne zavisi od izbora ravni $\pi \perp p$. Ova transformacija je **osna rotacija prostora** oko prave p za ugao α, $\mathcal{R}_{p,\alpha}$. Uočimo da je tada $\mathrm{S}_p = \mathcal{R}_{p,\pi}$.



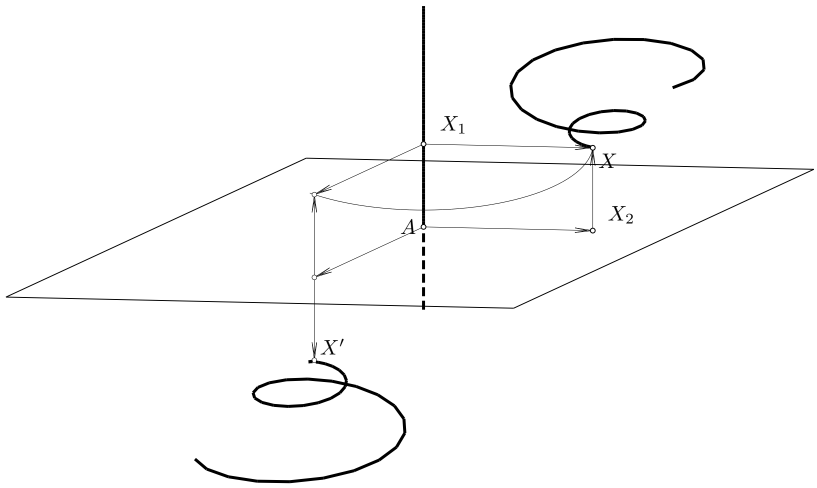
Sl. 1.35 Osna rotacija prostora

(b) Ako $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, postoje prava p i vektor v paralelni sopstvenom potprostoru za $\lambda_1 = 1$ takvi da je $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{R}_{p,\alpha}$. Ovu izometriju nazivamo **zavojnim kretanjem prostora** oko prave p, za ugao α, paralelno vektoru v i označavamo sa $\mathcal{Z}_{p,\alpha,v}$. Tada je i zavojni poluobrtaj specijalan slučaj zavojnog kretanja, gde je ugao rotacije π, odnosno $\mathcal{Z}_{p,v} = \mathcal{Z}_{p,\pi,v}$.



Sl. 1.36 Zavojno kretanje

6. Ukoliko su $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = e^{\pm \imath\alpha}$ sopstvene vrednosti, $\mathcal{I}$ je indirektna transformacija. Pri tom, 1 nije sopstvena vrednost, pa $\mathcal{I}$ uvek ima tačno jednu invarijantnu tačku A. Neka je v_1 sopstveni vektor za $\lambda_1 = -1$ i p prava, takva da je $A \in p$ paralelna v_1. Ako je $P \in p$ i $\mathcal{I}(P) = P'$, važi da je $\overrightarrow{AP'} = \mathcal{I}(\overrightarrow{AP}) = -\overrightarrow{AP}$, pa se prava p slika u sebe, a restrikcija $\mathcal{I}|_p$ je centralna refleksija prave p sa centrom u A. Ako su v_2 i v_3 jedinični, ortogonalni vektori koji razapinju ortogonalnu dopunu $W^\perp$ sopstvenog potprostora za $\lambda_1 = -1$, restrikcija linearnog preslikavanja $\mathcal{I}|_{W^\perp}$ je rotacija za neki ugao α. Zato je transformacija $\mathcal{I} = \mathrm{S}_\sigma \circ \mathcal{R}_{p,\alpha}$, gde je σ ravan ortogonalna na p, $S \in \pi$. Ovu transformaciju nazivamo **osno-rotacionom refleksijom** prostora oko prave p, za ugao α i u odnosu na ravan σ. Označavamo je sa $\mathcal{R}_{p,\alpha,\sigma}$. Uochimo da je centralna simetrija S_A specijalan slučaj osno-rotacione refleksije $\mathcal{R}_{p,\alpha,\sigma}$ gde je ugao $\alpha = \pi$.



Sl. 1.37 Osno-rotaciona refleksija

izometrija	inv. tačke	sops. vrednosti	direktnost
ε	sve	$\lambda_{1,2,3} = 1$	$+$
τ_v	0	$\lambda_{1,2,3} = 1$	$+$
S_π	$P \in \pi$	$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$	$-$
$\mathcal{G}_{\pi,v}$	$\emptyset$	$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$	$-$
$\mathcal{R}_{p,\alpha}$	$P \in p$	$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = e^{\pm\imath\alpha}$	$+$
$\mathrm{S}_p = \mathcal{R}_{p,\pi}$	$P \in p$	$\lambda_1 = 1, \lambda_{1,2} = -1$	$+$
$\mathcal{Z}_{p,\alpha,v}$	$\emptyset$	$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = e^{\pm\imath\alpha}$	$+$
$\mathcal{Z}_{p,v} = \mathcal{Z}_{p,\pi,v}$	$\emptyset$	$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$	$+$
$\mathcal{R}_{p,\alpha,\sigma}$	$S \in p \cap \sigma$	$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = e^{\pm\imath\alpha}$	$-$
$\mathrm{S}_A = \mathcal{R}_{p,\pi,\sigma}$	$A \in p \cap \sigma$	$\lambda_{1,2,3} = -1$	$-$

Tab. 1.3 Izometrije prostora

Kao i u prethodnim slučajevima i za izometrije prostora važi da se svaka od njih može predstaviti kao kompozicija konačnog broja ravanskih refleksija, odnosno važi sledeća teorema.

Teorema 11 *Proizvoljna izometrija $\mathcal{I}$ euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$ može se predstaviti kao kompozicija do četiri ravanske refleksije.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{I} = \varepsilon$, tada za proizvoljnu ravan π prostora važi da je $\varepsilon = \mathrm{S}_\pi^2$.

Ako je $\mathcal{I} = \tau_v$, neka je π proizvoljna ravan prostora ortogonalna na pravac vektora v i $Q_0 \in \pi$. Neka je Q_1 tačka prostora takva da je $\overrightarrow{Q_0Q_1} = \frac{v}{2}$ i $Q = \mathrm{S}_\pi(Q_1)$. Tada je i $\overrightarrow{QQ_1} = v$. Matrica kompozicije $\tau_v \circ \mathrm{S}_\pi$ ima dvostruku sopstvenu vrednost 1 i jednostruku -1 i iste odgovarajuće sopstvene potprostore kao matrica za S_π. Pri tom, $\tau_v \circ \mathrm{S}_\pi(Q_1) = Q_1$ te je $\tau_v \circ \mathrm{S}_\pi = \mathrm{S}_\sigma$ osna refleksija, gde je ravan σ paralelna ravni π i sadrži tačku Q_1. Zato je $\tau_v = \mathrm{S}_\sigma \circ \mathrm{S}_\pi$.

Tada je klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\pi,v} = \tau_v \circ \Sigma_\pi = \mathrm{S}_\rho \circ \mathrm{S}_\sigma \circ \mathrm{S}_\pi$, gde je $\tau_v = \mathrm{S}_\rho \circ \mathrm{S}_\sigma$, odnosno gde su ρ i σ dve međusobno paralelne ravni, upravne na π.

Neka je sada $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{p,\alpha}$ i π proizvoljna ravan koja sadrži pravu p. Kompozicija $\mathcal{R}_{p,\alpha} \circ \mathrm{S}_\pi$ je indirektna transformacija za koju su tačke prave p invarijantne, pa je u pitanju ravanska refleksija S_σ gde $p \subset \sigma$. Ako je μ ravan ortogonalna na p seče π i σ po pravama a i b, orijentisani ugao između ravni π i σ je isti kao ugao između a i b. Pri tom je $\mathcal{I}_\mu$ rotacija za ugao α te ravni, te je orijentisani ugao između a i b jednak $\frac{\alpha}{2}$. Zato je $\mathcal{R}_{p,\alpha} = \mathrm{S}_\sigma \circ \mathrm{S}_\pi$ gde se ravni π i σ seku po pravoj p i određuju ugao $\frac{\alpha}{2}$. Specijalno, ako je rotacija ujedno i osna simetrija, ravni π i σ su ortogonalne.

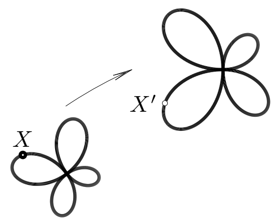
Ako je $\mathcal{I} = \mathcal{Z}_{p,\alpha,v} = \tau_v \circ \mathcal{R}_{p,\alpha}$ neka su μ i ν, odnosno γ i δ ravni takve da je $\tau_v = \mathrm{S}_\nu \circ \mathrm{S}_\mu$, a $\mathcal{R}_{p,\alpha} = \mathrm{S}_\delta \circ \mathrm{S}_\gamma$. Tada je $\mathcal{Z}_{p,\alpha,v} = \mathrm{S}_\nu \circ \mathrm{S}_\mu \circ \mathrm{S}_\delta \circ \mathrm{S}_\gamma$ i pri tom se γ i δ seku po pravoj p, dok su ravni μ i ν ortogonalne na p. Ako su, pri tom, γ i δ ortogonalne, transformacija je zavojni poluobrtaj.

Na kraju, ako je $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{p,\alpha,\sigma}$ i γ i δ ravni takve da je $\mathcal{R}_{p,\alpha} = \mathrm{S}_\delta \circ \mathrm{S}_\gamma$ onda je $\mathcal{R}_{p,\alpha,\sigma} = \mathrm{S}_\delta \circ \mathrm{S}_\gamma \circ \mathrm{S}_\sigma$. Pri tom se ravni δ i γ seku po pravoj p, dok je σ upravna na p u jedinstvenoj invarijantnoj tački transformacije S. Ako su ravni δ i σ upravne, specijalno dobijamo centralnu simetriju S_S. $\square$

2 Sličnosti

Definicija 2.1 Neka je $k > 0$ pozitivan realan broj. Bijektivno preslikavanje $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *sličnost* prostora $\mathbb{R}^n$ *sa koeficijentom* k, ako za proizvoljne dve tačke $A, B \in \mathbb{R}^n$ važi $\rho(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)) = k \cdot \rho(A, B)$. Skup svih sličnosti prostora $\mathbb{R}^n$ označavamo sa $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n)$.

Primer 2.1 Svaka izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ je ujedno i sličnost sa koeficijentom 1. ◇



Sl. 2.1 Sličnost

Teorema 12 *Neka su* $\mathcal{S}_1$ *i* $\mathcal{S}_2$ *sličnosti prostora* $\mathbb{R}^n$ *sa koeficijentima* k_1 *i* k_2. *Tada je* $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$ *takođe sličnost* $\mathbb{R}^n$. *Sa koeficijentom* $k_1 \cdot k_2$.

Dokaz. Neka su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ redom, sličnosti prostora $\mathbb{R}^n$ sa koeficijentima k_1 i k_2 i $A, B \in \mathbb{R}^n$ proizvoljne tačke. Tada je

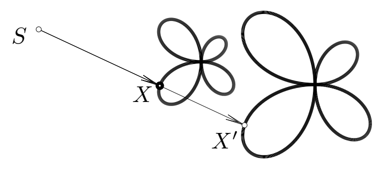
$$\rho(\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1(A), \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1(B)) = k_2 \cdot \rho(\mathcal{S}_1(A), \mathcal{S}_1(B)) = k_2 k_1 \cdot \rho(A, B),$$

odakle sledi tvrđenje. □

Posledica 4 *Skup* $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n)$ *sa operacijom kompozicije preslikavanja čini grupu.*

Primedba 2.2 Grupa $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ izometrija prostora $\mathbb{R}^n$ je podgrupa grupe $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n)$.

Definicija 2.2 Neka je $S \in \mathbb{R}^n$ tačka i $k \neq 0$ realan broj. Za proizvoljnu tačku P prostora $\mathbb{R}^n$ neka je P_1 tačka takva da je $\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$. Preslikavanje $\mathcal{H}_{S,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dato sa $\mathcal{H}_{S,k}(P) = P'$ naziva se **homotetijom** prostora $\mathbb{R}^n$ i koeficijentom k.

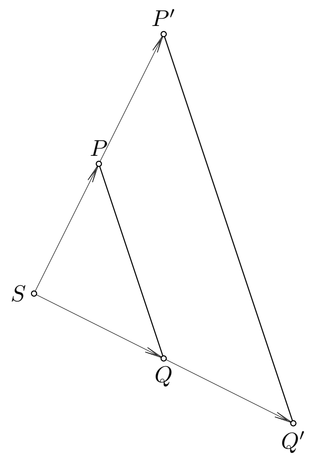


Sl. 2.2 Homotetija

Ako $\mathcal{H}_{S,k}(P) = P', \mathcal{H}_{S,k}(Q) = Q'$ tada je

$$\overrightarrow{P'Q'} = k \cdot \overrightarrow{PQ}, \tag{8}$$

pa je $\rho(P', Q') = |k| \cdot \rho(P, Q)$. Zato je homotetija $\mathcal{H}_{S,k}$ sličnost sa koeficijentom $|k|$.



Sl. 2.3 Slika duži u homotetiji

Uočimo, pri tom, da je za $k \neq 1$ jedina invarijantna tačka homotetije $\mathcal{H}_{S,k}$ tačka S, dok je $\mathcal{H}_{S,1} = \varepsilon$. Pri tom, ako je $k > 0$ tačke P i P' se nalaze sa iste strane tačke S, dok je za $k < 0$ tačka S između P i P'. Specijalno, ako je $k = -1$ važi da je $\mathcal{H}_{S,-1}$ centralna refleksija prave, za $n = 1$, odnosno centralna simetrija ravni (prostora), za $n = 2$ ($n = 3$).

Ako je $\overline{\mathcal{H}_{S,k}}$ preslikavanje vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ indukovano homotetijom $\mathcal{H}_{S,k}$, $\overline{\mathcal{H}_{S,k}}$ je linearno preslikavanje koje proizvoljan vektor v slika u $k \cdot v$. Zato je odgovarajuća matrica tog preslikavanja $k \cdot E$. Onda možemo pisati da je $X' - S = kE(X - S)$, odnosno da je homotetija data formulama

$$X' = kX + (1 - k)S.$$

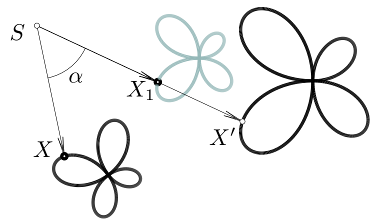
Pri tom, inverzno preslikavanje $\mathcal{H}_{S,k}^{-1}$ je homotetija $\mathcal{H}_{S,1/k}$.

Tvrđenje 4 *Homotetijom $\mathcal{H}_{S,k}$ se:*
a) kolinearne tačke A, B, C takve da je B između A i C slikaju u kolinearne tačke A', B', C' takve da je B' između A' i C';
b) prave slikaju u sebi paralelne prave;
c) ravni slikaju u sebi paralelne ravni;
d) uglovi se slikaju u sebi jednake uglove.

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AC}, \lambda > 0$, tada je, zbog (8) i $\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{BC} = \lambda k\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{A'C'}$, pa tvrđenje a) sledi. Tvrđenja b) i c) se direktno dobijaju iz (8). S obzirom da se kraci konveksnog ugla $\angle POQ$ slikaju u sebi paralelne krake $O'P'$ i $O'Q'$, a duž PQ u $P'Q'$ sledi da se $\angle POQ$ slika u konveksan ugao $\angle P'O'Q'$ odnosno sebi jednak ugao. Tada se i odgovarajući nekonveksni ugao slika u sebi jednak, nekonveksni ugao. □

Teorema 13 *Svaka sličnost može se zapisati kao kompozicija homotetije sa proizvoljnim centrom i izometrije.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ sličnost sa koeficijentom $k > 0$ i neka je $\mathcal{H}_{S,k}$ homotetija sa proizvoljnim centrom S. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{H}_{S,1/k} \circ \mathcal{S}$. Kako su $\mathcal{H}_{S,1/k}$ i $\mathcal{S}$, redom, sličnosti sa koeficijentima $1/k$ i k njihova kompozicija $\mathcal{I}$ je sličnost sa koeficijentom 1, odnosno izometrija. Zato je $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$. □



Sl. 2.4 Dekompozicija sličnosti na izometriju i homotetiju

Posledica 5 *Preslikavanje prostora $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je sličnost sa koeficijentom k ako i samo ako su njegove formule u ortonormiranom koordinatnom sistemu date sa $X' = AX + B$, gde je $A^t A = k^2 E$.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{S}$ sličnost sa koeficijentnom k tada je $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$, za neku tačku S i izometriju $\mathcal{I} : X' = A_1 X + B_1$. Formule sličnosti $\mathcal{S}$ tada su date sa $X' = k(A_1 X + B_1) + (1-k)S$, odnosno $X' = (kA_1)X + (kB_1 + (1-k)S)$. Matrica A_1 izometrije $\mathcal{I}$ je takva da je $A_1^t A_1 = E$, te je matrica sličnosti $A = kA_1$ takva da važi $A^t A = k^2 E$.

Obratno, neka je $\mathcal{S}$ preslikavanje dato formulama $X' = AX + B$, gde je $A^t A = k^2 E$. Neka je, dalje $\mathcal{H}_{S,1/k}$ homotetija sa koeficijentom $1/k > 0$, data formulama $X' = \frac{1}{k}X + (1 - \frac{1}{k})S$. Tada je kompozicija $\mathcal{H}_{S,1/k} \circ \mathcal{S}$ data formulama $X' = \frac{1}{k}(AX + B) + (1 - \frac{1}{k})S$, a kako je $(\frac{1}{k}A)^t(\frac{1}{k}A) = E$, u pitanju je neka izometrija $\mathcal{I}$. Zato je $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$ kompozicija dve sličnosti sa koeficijentima $1/k$ i 1, sličnost. $\square$

Primedba 2.3 Neka je sličnost $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$, gde je $\mathcal{I}$ izometrija. Uočimo da, ukoliko je λ sopstvena vrednost matrice A_1 izometrije $\mathcal{I}$, tada je $k\lambda$ sopstvena vrednost matrice sličnosti $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da $\mathcal{S}$ nije izometrija, odnosno da za koeficijent k važi $|k| \neq 1$. Tada, za sopstvene vrednosti, realne ili kompleksne, matrice $A = kA_1$ važi da je $|k\lambda| = |k|$, pa 1 nije sopstvena vrednost matrice A. Zato sličnost ima tačno jednu invarijantnu tačku T. Ako, pri tom, tražimo da je $S = T$, tada je T invarijantna i za izometriju $\mathcal{I}$. $\diamond$

S obzirom da se svaka sličnost može predstaviti kao kompozicija homotetije i izometrije, za koje ponaosob važi sledeća posledica, direktno vidimo da ona važi i u opštem slučaju.

Posledica 6 *Sličnost slika kolinearne tačke u kolinearne, paralelne prave u paralelne prave, paralelne ravni u paralelne ravni, uglove u njima jednake uglove.*

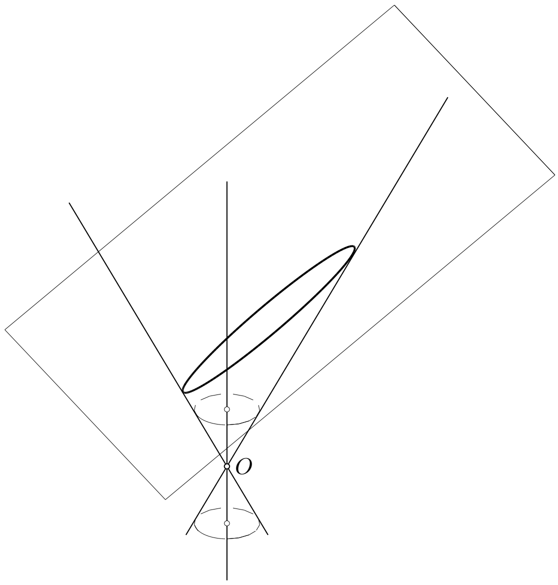
Definicija 2.3 Slichnost $\mathcal{S} : X' = AX + B$ je direktna ako je $\det A > 0$, a indirektna ukoliko je $\det A < 0$.

Slično, kao i u slučaju izometrija, skup direktnih sličnosti prostora$\mathbb{R}^n$ je podgrupa grupe $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n)$.

Primer 2.4 Nađimo sada kompoziciju dve homotetije $\mathcal{H}_{A,k_1} \circ \mathcal{H}_{B,k_2}$. Formule ovih preslikavanja date sa $\mathcal{H}_{A,k_1} : X' = k_1 X + (1-k_1)A$, $\mathcal{H}_{B,k_2} : X' = k_2 X + (1-k_2)B$. Tada su formule kompozicije $\mathcal{H}_{A,k_1} \circ \mathcal{H}_{B,k_2}$ date sa $X' = k_1 k_2 X + (k_1(1-k_2)B + (1-k_1)A)$. Ukoliko je $k_1 k_2 \neq 1$ ovim formulama je data homotetija sa koeficijentom $k_1 k_2$ i centrom C takvim da je $k_1(1-k_2)B + (1-k_1)A = (1-k_1 k_2)C$. Ako je $k_1 k_2 = 1$, transformacija je data sa $X' = X + (k_1 - 1)(B - A)$. Zato, ukoliko je $k_1 = 1 = k_2$ ili $A = B$ kompozicija je koincidencija ε, a u suprotnom je translacija τ_v za vektor $v = (k_1 - 1)\overrightarrow{AB}$. $\diamond$

3 Konusni preseci

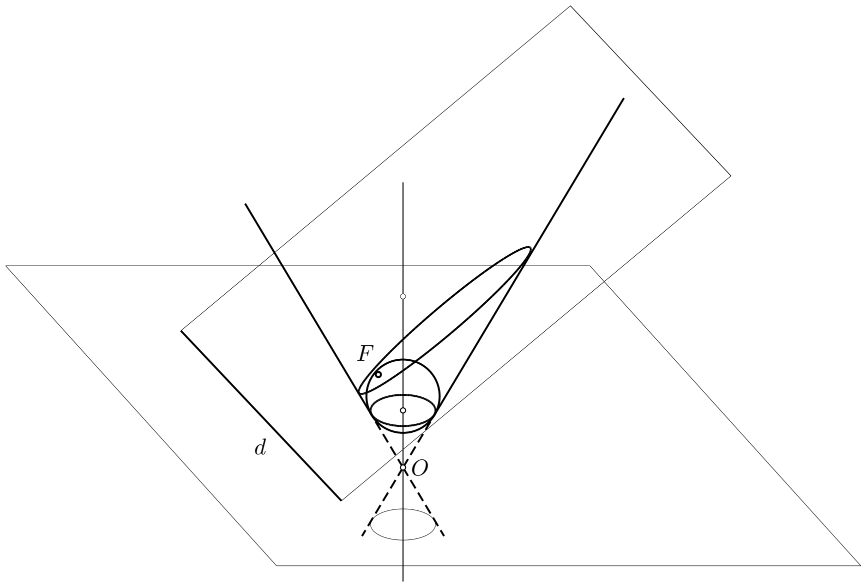
Neka su s i p dve prave u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ koje se seku u tački O. Skup svih slika tačaka prave p u rotacijama oko prave s je **kružni konus**. Prava s je njegova **osa**, a slike prave p su njegove **izvodnice**. Neka je π ravan prostora. Ako ravan π sadrži tačku O, njen presek sa konusom je ili sama ta tačka, ili se ravan i konus dodiruju po izvodnici, ili ravan seče konus po dve izvodnice. Ove skupove nazivamo **degenerisanim konusnim presecima**. Ostali konusni preseci su **nedegenerisani** ili **konike**. Ako je ravan upravna na osi s i ne sadrži tačku O, presek konusa i ravni je krug.



Sl. 3.1 Konusni presek

Teorema 14 *Neka je $\mathcal{K}$ konika u ravni π koji nije krug. Tada postoje prava d i tačka F te ravni takve da je odnos odstojanja proizvoljne tačke konike $\mathcal{K}$ od tačke F i prave d konstantnan.*

Dokaz. Neka je konika presek ravni π i konusa $\mathfrak{K}$. Postoji sfera upisana u konus koja dodiruje ravan π u tački F, a sam konus po krugu k. Neka je σ ravan kruga k. Kako konika $\mathcal{K}$ nije krug, ravni π i σ se seku po pravoj d. Pokažimo da tačka F i prava d ispunjavaju traženi uslov. Označimo sa β ugao između ravni π i σ i sa α ugao izvodnice konusa zaklapaju sa σ. Neka je X proizvoljna tačka $\mathcal{K}$ i K tačka sa kruga k takva da duž XK pripada izvodnici konusa. Tangentne duži iz X na upisanu sferu su jednake. Dve takve duži su XF i XK, zato je $XF = XK$. Neka je X' ortogonalna projekcija tačke X na ravan σ. Tada je $\frac{XX'}{XK} = \sin\alpha$. Takođe, ako označimo sa ρ udaljenost tačke X od prave d, važi i da je $\frac{XX'}{\rho} = \sin\beta$. Zato $\frac{XF}{\rho} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ne zavisi od izbora tačke $X \in \mathfrak{K}$. $\square$

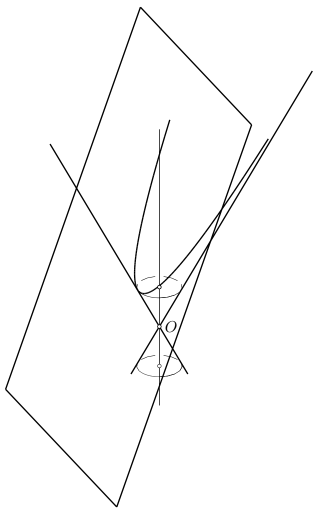


Sl. 3.2 Žiža i direktrisa konike

Definicija 3.1 Tačku F nazivamo **žižom** ili **fokusom** konike, a pravu d **direktrisom**. Odnos rastojanja tačke X konike od žiže i direktrise je **ekscentricitet** konike.

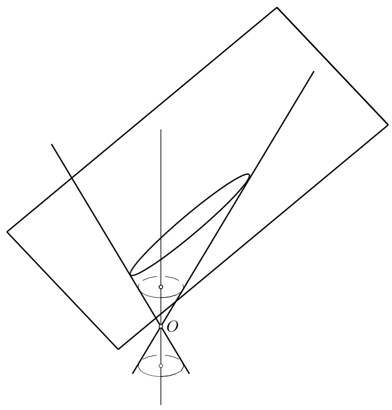
Primedba 3.1 Važi i obrnuto. Ako su d i F prava i tačka u ravni koja joj ne pripada i $\mathcal{K}$ skup tačaka te ravni takvih da je odnos njihovih odstojanja od F i d konstantan, onda postoji kružni konus koji seče datu ravan po skupu $\mathcal{K}$. $\diamond$

Primedba 3.2 Neka je α ravan upravna na osu s u tački O. S obzirom da uglovi α i β pripadaju intervalu $(0, \pi/2)$ sledi da je ekscentricitet konike jednak 1 ako i samo ako je $\alpha = \beta$, odnosno ako i samo ako je ravan π paralelna jednoj izvodnici konusa. Tu koniku nazivamo **parabolom**.



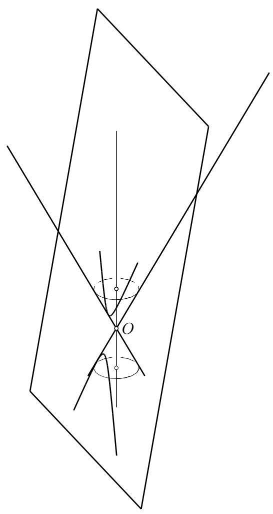
Sl. 3.3 Parabola

Slično zaključujemo da je $e < 1$ ako i samo ako je $\alpha < \beta$, odnosno ako i samo ako ravan π seče sve izvodnice konusa sa iste strane ravni α, a odgovarajuću koniku $\mathcal{K}$ nazivamo **elipsom**.



Sl. 3.4 Elipsa

Analogno, važi da je $e > 1$ ako i samo ako π seče izvodnice u tačkama koje se nalaze sa raznih strana α, a datu koniku zovemo **hiperbolom.**



Sl. 3.5 Hiperbola

U slučaju kada je π upravna na s, odnosno kada je presek krug, dodirna tačka upisane sfere je ujedno centar kruga, dok je ravan σ paralelna π, pa formalno možemo smatrati da je njihov presek beskonačno daleko. Zato može mo smatrati da je ekscentricitet kruga $e = 0$, a sam krug specijalan slučaj elipse. $\diamond$

Primedba 3.3 U slučaju elipse i hiperbole postoje dve sfere koje dodiruju i konus i ravan π, te postoje dva para (F, d) gde je F žiža, a d odgovarajuća direktrisa. U slučaju parabole postoji samo jedna takva sfera, odnosno jedan par (F, d). $\diamond$

Tvrđenje 5 *Nedegenerisani konusni presek $\mathcal{K}$ je u ortonormiranom Dekartovom sistemu dat kvadratnom jednačinom.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{K}$ krug, tvrđenje očigledno važi. Neka je zato, u pitanju konusni presek koji ima žižu i direktrisu. Neka su žiža i direktrisa date sa $F(f_1, f_2)$ i $d : \cos\mu x_1 + \sin_\mu x_2 + m = 0$. Tada je skup tačaka takvih da je odnos njihovih odstojanja od žiže i direktrise jednak ekscentricitetu e dat sa

$$(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2 = e^2(\cos\mu x_1 + \sin\mu x_2 + m)^2, \tag{9}$$

pa i tada tvrđenje važi. $\square$

Primedba 3.4 Skup tačaka ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

gde je $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ je **kriva drugog reda**. Može se pokazati da je proizvoljna kriva drugog reda ili konusni presek, ili unija dve paralelne prave ili prazan skup. $\diamond$

Krivu drugog reda možemo zapisati i u sledećem obliku

$$X^tAX + X^tB + C = 0, \tag{10}$$

gde su A i B redom kvadratna, simetrična matrica i kolona date sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Kanonski oblik. Neka je $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija kojom se konika $\mathcal{K}$, koja nije krug, slika u drugu koniku. Kako izometrija čuva rastojanja, $\mathcal{I}$ slika odgovarajuću žižu i direktrisu žižu i direktrisu nove krive. Pri tom, $\mathcal{K}$ i njena slika imaju isti ekscentricitet. Posmatrajmo jednačinu (9). Rotacijom $\mathcal{R}$ datom formulama

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\mu x_1' - \sin\mu x_2', \\ x_2 &= \sin\mu x_1' + \cos\mu x_2' \end{aligned} \tag{11}$$

se kriva (9) slika u

$$\begin{aligned} &(1-e^2)x_1'^2 + x_2'^2 - 2(me^2 + f_1\cos\mu + f_2\sin\mu)x_1' \\ &+ 2(f_1\sin\mu - f_2\cos\mu)x_2' + f_1^2 + f_2^2 - m^2e^2 = 0. \end{aligned}$$

Pri tom su koordinate slike tačke $F(f_1, f_2)$ date sa

$$\begin{aligned} f_1' &= f_1\cos\mu + f_2\sin\mu \\ f_2' &= -f_1\sin\mu + f_2\cos\mu), \end{aligned}$$

a direktrisa d se slika u pravu d' datu jednačinom $x_1' + m = 0$.
Slučaj $e^2/neq1$.

Translacijom $(x_1'', x_2'') = \tau_1(x_1', x_2') = (x_1' - \frac{f_1'+e^2m}{1-e^2}, x_2' - f_2')$, kriva se dalje slika u

$$(1-e^2)x_1''^2 + x_2''^2 - 2(me^2 + f_1')x_1'' = \frac{e^2}{1-e^2}(f_1' + m)^2, \tag{12}$$

Slika ži že je

$$f_1'' = f_1' - \frac{f_1'^2 + e^2m}{1-e^2} = -\frac{e^2}{1-e^2}(f_1' + m) = c,$$

$$f_2'' = 0,$$

a direktrise

$$x_1'' + \frac{f_1' + m}{1-e^2} = 0.$$

Označimo

$$a^2 = \frac{e^2}{(1-e^2)^2}(f_1' + m)^2, \quad b^2 = |\frac{e^2}{1-e^2}|(f_1' + m)^2, \quad \varepsilon = sgn(1-e^2).$$

Sada je jednačina konike data sa

$$\frac{x_1''^2}{a^2} + \varepsilon \frac{x_2''^2}{b^2} = 1.$$

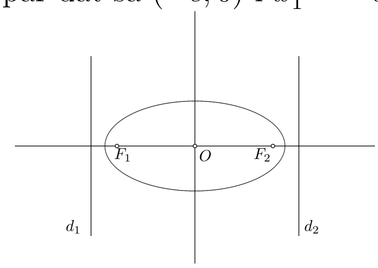
Iz ove jednačine vidimo da su odgovarajuće konike osno-simetrične u odnosu na x_1'' i x_2'' osu, kao i da su centralno simetrične u odnosu na tačku $x_1'' = 0, x_2'' = 0$. Uočimo da važi i $a^2 - \varepsilon b^2 = \frac{e^4}{1-e^2}(f_1' + m)^2 = c^2$ i da je zatim $\frac{c^2}{a^2} = e^2$. Zato je i jednačina direktrise

$$x_1'' - \frac{a^2}{c} = 0.$$

Vrednosti a i b nazivamo **poluosama** date konike.
Elipsa. Kada je $e < 1$, odnosno $\varepsilon = 1$, vidimo da je jednačina dobijene elipse

$$\frac{x_1''^2}{a^2} + \frac{x_2''^2}{b^2} = 1.$$

Ovu jednačinu nazivamo **kanonskom jednačinom elipse**. Važi da je $a^2 - b^2 = c^2$, a jedan par žiža i direktrisa je dat sa $(c, 0)$ i $x_1'' = a^2/c$. S obzirom da je elipsa centralno simetrična vidimo da je drugi par dat sa $(-c, 0)$ i $x_1'' = -a^2/c$.

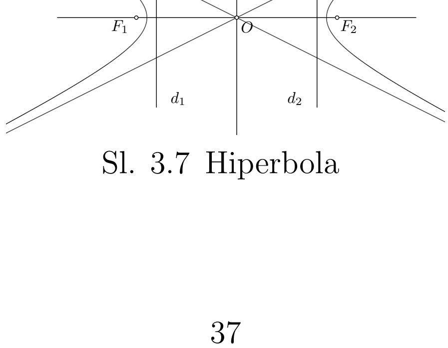


Sl. 3.6 Elipsa

Hiperbola. Neka je $e > 1$, odnosno neka je kriva hiperbola, a $\varepsilon = -1$. Tada je njena **kanonska jednačina** data sa

$$\frac{x_1''^2}{a^2} - \frac{x_2''^2}{b^2} = 1,$$

a žiže su $F_{1,2}(\pm c, 0)$, dok su njima odgovarajuće direktrise date jednačinama $x_1'' = \pm\frac{a^2}{c}$.



Sl. 3.7 Hiperbola

Može se pokazati da su prave date jednačinama $\frac{x_1''}{a} \pm \frac{x_2''}{b} = 0$ asimptote hiperbole.
Parabola. Neka je sada $e = 1$. Tada jednačina (12) postaje

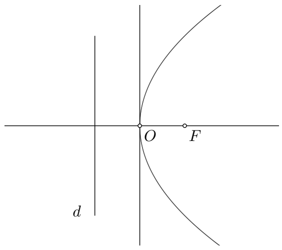
$$x_2'^2 - 2(f_1' + m)x_1' - 2f_2'x_2' + (f_1'^2 + f_2'^2 - m^2) = 0.$$

Translacijom $(x_1'', x_2'') = \tau(x_1', x_2') = (x_1' - \frac{f_1'-m}{2}, x_2' - f_2')$ kriva se slika u

$$x_2''^2 - 2(f_1' + m)x_1' = 0.$$

Ako označimo $p = f_1' + m$ sledi da je **kanonska jednačina parabole**

$$x_2'' = 2px_1''.$$



Sl. 3.8 Parabola

Pri tom su slike žižu i direktrise, redom $(p/2, 0)$ i $x_1'' + p/2 = 0$. Vidimo da je parabola osno-simetrična u odnosu na x_1'' osu.

Primedba 3.5 Matricu rotacije (11) možemo označiti sa Q. Formule te rotacije su onda date sa $X = QX'$. Tada se jednačina (10) transformiše u $X''^tQAQX' + X''^tQB + C = 0$, pa je kvadratni deo jednačine krive dat matricom Q^tAQ koja je pri tom dijagonalna, a elementi dijagonale su sopstvene vrednosti matrice A. Kako je matrica A simetrična, ona ima dve realne sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2}$, pa je $\lambda_1\lambda_2 = \det A$. Dalje translacije ne menjaju ovu matricu. Zato je nedegenerisani konusni presek elipsa ili krug ukoliko matrica A ima sopstvene vrednosti istog znaka, tj. $\det A > 0$, hiperbola ukoliko su različitog znaka, tj. $\det A < 0$ i parabola ukoliko je jedna sopstvena vrednost 0, tj. $\det A$=0. $\diamond$

Primedba 3.6 Naglasimo da jedna konika ima tačno jedan kanonski oblik. Odgovarajuća izometrija slika ose (centar) konike u koordinatne ose (koordinatni pocetak). Pri tom se žiže i direktrise polazne konike slikaju u žizh e i direktrise slike, a tačke tih osa koje pripadaju konici na jedinstven način određ1uju parametre a, b, p. $\diamond$

Teorema 15 *Dve nedegenerisane konike međusobno su izometrične ako i samo ako imaju isti kanonski oblik.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ izometrije kojima se konike Γ_1 i Γ_2 slikaju u svoje kanonske oblike. Ako su ti oblici isti, onda je $\mathcal{I}_2^{-1} \circ \mathcal{I}_1$ izometrija koja slika Γ_1 u Γ_2.

Obratno, ako postoji izometrija $\mathcal{J}$ kojom se Γ_1 slika u Γ_2, tada je $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{J}$ izometrija kojom se Γ_1 slika u koniku kanonskog oblika pa je $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{J} = \mathcal{I}_1$. $\square$

Važi i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 6
a) Postoji sličnost koja preslikava jednu elipsu (hiperbolu) u drugu ako i samo ako imaju isti ekscentricitet.
b) Svake dve parabole su slične.

Dokaz.
a) Ako su dve konike $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ slične tada imaju i isti odnos rastojanja svojih tačaka od žiže i direktrise, a samim tim i isti ekscentricitet.

Obratno, neka imaju isti ekscentricitet. Tada su, između ostalog i istog tipa (ili su obe elipse ili obe hiperbole ili obe parabole). Neka su, u prva dva slučaja, njima izometrične konike sa kanonskim jednačinama date sa $\mathcal{K}'_i : \frac{x_1^2}{a_i^2} \pm \frac{x_2^2}{b_i^2} = 1, i = 1, 2$. S obzirom da imaju iste ekscentricitete, važi i da je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Tada homotetija $\mathcal{H}_{0,a_2/a_1}$ slika $\mathcal{K}'_2$ u $\mathcal{K}'_1$, te su one slične, a samim tim i $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$.
Ukoliko su konike parabole $\mathcal{K}'_i : x_2^2 = 2p_i x_1, i = 1, 2$, direktno sledi da homotetija $\mathcal{H}_{0,p_2/p_1}$ slika $\mathcal{K}'_2$ u $\mathcal{K}'_1$. b) Ova tačka je direktna posledica prethodne u slučaju $e = 1$. $\square$

4 Afina geometrija

4.1 Afini prostor

Definicija 4.1 Neka je V n-dimenzioni, vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathcal{A}$ skup, čije elemente nazivamo **tačkama**. Neka je, dalje, $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ preslikavanje za koje važi:

1) $A + 0 = A$, za svaku tačku $A \in \mathcal{A}$;
2) $(A + u) + v = A + (u + v)$, za svaku tačku $A \in \mathcal{A}$ i proizvoljne $u, v \in V$;
3) za proizvoljne dve tačke $A, B \in \mathcal{A}$ postoji tačno jedan vektor $u \in V$, takav da je $A + u = B$.

Tada uređenu trojku $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ nazivamo n-dimenzionim **afinim prostorom**. Vektor u, takav da je $A + u = B$ označavamo još $u = \overrightarrow{AB}$. Vektorski prostor V nazivamo **direktrisom** prostora $\mathcal{A}$.

Neka je dalje $O \in \mathcal{A}$ proizvoljna tačka, i $e = (e_1, \ldots, e_n)$ jedna baza vektorskog prostora V. Ako je $X \in \mathcal{A}$ proizvoljna tačka, tada postoje jedinstveni $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\overrightarrow{OX} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Tada su $(x_1, \ldots, x_n)$ koordinate vektora $\overrightarrow{OX}$ u bazi e i identifikujemo ih.

Definicija 4.2 Uređeni par (O, e) nazivamo **afinim reperom**, a n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ **koordinatama** tačke X u reperu Oe.

Ako su $[A], [B], [u]$ koordinate tačaka A i B u datom reperu i vektora u u datoj bazi, onda je $[u] = [B] - [A]$.

Neka je (O', f) neki drugi reper afinog prostora. Neka je M matrica prelaska sa baze e na bazu f direktrise V, tj. neka je $f = Ae$ i označimo sa $[O']$ i kolonu koordinata te tačke u reperu (O, e). Ako su $[X]$ i $[X']$ kolone koordinata proizvoljne tačke X u reperima (O, e) i (O, f), tada je $\overrightarrow{OX} = [X]^te, \overrightarrow{O'X} = [X']^tf$. Zato je

$$[X]^te = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = [O']^te + [X']^tf = ([O']^t + [X']^tM)e,$$

te su formule promene koordinata date na sledeći način

$$X = M^tX' + O'.$$

Afini potprostor. Ako je $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ i pri tom, postoji vektorski potprostor $U \subset V$ takav da preslikavanje $+$ slika $\mathcal{P} \times U$ na $\mathcal{P}$, onda je $(\mathcal{P}, U, +)$ **afini potprostor** prostora $\mathcal{A}$. Pri tom je $(\mathcal{P}, U, +)$, po definiciji, afini prostor dimenzije $\dim U$. Ako je $P \in \mathcal{P}$ proizvoljna tačka označavamo ovaj potprostor i sa $P + U$.

Primer 4.1 Uočimo da su euklidska prava, ravan i prostor, ujedno i realni afini prostori dimenzija $1, 2$ i 3. Pri tom su standardne koordinate zapravo afine koordinate u odnosu na reper Oe, gde je O koordinatni početak, a baza e ortonormirana baza $\overrightarrow{i}, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}), (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Prava p u euklidskoj ravni ili prostoru $\mathbb{R}^n, n = 1, 2$ je afini potprostor dimenzije 1. Ako je P proizvoljna tačka te prave i v vektor koji je određuje, možemo pisati da je $p = P + \mathcal{L}\{v\}$.
Ravan π u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ je afini potprostor dimenzije 2. Ako je $P \in \pi$ i ako su v_1, v_2 dva nekolinerna vektora te ravni onda je $\pi = P + \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$. $\diamond$

Definicija 4.3 Neka je $\mathcal{A}$ n-dimenzioni afini prostor i $\mathcal{P}$ njegov potprostor dimenzije $(n-1)$. Tada je $\mathcal{P}$ **hiperravan** prostora $\mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{P} = P + \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ i Oe dati reper prostora $\mathcal{A}$ u kome tačka P ima koordinate $(p_1, \ldots, p_n)$. Tada je i $v_i = \sum_j \alpha_j^i e_j$ za neke $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$. Tačka X sa koordinatama $(x_1, \ldots, x_n)$ pripada toj ravni ako i samo ako $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, odnosno ako je determinanta

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & \ldots & x_n - p_n \\ v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \ldots & v_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

jednaka nuli. Zato je hiperravan opisana linearnom jednačinom

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0. \tag{13}$$

Obrnuto, ako koordinate tačaka P i X zadovoljavaju jednačinu (13), koordinate vektora $\overrightarrow{PX}$ zadovoljavaju homogenu jednačinu $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, te $\overrightarrow{PX} \in U$, gde je U $(n-1)$-dimenzioni vektorski prostor rešenja ove homogene jednačine.

Afine transformacije. Neka je $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ realni afini prostor. Neka je $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bijektivno preslikavanje takvo da za $B = A + u$ i $D = C + u$ važi $\sigma(B) - \sigma(A) = \sigma(D) - \sigma(C)$. Tada preslikavanje σ indukuje preslikavanje $\overline{\sigma} : V \to V$ dato sa

$$\overline{\sigma} = \sigma(B) - \sigma(A).$$

Ako je preslikavanje $\overline{\sigma}$ linearno, onda je σ **afina transformacija** prostora $\mathcal{A}$, a $\overline{\sigma}$ njen **linearni deo**.

Primer 4.2 Uočimo da su sve sličnosti (dakle i izometrije) prostora $\mathbb{R}^n$ njegove afine transformacije. $\diamond$

Tvrđenje 7 *Neka je σ afina transformacija prostora $\mathcal{A}$. Tada je $\overline{\sigma}$ automorfizam vektorskog prostora V.*

Dokaz. S obzirom da je $\overline{\sigma} : V \to V$ linearno preslikavanje, da bi bio automorfizam dovoljno je pokazati da je injektivno. Ako postoji $v \neq 0$ vektor takav da je $\overline{\sigma}(v) = 0$, tada za proizvoljni par tačaka A, B takav da je $A + v = B$ važi $\sigma(A) = \sigma(B)$, te tada σ nije bijekcija. $\square$

Nađimo koordinatni zapis formula jedne afine transformacije. Neka je O koordinatni početak, i neka je X proizvoljna tačka, a $\sigma(X) = X'$. Označavaćemo kolonu koordinata proizvoljne tačke istom oznakom kao i tačku.

Tada je $\overline{\sigma}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{O'X'}$, pa postoji kvadratna matrica A takva da je $X' - O' = A(X - O)$, te je

$$X' = AX + O'.$$

Pri tom, kako je $\overline{\sigma}$ bijektivno preslikavanje, matrica A je nedegenerisana, odnosno $\det A \neq 0$. Vidimo da formule afine transformacije imaju isti oblik kao formule promene koordinata prilikom promene afinog repera.

Neka su $\sigma_i : X' = A_i X + B_i, i = 1, 2$ dve afine transformacije jednog prostora. Tada njihova kompozicija $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ima formule

$$X' = A_2 A_1 X + (A_2 B_1 + B_2),$$

a kako je $\det A_2 A_1 = \det A_2 \det A_1 \neq 0$, ponovo predstavlja jednu afinu transformaciju. Odavde sledi i da je $\sigma : X' = A^{-1} X + (-A^{-1} B_1)$ afina transformacija inverzna transformaciji σ_1. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 8 *Skup afinih transformacija prostora $\mathcal{A}$ je grupa u odnosu na kompoziciju transformacija.*

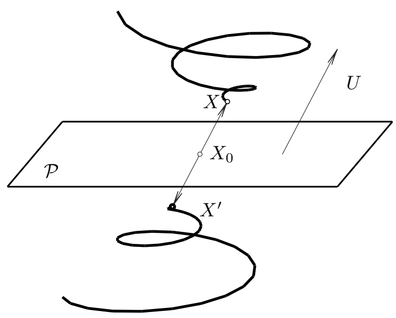
Definicija 4.4 Grupu afinih transformacija afinog prostora $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

Primedba 4.3 Uočimo da su grupe izometrija euklidske ravni $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ i sličnosti $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n)$ podgrupe grupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Tvrđenje 9 *Afina transformacija σ:*
a) slika kolinearne tačke u kolinearne. Pri tom, čuva razmeru duži njima određenih.
b) slika afini potprostor u afini potprostor iste dimenzije.
c) slika paralelne afine potprostore u paralelne afine potprostore.

Dokaz. Neka su A, B, C tri razne kolinearne tačke i A_1, B_1, C_1 njihove slike u transformaciji σ. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takvo da je $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Pri tom je $\overline{\sigma}(\overrightarrow{AC}) = \lambda \overline{\sigma}(\overrightarrow{AB})$, odnosno $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$. Zato su A_1, B_1 i C_1 kolinearne i pri tom je razmera duži njima određenih ista. Tvrđenja pod b) i c) sada direktno slede. $\square$

Primer 4.4 Neka je $\mathcal{P} = P + W$ potprostor afinog prostora $\mathcal{A}$ sa direktrisom V. Neka je U vektorski potprostor prostora V, takav da je $W \oplus U = V$. Posmatrajmo preslikavanje σ čije su invarijantne tačke tačke potprostora $\mathcal{P}$, pa time i $\overline{\sigma}(w) = w$, za $w \in W$. Neka je pri tom, $\overline{\sigma}(u) = -u$, za $u \in U$.



Sl. 4.1 Afina simetrija

Ako je $w_1, \ldots, w_k$ jedna baza prostora W i $u_1, \ldots, u_l$ baza prostora U tada u bazi $w_1, \ldots, u_l$ preslikavanje $\overline{\sigma}$ ima matricu

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_l \end{bmatrix}, \tag{14}$$

te je u pitanju afina transformacija. Nazivamo je **afinom simetrijom** u odnosu na potprostor $\mathcal{P}$ paralelno U (ili **refleksijom** za $k = n - 1$) i označavamo $\mathrm{S}_{\mathcal{P},U}$. U slučaju euklidskog prostora, kada su prosotri W i U ortogonalni ova transformacija je euklidska simetrija u odnosu na $\mathcal{P}$. Očigledno je i da ukoliko neka transformacija σ ima bar jednu invarijantnu tačku i u nekoj bazi matricu (14), onda je σ afina simetrija. $\diamond$

Kao i u sličaju izometrija, sopstvene vrednosti i postojanje invarijantnih tačaka su neophodne informacije za klasifikovanje afinih transformacija. Neka je $X' = AX + B$. Matrica A ima n sopstvenih vrednosti nad poljem kompleksnih brojeva. Pri tom, ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ sopstvena vrednost tada je to i $\overline{\lambda}$. Za razliku od ortogonalnih matrica, ipak nije nužno i da postoji baza prostora sastavljena od sopstvenih vektora. Ipak, postoji baza u kojoj je matrica preslikavanja data u **Žordanovoj normalnoj formi**

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_l \end{bmatrix} \quad \text{gde su } J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ & & \ddots & 1 \\ & & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

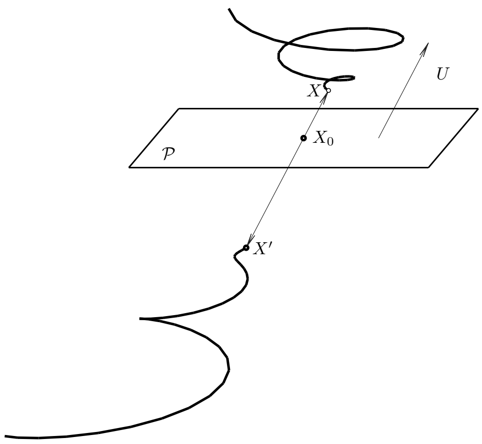
Žordanovi blokovi. Označavaćemo sa $V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ dekompoziciju prostora V gde je V_k prostor koji odgovara Žordanovim blokovima za vrednost λ_k.

Primer 4.5 Odredimo afine transformacije σ prostora $\mathcal{A}$ čije su invarijantne tačke, tačke jedne hiperravni $\mathcal{P} = P + W$. Ako su $w_1, \dots, w_{n-1}$ vektori baze prostora W, važi da je $\overline{\sigma}(w_i) = w_i$. Zato matrica preslikavanja ima sopstvenu vrednost $\lambda_1 = 1$ stepena bar $(n-1)$ i bar $(n-1)$ nezavisnih sopstvenih vektora za tu vrednost. Preostala sopstvena vrednost λ_2 mora biti realna.

Pretpostavimo prvo da je $\lambda_2 \neq 1$. Tada postoji i sopstveni vektor u te vrednosti. U bazi $w_1, \dots, w_{n-1}, u$ matrica preslikavanja ima oblik

$$\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Ovakvu transformaciju nazivamo **dilatacijom prostora** sa osnovom $\mathcal{P}$, paralelno u i koeficijentom λ_2 i označavamo sa $\mathcal{D}_{\mathcal{P},u,\lambda_2}$. Neka je X tačka prostora koja ne pripada hiperravni $\mathcal{P}$, i $s = X + \mathcal{L}\{u\}$ prava. Prava s prodore hiperravan u tački X_0 i pri tom je $\overrightarrow{X_0X}$ kolinearan sa u, te se slika u $\lambda_2\overrightarrow{X_0X} = \overrightarrow{X_0X'}$. Primetimo da je za $\lambda_2 = -1$ ova transformacija refleksija u odnosu na hiperravan $\mathcal{P}$ paralelno vektoru u.

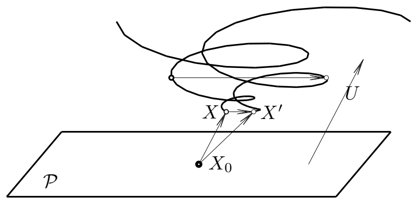


Sl. 4.2 Dilatacija

Pretpostavimo sada da je $\lambda_2 = 1$. Ukoliko postoji baza prostora sastavljena od sopstvenih vektora matrica preslikavanja $A = E$, a kako postoje i invarijantne tačke u pitanju je koincidencija ε. Pretpostavimo stoga, da $\sigma \neq \varepsilon$. Tada postoji baza prostora, označimo je $w_1, \ldots, w_n$ u kojoj je matrica preslikavanja ima Žordanovu formu

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori $w_1, \ldots, w_{n-1}$ razapinju ravan $\mathcal{P}$. Neka je X proizvoljna tačka koja ne pripada hiperravni $\mathcal{P}$, i X' njena slika. Neka je $s = X + \mathcal{L}\{w_n\}$. Prava s prodore hiperravan $\mathcal{P}$ u invarijantnoj tački X_0. Pri tom je vektor $\overrightarrow{X_0X} = k \cdot w_n$ te se slika u $k \cdot w_{n-1} + k \cdot w_n = \overrightarrow{X_0X'}$. Zato je $\overrightarrow{XX'} = k \cdot w_{n-1}$. Ovu transformaciju nazivamo **transvekcijom** prostora sa osnovom $\mathcal{P}$ u pravcu vektora w_{n-1}.



Sl. 4.3 Transvekcija

Transvekcija je na jedinstven način određena ako je pri tom, poznat vektor w_n. Označavamo je sa $\mathcal{T}_{\mathcal{P}, w_{n-1}, w_n}$. Ako umesto vektora w_{n-1} posmatramo neki drugi vektor sa njim paralelan, matrica transvekcije u toj bazi je data sa

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

Dakle, jedine neidentičke transformacije afinog prostora čiji je skup invarijantnih tačaka jedna hiperravan su dilatacije i transvekcije.

Neka je afina transformacija data formulom $\sigma : X' = AX + B$. Setimo se da ukoliko $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost matrice A, tada σ ima tačno jednu invarijantnu tačku. Ako je $\lambda = 1$ sopstvena vrednost, tada je $V_1 \oplus V_k$ dekompozicija prostora V, gde je V_1 potprostor koji odgovara Žordanovim blokovima za $\lambda = 1$. Slično kao i u slučaju izometrija, afina transformacija bez invarijantnih tačka može se predstaviti kao kompozicija translacije i afine transformacije koja ima bar jednu invarijantnu tačku, videti i Teoremu 5.

Teorema 16 *Neka afina transformacija $\sigma : X' = AX + B$ nema invarijantnih tačaka. Tada postoji afina transformacija ω sa bar jednom invarijantnom tačkom i translacija τ_v takvi da je $\sigma = \tau_v \circ \omega$ i $v \in V_1$. Pri tom, A je ujedno i matrica preslikavanja ω.*

Dokaz. Ako označimo $V_1 = W$ i $V_2 \oplus \cdots \oplus V_k = W'$ dokaz je analogan dokazu Teoreme 5. $\square$

Afine transformacije pravih. Afina transformacija prave data je jednačinom $x' = ax + b, a \neq 0$. Sledeća teorema direktno sledi, videti i dokaz Teoreme 6.

Teorema 17 *Neka su A, B i A_1, B_1 dva para raznih tačaka jedne prave. Tada postoji jedinstvena afina transormacija σ te prave takva da je $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$.*

Pretpostavimo prvo da je $a = 1$. Tada je transformacija izometrija i to **koincidencija** ε za $b = 0$, odnosno **translacija** τ_b za $b \neq 0$.

Neka je sada $a \neq 1$. Tada transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku S. Pri tom ona ima koordinatu $S = \frac{b}{1-a}$ te je transformacija data sa $x' = ax + (1-a)S$ i u pitanju je homotetija $H_{S,a}$. Pri tom, uočimo da je homotetija $H_{S,a}$ prave ujedno i dilatacija prave sa osnovom S i koeficijentom a, paralelno vektoru prave.

afina transformacija	inv. tačke	sopst. vredn.
ε	sve	1
τ_v	$\emptyset$	1
$\mathcal{H}_{S,a} = \mathcal{D}_{S,a}$	S	$a \neq 1$

Tab. 4.1 Afine transformacije prave

Setimo se i da je $\tau_{2\overrightarrow{AB}} = S_B \circ S_A$, gde je $S_A = \mathcal{H}_{S,-1} = \mathcal{D}_{S,-1}$ centralna refleksija. Zato direktno važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 10 *Svaka afina transformacija prave može se predstaviti kao kompozicija ne više od dve dilatacije od kojih najviše jedna nije i refleksija.*

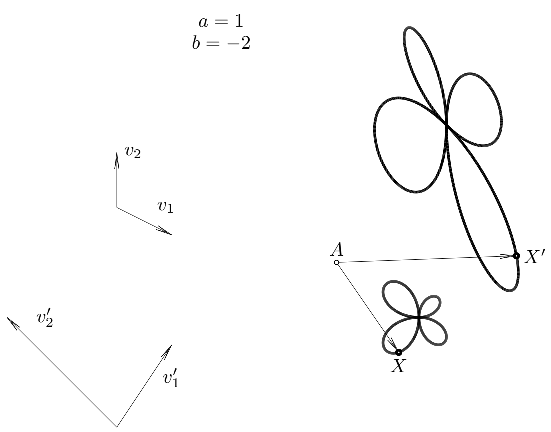
Afine transformacije ravni. Neka je data afina transformacija ravni $\sigma : X' = AX + B$, gde je A kvadratna matrica. Važi sledeće tvrđenje, videti i dokaz Tvrđenja 8.

Tvrđenje 11 *Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 dve trojke nekolinearnih tačaka jedne ravni. Tada postoji jedinstvena afina transformacija σ te ravni takva da je $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$, $\sigma(C) = C_1$.*

Neka su λ_1 i λ_2 sopstvene vrednosti matrice A. One mogu biti ili obe realne ili konjugovano kompleksne.

1. Pretpostavimo da su $\lambda_{1,2} = a + \imath b$ konjugovano kompleksni brojevi, $b \neq 0$. Tada $\lambda = 1$ nije sopstvena vrednost i transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku S. Pri tom, ako je $A(v_1 + \imath v_2) = (a + \imath b)(v_1 + \imath v_2)$, a samim tim i $A(v_1 - \vec{\imath}\, v_2) = (a - \imath b)(v_1 - \imath v_2)$, važi da je

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= av_1 - bv_2, \\
Av_2 &= bv_1 + av_2.
\end{aligned}
$$



Sl. 4.4 Uopštena rotacija

Kako su sopstveni konjugovano kompleksni sopstveni vektori za vrednosti λ_1 i λ_2 nezavisni, linearno su nezavisni i v_1, v_2. U bazi (v_1, v_2) matrica preslikavanja data sa

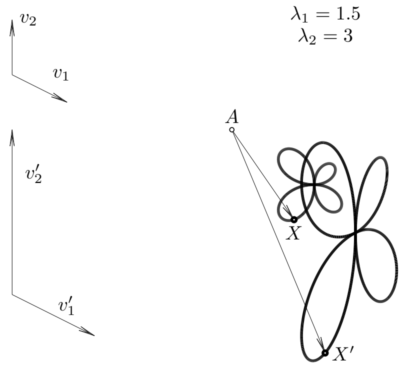
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Ovo preslikavanje je **uopštena rotacija** $\mathcal{R}_S$. Ako su vektori v_1 i v_2 ortogonalni i jedinični, uopštena rotacija je kompozicija homotetije $H_{S,\sqrt{a^2+b^2}}$ i euklidske rotacije oko tačke S.

2. Nadalje, neka su $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tada postoji baza ravni sastavljena od sopstvenih vektora u kojoj je matrica preslikavanja data sa

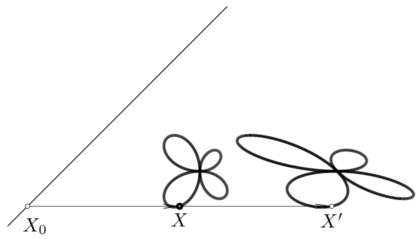
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ukoliko $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ afina transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku S. Ovu transformaciju nazivamo **uopštenom homotetijom** i označavamo $\mathcal{H}_{S,\lambda_1,\lambda_2}$.



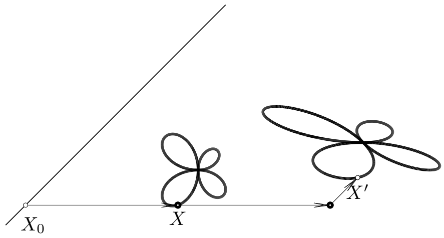
Sl. 4.5 Uopštena homotetija

   (b) Neka je $\lambda_1 = 1$. Ako transformacija ima bar jednu invarijantnu tačku S i ako su v_1, v_2 sopstveni vektori za $\lambda_1 = 1$ i λ_2, sve tačke prave $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$ su invarijantne, a afina transformacija je **dilatacija** $\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$ sa osnovom p, paralelno vektoru v_2 sa koeficijentom λ_2.



Sl. 4.6 Dilatacija

Ako transformacija nema invarijantnih tačaka, onda postoji vektor v kolinearan vektoru v_1 i dilatacija $\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$, gde je p prava paralelna vektoru v_1 takvi da je $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$. Transformaciju možemo nazvati **klizajućom dilatacijom**.



Sl. 4.7 Klizajuća dilatacija

3. Pretpostavimo sada da je $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tada postoji baza u kojoj je matrica preslikavanja data sa

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ ili } A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

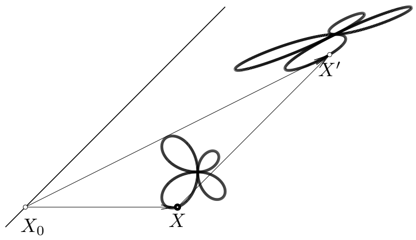
   (a) Neka je matrica data sa A_1. Tada, ako je $\lambda_1 \neq 1$ transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku S i pri tom se prouzvoljni vektor v slika u $\lambda_1 v$. Zato je transformacija **homotetija** $\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$.

   Ako je $\lambda_1 = 1$ transformacija je ili **koincidencija** ε kada ima bar jednu invarijantnu tačku ili **translacija** τ_v kada ih nema.

   (b) Neka je konačno matrica transformacije data sa A_2.

      i. Ako je $\lambda_1 \neq 1$ afina transformacija ima tačno jednu invarijantnu tačku S. Neka je v_1 sopstveni vektor za λ_1. Ako je $\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$ homotetija sa centrom u S, a $\mathcal{T}_{p,v_1}$ transvekcija, gde je $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$, tada direktno dobijamo da je $\sigma = \mathcal{H}_{S,\lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$.

      ii. Ako je $\lambda_1 = 1$ i postoji bar jedna invarijantna tačka transformacije, onda je transformacija **transvekcija** $\mathcal{T}_{p,v_1}$ gde je v_1 sopstveni vektor za λ_1 i $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$.



Sl. 4.8 Transvekcija

      iii. Ako je $\lambda_1 = 1$ i σ nema invarijantnih tačaka, tada je $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$, gde je v proizvoljni vektor.

Može se pokazati i da važi sledeća teorema, u analogiji sa odgovarajućom teoremom o izometrijama ravni.

Teorema 18 *Svaka afina transformacija ravni može se predstaviti kao kompozicija ne više od tri dilatacije ravni, među kojima najviše jedna nije i afina refleksija.*

af. tran.	inv. tačke	sops. vrednosti	baza od sops. vekt.
ε	sve	$\lambda_{1,2} = 1$	DA
τ_v	$\emptyset$	$\lambda_{1,2} = 1$	DA
$\mathcal{T}_{p,v_1}$	$P \in p$	$\lambda_{1,2} = 1$	NE
$\tau_v \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	$\emptyset$	$\lambda_{1,2} = 1$	NE
$\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	$P \in p$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	DA
$\tau_v \circ \mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	$\emptyset$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	DA
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1,\lambda_2}$	S	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \neq 1$	DA
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$	S	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	DA
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	S (važi $S \in p$)	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	NE
$\mathcal{R}_S$	S	$\lambda_{1,2} = a \pm \imath b$	NE

Tab. 4.2 Afine transformacije ravni

4.2 Konike u afinoj ravni

Videli smo da su euklidska prava, ravan i prostor ujedno i afini realni prostori dimenzija 1, 2 i 3. Time su i konike euklidske ravni ujedno i objekti u afinoj ravni, te je interesantno pitanje kako ih transformiše grupa afinih transformacija $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}^2)$. Setimo se da je konika, ujedno kriva drugog reda, opisana kvadratnom jednačinom

$$X^t AX + BX + C = 0, \text{ gde je } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Neka je σ afina transformacija ravni. Njen inverz σ^{-1} je dat formulama $X = QX' + D$. Tada se kriva drugog reda preslikava u skup tačaka dat jednačinom

$$\begin{aligned} 0 &= (X'^t Q^t + D)A(QX' + D) + B(QX' + D) + C \\ &= X'^t Q^t AQX' + B_1 X' + C_1. \end{aligned}$$

Dakle, kriva drugog reda se preslikava u krivu drugog reda. Pri tom, ako je kriva $\mathcal{K}$ degenerisana, npr. skup tačaka dve prave koje se seku, s obzirom da afine transformacije slikaju kolinearne tačke u kolinearne, kriva $\mathcal{K}$ se slika u degenerisanu krivu drugog reda istog tipa. Samim tim se i konike slikaju u konike. Pri tom, setimo se da je tip konike određen znakom $\det A$. Slika konike ima ima matricu $A_1 = Q^t AQ$ koja odgovara kvadratnom delu jednačine. Tada je

$$\det A_1 = \det Q^t \det A \det Q = \det A(\det Q)^2,$$

te su $\det A_1$ i $\det A$ istog znaka. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 12 *Afina transformacija ravni slika elipse, parabole i hiperbole, redom u elipse, parabole i hiperbole.*

Dakle, dve konike različitog tipa nisu afino ekvivalentne.

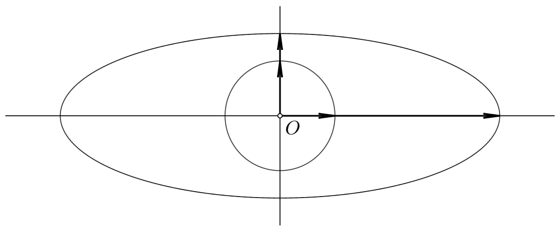
Teorema 19 *Svake dve elipse (parabole, odnosno hiperbole) su afino ekvivalentne.*

Dokaz. S obzirom da su svake dve parabole slične direktno sledi i da su afino ekvivalentne.

Pokažimo da je svaka elipsa $\mathcal{K}$ afino ekvivalentna jediničnom krugu. S obzirom da je $\mathcal{K}$ izometrična elipsi $\mathcal{K}'$ sa kanonskom jednačinom $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, dovoljno je naći afino preslikavanje koje elpisu $\mathcal{K}'$ slika u krug $k : x_1^2 + x_2^2 = 1$. Uopštena homotetija $\mathcal{H}_{O,1/a,1/b}$, po pravcima redom, x_1 i x_2-ose ima formule

$$\mathcal{H}_{O,1/a,1/b} : \ x_1' = \frac{x_1}{a}, \quad x_2' = \frac{x_2}{b}$$

i preslikava $\mathcal{K}'$ u k.

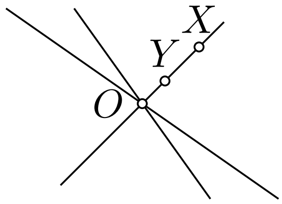


Sl. 4.9 Elipsa je afino ekvivalentna krugu

Slično, ista homotetija preslikava hiperbolu datu jednačinom $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ u hiperbolu $x_1^2 - x_2^2 = 1$, pa možemo zaključiti i da su svake dve hiperbole afino ekvivalentne. $\square$

5 Projektivna geometrija

Neka je O tačka afinog prostora $\mathbb{R}^{n+1}$. Posmatrajmo koordinatni sistem u $\mathbb{R}^{n+1}$ u kom je tačka O koordinatni početak. Neka je p proizvoljna prava koja sadrži tačku O. Ako su X i Y dve tačke te prave različite od O tada su vektori $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY}$ kolinearni. Zato, ako su $(x_1, \dots, x_{n+1})$ i $(y_1, \dots, y_{n+1})$, redom, afine koordinate tačaka X i Y onda postoji $\lambda \in R$, različito od nule, takvo da je $\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$. Pri tom, bar jedna koordinata tačke X (odnosno tačke Y) je različita od nule, a prava p je jednoznačno određena jednom svojom tačkom različitom od O.



Sl. 5.1 $\overrightarrow{OY} = \lambda\overrightarrow{OX}$

Definicija 5.1 Neka je $\sim$ relacija na skupu $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ data na sledeći način. Neka je $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1})$ ako postoji $\lambda \in R, \lambda \neq 0$, takvo da je

$$\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije. Količnički skup $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ nazivamo **realnim projektivnim prostorom** dimenzije n i označavamo $\mathbb{R}P^n$.

Elementi projektivnog prostora su klase ekvivalencije $(n+1)$-torki $(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ i nazivamo ih **tačkama**. S obzirom da su $(n+1)$-torke iz jedne klase međusobno srazmerne, tački projektivnog prostora pridružujemo $(n+1)$-torku $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ i nazivamo je **homogenim koordinatama** date tačke. Uočili smo da sve $(n+1)$-torke $(x_1, \dots, x_{n+1})$ iz iste klase ekvivalencije pripadaju istoj afinoj pravoj kroz O. Zato i projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ možemo smatrati i skupom svih pravih u $\mathbb{R}^{n+1}$ koje sadrže tačku O. Ako je $X(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ tačka projektivnog prostora, možemo joj pridružiti i vektor odgovarajuće afine prave $\overrightarrow{X} = \lambda(x_1, \dots, x_{n+1})$, za neko fiksirano $\lambda \neq 0$.

U analogiji sa ovom konstrukcijom, neka je π proizvoljni afini potprostor dimenzije $(k+1)$ koji sadrži tačku O. Skup svih afinih pravih koje sadrže O i pripadaju π čine projektivni prostor dimenzije k koji je pri tom, podskup prostora $\mathbb{R}P^n$. Nazivamo ga k-dimezionim **projektivnim potprostorom** prostora $\mathbb{R}P^n$. Specijalno, ako je $k = 1$ taj potprostor nazivamo **projektivnom pravom**, a ako je $k = n - 1$, za takav potprostor kažemo da je **projektivna hiperravan** prostora $\mathbb{R}P^n$.

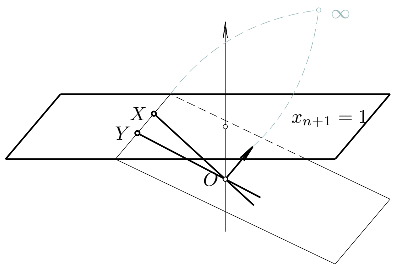
Definicija 5.2 Tačke $A_1(1 : 0 : \dots : 0)$, $A_2(0 : 1 : 0 : \dots : 0)$, $\dots$, $A_{n+1}(0 : \dots : 0 : 1)$ i $B(1 : 1 : \dots : 1)$ nazivamo **baznim tačkama**.

Definicija 5.3 Za nekih $k \leq n+1$ tačaka $M_1, \dots, M_k$ projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$ kažemo da su u **opštem položaju** ako su vektori $\overrightarrow{M_1}, \dots, \overrightarrow{M_k}$ linearno nezavisni.

Proširena afina ravan. Neka je $\mathbb{R}^n$ afina hiperravan u $\mathbb{R}^{n+1}$ koja ne sadrži tačku O. Postoji afini koordinatni sistem u $\mathbb{R}^{n+1}$ takav da data hiperravan ima jednačinu $x_{n+1} = 1$. Neka je, dalje, σ dvodimenziona afina ravan koja seče $\mathbb{R}^n$ po afinoj pravoj.

Neka su $A(x_1, \dots, x_n, 1)$ i $B(y_1, \dots, y_n, 1)$ dve tačke te prave. One odgovaraju projektivnim tačkama $(x_1 : \cdots : x_n : 1)$ i $(y_1 : \cdots : y_n : 1)$. Ako je $C(z_1, \dots, z_n, 1)$ još jedna tačka afine ravni $\mathbb{R}^n$, tada su A, B, C kolinerane ako i samo ako su vektori $(x_1, \dots, x_n, 1)$, $(y_1, \dots, y_n, 1)$ i $(z_1, \dots, z_n, 1)$ zavisni.

Ravan σ sadrži afinu pravu kroz O (odnosno projektivnu tačku) koja je u afinom smislu paralelna $\mathbb{R}^n$. Ta afina prava je određena ne-nula vektorom $(v_1, \dots, v_n, 0)$. Uočimo da su, pri tom, vektori $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, 0)$ i $(v_1, \dots, v_n, 0)$ kolinearni.



Sl. 5.2 Proširena afina ravan

Sada možemo dati još jednu interpretaciju projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$. Ako projektivna tačka $\widetilde{X}$ ima poslednju koordinatu različitu od nule, odnosno ako odgovarajuća afina prava seče afinu hiperravan $\mathbb{R}^n$ u nekoj tački X, tada toj projektivnoj tački $\widetilde{X}$ pridružujemo tačku X. Ako su $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ projektivne koordinate tačke $\widetilde{X}$, onda tačka X ima afine koordinate $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots : \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Ako afini potprostor dimenzije $(k+1)$, koji određuje k-dimenzioni projektivni potprostor $\widetilde{\pi}$, seče $\mathbb{R}^n$ po afinom potprostoru π onda k-dimenzionom projektivnom potprostoru $\widetilde{\pi}$ pridružujemo π. Pri tom važi da je $\widetilde{X} \in \widetilde{\pi}$ ako i samo ako je $X \in \pi$.

Ako projektivna tačka za svoju poslednju homogenu koordinatu ima 0, odnosno, ako je odgovarajuća prava određena vektorom $(v_1, \dots, v_n, 0)$ tada ona ne seče hiperravan $\mathbb{R}^{n+1}$. Zato moramo formalno dopuniti $\mathbb{R}^n$ tačkama koje odgovaraju projektivnim tačkama $(v_1 : \cdots : v_n : 0)$ i koje ćemo zvati **beskonačno dalekim**. Pri tom, projektivna tačka $(v_1 : \cdots : v_n : 0)$, odnosno odgovarajuća afina prava kroz O, pripada svim afinim ravnima σ čija direktrisa sadrži vektor $(v_1, \dots, v_n, 0)$. Sve ove ravni seku $\mathbb{R}^n$ po paralelnim pravama. Dakle, dve (afino) paralelne prave u $\mathbb{R}^n$ imaju zajedničku beskonačno daleku tačku. Sve beskonačno daleke tačke pripadaju afinoj hiperavni $\widetilde{\alpha} : x_{n+1} = 0$, koja je afino paralelna $\mathbb{R}^n$. Zato, u projektivnom smislu, sve beskonačno daleke tačke pripadaju jednoj projektivnoj hiperravni α, određenoj sa $\widetilde{\alpha}$, koju nazivamo **beskonačno dalekom**.

Sada možemo reći i da je $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \alpha$. Pri tom, ako su $(x_1, \dots, x_n)$ afine koordinate tačke iz $\mathbb{R}^n$ onda su njene projektivne $(x_1 : \cdots : x_n : 1)$. Beskonačno daleke tačke imaju poslednju homogenu koordinatu 0. Pri tom su tačke $(x_1 : \cdots : x_n : 1)$, $(y_1 : \cdots : y_n : 1)$ i $(v_1 : \cdots : v_n : 0)$ kolinearne ako i samo ako su vektori $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, 0)$ i $(v_1, \dots, v_n, 0)$ srazmerni.

Primedba 5.1 Primetimo da pojam beskonačno dalekih tačaka zavisi od izbora hiperravni koja ne sadrži tačku O. Sa projektivnog stanovišta "konačne" i beskonačno daleke tačke se ne razlikuju. ◇

Promena projektivnih koordinata. Uočimo da neke od prethodnih definicija, recimo baznih tačaka, zavise od izbora afinog koordinatnog sistema, u kojem je data tačka O koordinatni početak, a data hiperravan $\mathbb{R}^n$ ima jednačinu $x_{n+1} = 1$. Jedna afina promena kordinata prostora $\mathbb{R}^{n+1}$ za koju je O invarijantna tačka data je formulama $X' = AX$, gde je A realna kvadratna matrica dimenzije $(n+1)$ i $\det A \neq 0$. Ova promena koordinata indukuje i promenu projektivnih koordinata tačaka. S obzirom da su homogene koordinate određene do na koeficijent srazmernosti λ dobijamo da je tada promena projektivnih koordinata prostora $\mathbb{R}P^n$ data sa

$$\lambda X' = AX, \quad \det A \neq 0.$$

Projektivne hiperravni. Projektivni potprostor prostora $\mathbb{R}P^n$ dimenzije $(n-1)$ je određen odgovarajućom afinom hiperravni π prostora $\mathbb{R}^{n+1}$ koja sadrži tačku O. Zato π ima afinu jednačinu $u_1x_1 + \dots u_{n+1}x_{n+1} = 0$. Tačka $X(x_1, \dots, x_{n+1})$ pripada toj hiperravni ako i samo ako vektor $\overrightarrow{OX} = (x_1, \dots, x_{n+1})$ pripada direktrisi te hiperravni, odnosno ako i samo ako tačka $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ pripada odgovarajućem projektivnom potprostoru. Zato je ujedno i jednačina projektivne hiperravni

$$u_1x_1 + \dots u_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

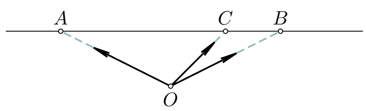
gde za bar jedno i važi da je $u_i \neq 0$. S obzirom da je sa $\lambda u_1x_1 + \dots \lambda u_{n+1}x_{n+1} = 0$ data ista hiperravan, možemo joj dodeliti homogene koordinate $u^t = [u_1 : \dots : u_{n+1}]$. Matrično jednačinu hiperravni zapisujemo $u^tX = 0$.

S obzirom da je svaka hiperravan predstavljena homogenom $(n+1)$-torkom, kao što je i svaka projektivna tačka to znači da i svako tvrđenje koje važi za tačke možemo preformulisati menjajući reč tačka rečju hiperravan, pripada rečju sadrži,... i dobiti ponovo tvrđenje projektivne geometrije. Ovaj princip nazivamo **principom dualnosti.**

Takođe i sledeće tvrđenje sledi direktno iz definiciije projektivnog potprostora.

Teorema 20 *Svake dve hiperravni se seku po projektivnom potprostoru dimenzije* $(n-2)$.

Dvorazmera. Neka su A i B dve projektivne tačke i p prava njima određena. Tada proizvoljna projektivna tačka C pripada pravoj p ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{C}$ linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$, odnosno, ako postoje α i β takvi da je $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$. Pri tom, važi da je $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Uočimo i da je $k\alpha\overrightarrow{A} + k\beta\overrightarrow{B}$ takođe vektor koji odgovara tački C, odnosno da su α i β određeni do na koeficijent srazmernosti. Ako je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$ tada je $B = C$ odnosno $A = C$. Ako $\alpha \neq 0$ onda za $k = \frac{1}{\alpha}$ dobijamo da je jedan od vektora kolinearnih sa $\overrightarrow{C}$ jednak $\overrightarrow{A} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{B}$.



Sl. 5.3 $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$

Ako su A, B, C konačne razne tačke, tada postoji $\lambda \in R$ takvo da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, pa važi da je $\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, te je

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}. \tag{15}$$

Neka su sada $C \neq D$ tačke prave p različite od A i B i neka je $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ i $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Tada je svaki od koeficijenata $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ različit od nule, a s obzirom da je $C \neq D$ važi i da je $\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{\delta}{\gamma}$.

Definicija 5.4 Broj $(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$ nazivamo **dvorazmerom** tačaka A, B, C, D.

Uočimo da definicija dvorazmere ne zavisi od izbora vektora $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$, odnosno, da se za vektore $k_1\overrightarrow{A}$, $k_2\overrightarrow{B}$, $k_3\overrightarrow{C}$, $k_4\overrightarrow{D}$, $k_1k_2k_3k_4 \neq 0$ dobija isti rezultat. Takođe, kako su tačke C i D različite sledi i da je $(A, B; C, D) \neq 1$.

Neka su A, B, C, D konačne tačke. Tada direktno sledi iz (15) da je

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}},$$

te vidimo i afini smisao dvorazmere.

Sledeća tvrđenja direktno slede iz definicije dvorazmere.

Tvrđenje 13 *Neka su A, B, C, D četiri razne, kolinearne tačke. Tada važi:*
a) $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$
b) $(A, B; C, D) = \frac{1}{(A,B;D,C)}$.

Tvrđenje 14 *Neka su A, B i C tri razne kolinearne tačke i $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0, -1$. Tada postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A, B; C, D) = \lambda$.*

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ tada je tačka D određ1ena sa $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \frac{\beta}{\alpha\lambda}\overrightarrow{B}$. □

Definicija 5.5 Četiri razne kolinearne tačke A, B, C i D su **harmonijski spregnute** ili **harmonijski konjugovane** ako je $(A, B; C, D) = -1$. Tada pišemo $H(A, B; C, D)$.

Neka su A, B, C, D razne kolinearne tačke. Tada postoje koeficijenti β i δ takvi da je

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}.$$

Tada je dvorazmera $(A, B; C, D) = \beta : \delta$. Zato su tačke A, B, C, D harmonijski spregnute ako i samo ako je $\beta + \delta = 0$.

Primer 5.2 Neka su date tačke $A(x_1 : 1)$ i $B(x_2 : 1)$ jedne projektivne prave, i neka je $C(\frac{x_1+x_2}{2} : 1)$ euklidsko središte duži AB. Pronađimo tačku D takvu da je $H(A, B; C, D)$. Važi da je $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$. Neka je $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Tada su tačke harmonijski spregnute ako i samo ako je $1 + \delta = 0$, odnosno $\delta = -1$. Dakle tačka D je određena vektorom $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (x_1 - x_2, 0)$, odnosno ima homogene koordinate $(x_1 - x_2 : 0) = (1 : 0)$, te je D beskonačno daleka tačka te prave. ◇

5.1 Projektivne transformacije

Definicija 5.6 Neka je u projektivnom prostoru $\mathbb{R}P^n$ dat sistem homogenih koordinata $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$. Preslikavanje σ koje je u datom koordinatnom sistemu dato formulama

$$\lambda X' = AX, \tag{16}$$

gde je A nedegenerisana, kvadratna matrica reda $(n+1)$ je **projektivna transformacija** prostora $\mathbb{R}P^n$.

S obzirom da tačke imaju homogene koordinate, kao i u slučaju formula promene tih koordinata, neophodno je uzeti u obzir da su kordinate AX srazmerne sa jednom $(n+1)$-torkom koordinata tačke X', otud i koeficijent λ u formulama. S obzirom da je $\det A \neq 0$ direktno sledi i da je σ bijektivno preslikavanje. Pri tom, dve proporcionalne matrice A i $kA, k \neq 0$ određuju isto projektivno preslikavanje.

Ukoliko je sa $\mu Y = QX$ data promena homogenih koordinata, tada je preslikavanje σ u drugim koordinatama dato sa $\nu Y' = QAQ^{-1}Y$, odnosno određeno je matricom QAQ^{-1}.

Primer 5.3 Projektivno preslikavanje određeno jediničnom matricom E je identičko. $\diamond$

Tvrđenje 15 *Skup svih projektivnih transformacija prostora $\mathbb{R}P^n$ je grupa u odnosu na kompoziciju funkcija.*

Dokaz. Jednostavno je proveriti da važe aksiome grupe. $\square$

Grupu projektivnih transformacija n-dimenzionog projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$ označavamo sa PGL_n.

Neka su a_{ij} koeficijenti matrice A. Tada je projektivna transformacija data sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(n+1)}x_{n+1},\\
\lambda x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2(n+1)}x_{n+1},\\
&\vdots\\
\lambda x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n(n+1)}x_{n+1},\\
\lambda x_{n+1}' &= a_{(n+1)1}x_1 + a_{(n+1)2}x_2 + \cdots + a_{(n+1)(n+1)}x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Možemo podeliti prvih n jednačina poslednjom. Ako označimo odgovarajuće afine koordinate $\mathrm{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ dobijamo formule datog preslikavanja u afinim koordinatama

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}_1' &= \frac{a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{1n}\mathrm{x}_n + a_{1(n+1)}}{a_{(n+1)1}\mathrm{x}_1 + a_{(n+1)2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\mathrm{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}},\\
\mathrm{x}_2' &= \frac{a_{21}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{2n}\mathrm{x}_n + a_{2(n+1)}}{a_{(n+1)1}\mathrm{x}_1 + a_{(n+1)2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\mathrm{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}},\\
&\vdots\\
\mathrm{x}_n' &= \frac{a_{n1}\mathrm{x}_1 + a_{n2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{nn}\mathrm{x}_n + a_{n(n+1)}}{a_{(n+1)1}\mathrm{x}_1 + a_{(n+1)2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\mathrm{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Primetimo da za $a_{(n+1)1} = a_{(n+1)2} = \cdots = a_{(n+1)n} = 0$ dobijamo formule afinog preslikavanja. Pri tom, tada je $a_{(n+1)(n+1)} \neq 0$, a s obzirom da srazmerne matrice određuju isto projektivno preslikavanje, možemo smatrati da je $a_{(n+1)(n+1)} = 1$, odnosno da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Tada je odgovarajuća afina transformacija $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \mapsto (\mathrm{x}_1', \ldots, \mathrm{x}_n')$ data formulama $X' = A_1X + B$. Pri tom, uočimo da se projektivnim preslikavanjem određenim matricom (17) beskonačno daleke tačke, gde je $x_{n+1} = 0$, slikaju u beskonačno daleke, $x_{n+1}' = 0$, odnosno da je beskonačno daleka hiperravan invarijantna u ovom preslikavanju. Važi i obrnuto: ako je bekonačno daleka hiperravan invarijantna za preslikavanje σ tada je odgovarajuća matrica preslikavanja srazmerna matrici (17), pa je i dato preslikavanje, u afinim koordinatama, afino.

Setimo se i da pojam beskonačno daleke hiperravni zavisi isključivo od odabranog sistema homogenih koordinata. U nekom drugom sistemu koordinata ista hiperravan je konačna, ali i dalje invarijantna za preslikavanje σ. Zato važi sledeća teorema.

Tvrđenje 16 *Grupa projektivnih transformacija projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$ kod kojih je data hiperravan invarijantna izomorfna je grupi afinih transformacija afinog prostora $\mathcal{A}^n$.*

Dakle, grupa $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ je podgrupa grupe PGL_n.

Teorema 21 *Postoji jedinstvena projektivna transformacija prostora $\mathbb{R}P^n$ koja slika bazne tačke u datih $(n+2)$ tačke od kojih su svakih $(n+1)$ tačaka u opštem položaju.*

Dokaz. Potražimo matricu A preslikavanja kojim se tačke $A_1, \ldots, A_{n+1}$, B slikaju u $M_1, \ldots, M_{n+1}, B_1$. Množenjem te matrice i koordinata bazne tačke $A_i(0 : \cdots : 1 : \cdots : 0)$ dobijamo i-tu kolonu matrice A. Zato je i-ta kolona matrice A srazmerna sa koordinatama tačke M_i. Možemo onda pisati $A_i^{\downarrow} = \overrightarrow{M_i}$ za neki izbor vektora $\overrightarrow{M_i}$. Kako su tačke $M_1, \ldots, M_{n+1}$ u opštem položaju vektor $\overrightarrow{OB_1}$ se na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija $\lambda_1\overrightarrow{OM_1} + \cdots + \lambda_{n+1}\overrightarrow{OM_{n+1}}$. Sada direktno sledi da se za $\overrightarrow{M_i} = \lambda_i\overrightarrow{OM_i}$ tačka $B(1 : \cdots : 1)$ slika u B_1. Obrnuto, ako se tačka B slika u B_1 važi da je $\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_{n+1}}$, pa je $\frac{\overrightarrow{M_1}}{\lambda_1\overrightarrow{OM_1}} = \cdots = \frac{\overrightarrow{M_{n+1}}}{\lambda_{n+1}\overrightarrow{OM}_{n+1}}$, odnosno $\overrightarrow{M_i} = k\lambda_i\overrightarrow{OM_i}$. Dakle, matrica A je određena do na koeficijent k, a samo preslikavanje je jedinstveno određeno. $\square$

Sada direktno sledi da je jedna projektivna transformacija prostora $\mathbb{R}P^n$ određena sa $(n+2)$ tačke od kojih su svakih $(n+1)$ u opštem položaju i njihovim slikama.

Primetimo da ukoliko važi da je $\sigma(P) = P_1$ sledi da se vektor $\overrightarrow{OP}$ linearnim preslikavanjem kojem odgovara matrica A slika u vektor kolinearan sa $\overrightarrow{OP_1}$. Zato ako se projektivnim preslikavanjem σ tačke A, B, C, D slikaju u A_1, B_1, C_1, D_1, postoje vektori koji odgovaraju ovim tačkama za koje važi da je $A : \overrightarrow{A} \mapsto \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B} \mapsto \overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{C} \mapsto \overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{D} \mapsto \overrightarrow{D_1}$. Pretpostavimo da tačke C i D pripadaju pravoj AB. Tada postoje koeficijenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takvi da je $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Kako je preslikavanje vektora određeno matricom A linearno dobijamo da je tada i $\overrightarrow{C_1} = \alpha\overrightarrow{A_1} + \beta\overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{D_1} = \gamma\overrightarrow{A_1} + \delta\overrightarrow{B_1}$. Tada, očigledno, tačke C_1, D_1 pripadaju pravoj A_1B_1. Dobijamo i da važi sledeća teorema.

Teorema 22
a) Projektivna transformacija slika prave u prave, k-dimenzione projektivne potprostore u k-dimenzione projektivne potprostore.
b) Ako su A_1, B_1, C_1, D_1 slike tačaka A, B, C, D u projektivnoj transformaciji, tada je $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$.

Invarijantne tačke projektivne transformacije. Neka je projektivna transformacija σ data formulama $\lambda X' = AX$. Ako je tačka M invarijantna u ovoj tansformaciji sledi da su koordinate AM srazmerne sa koordinatama tačke M, odnosno da su rešenja jednačine $(A - \lambda E)X = 0$. Pri tom, te koordinate ne mogu biti sve jednake nuli. Zato, ako je $\overrightarrow{M}$ jedan od vektora koji odgovara tački M, sledi da je $\overrightarrow{M}$ sopstveni za linearno preslikavanje A.

Geometrijski gledano, matrica A definiše linearno preslikavanje vektorskog prostora R^{n+1}, tačka M je invarijantna ako se vektor $\overrightarrow{M}$, koji je kolinearan sa $\overrightarrow{OM}$ slika u vektor koji je takođekolinearan sa $\overrightarrow{OM}$, odnosno ako je $\overrightarrow{M}$ sopstveni vektor preslikavanja.

Projektivne transformacije prave. Svaka projektivna transformacija prave određe na je sa tri proizvoljne tačke te prave i njihovim slikama. Dakle transformacija koja ima bar tri razne invarijantne tačke je identitet. S obzirom da je matrica preslikavanja kvadratna, njene sopstvene vrednosti mogu biti konjugovano kompleksne, jedna realna dvostruka ili dve razne realne sopstvene vrednosti. U prvom slučjau ne postoje odgovarajući (realni) sopstveni vektori te transformacija nema invarijantnih tačaka. Takvu transformaciju nazivamo **eliptičkom**. Ako je sopstvena vrednost realna i dvostruka, a preslikavanje nije identičko, sopstveni potprostor za tu vrednost je jednodimenzion. Ako je $\overrightarrow{M}$ jedan od vektora koji ga razapinje, tačka M je invarijantna. Projektivna transformacija sa tačno jednom invarijantnom tačkom je **parabolička**. Ako su sopstvene vrednosti realne i razne, odgovarajući sopstveni potprostori su jednodimenzioni. Ako su razapeti, redom, vektorima $\overrightarrow{M}$ i $\overrightarrow{N}$, tada su odgovarajuće tačke M i N invarijantne. Projektivna transformacija prave sa tačno dve invarijantne tačke naziva se **hiperboličkom**.

Primer 5.4 Posmatrajmo translaciju prave $\mathrm{x}' = \mathrm{x} + b, b \neq 0$. U projektivnim koordinatama možemo je zapisati kao $\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_1}{x_2} + b$, odnosno

$$\lambda x_1' = x_1 + bx_2, \quad \lambda x_2' = x_2,$$

te je određena matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a sopstveni vektor je kolinearan sa $(v_1, 0)$. Zato ova transformacija ima jedinstvenu invarijantnu tačku $(v_1 : 0) = (1 : 0)$, beskonačno daleku tačku. Dakle, projektivno gledano, translacija je paraboličko preslikavanje. $\diamond$

Primer 5.5 Neka je data homotetija prave $H_{S,a} : \mathrm{x}' = ax + (1-a)s, a \neq 1$, gde je s afina koordinata tačke S. Tada u projektivnim koordinatama ovo preslikavanje ima formule

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & (1-a)s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

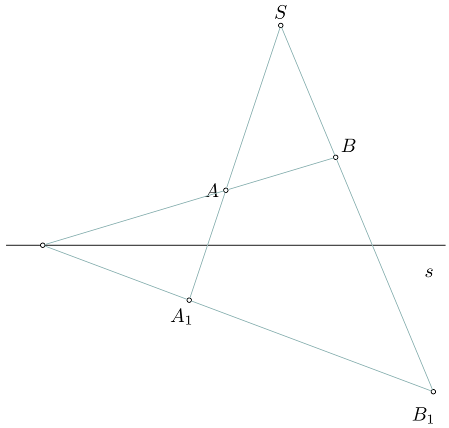
Matrica ima dve razne sopstvene vrednosti $\lambda_1 = a, \lambda_2 = 1$. Za $\lambda_1 = a$ dobijamo sopstvene vektore (sv_2, v_2), pa je odgovarajuća invarijantna tačka $(s : 1)$, odnosno tačka S. Za $\lambda_2 = 1$ su sopstveni vektori oblika $(v_2, 0)$ pa je odgovarajuća invarijantna tačka beskonačno daleka $(1 : 0)$. $\diamond$

Projektivne transformacije ravni. Setimo se da je svaka projektivna transformacija ravni na jedinstven način određena sa proizvoljne četiri tačke u opštem položaju i njihovim slikama.

Hiperravni dvodimenzione ravni su prave. Neka je prava p data jednačinom $u^tX = 0$ gde su $[u_1 : u_2 : u_3]$ homogene koordinate te prave. Neka je projektivna transformacija data sa $\lambda X' = AX$. Tada su koordinate slike tačke X srazmerne sa $A^{-1}X'$ pa se jednačina prave svodi na $u^tA^{-1}X' = 0$. Zato su homogene koordinate slike prave p $u'^t = \mu u^t A^{-1}$ odnosno važi $\mu u = A^t u'$. Dakle, homogene koordinate pravih se prilikom projektivne transformacije menjaju po istom principu kao i homogene koordinate tačaka. Zato je prava p invarijantna u jednoj transformaciji ako i samo ako njene koordinate određuju vektor koji je sopstveni za matricu A^t. Pri tom, setimo se da su dve matrice A i D slične, onda su slične i A^t i D^t. Pri tom, posebno će nam biti zanimljiv slučaj kada je matrica D dijagonalna.

Posmatrajmo jedan poseban slučaj. Neka je matrica A slična dijagonalnoj matrici $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$ sa elementima na dijagonali $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$. Sopstveni potprostor V za λ_1 je dvodimenzion. Afina ravan $O + V$ tada seče ravan $\mathbb{R}^2$ po pravoj čije su sve tačke invarijantne u ovoj transformaciji. Dakle, postoji prava čije su sve tačke invarijantne. Takvu pravu zovemo **osom** transformacije. Uočimo da važi i obrnuto: ako transformacija ima osu, postoji dvodimenzioni sopstveni potprostor, te je matrica A slična dijagonalnoj matrici $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$.

Tada je i matrica A^t slična $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$, te postoji i dvodimenzioni sopstveni potprostor za λ_1 matrice A^t. Ako su $[u_1, u_2, u_3]$ i $[v_1, v_2, v_3]$ dva nekolinearna rešenja, sva rešenja su data sa $\alpha[u_1, u_2, u_3] + \beta[v_1, v_2, v_3], \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Dakle ta rešenja odgovaraju pramenu pravih, odnosno postoji tačka kroz koju je svaka prava invarijantna. Takva tačka naziva se **centrom** preslikavanja. Kao i u slučaju tačaka važi i obratno: ako preslikavanje ima centar, tada je matrica A^t slična nekoj dijagonalnoj $D[\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2]$.



Sl. 5.4 Homologija sa centrom S i osom s

Pokazali smo da važi sledeća teorema.

Teorema 23 *Projektivno preslikavanje ravni ima osu ako i samo ako ima centar.*

Definicija 5.7 Projektivno preslikavanje ravni koje ima osu i centar naziva se **homologijom**. Pri tom, ako centar pripada osi onda je homologija **parabolička**, a ako ne pripada osi onda je homologija **hiperbolička.**

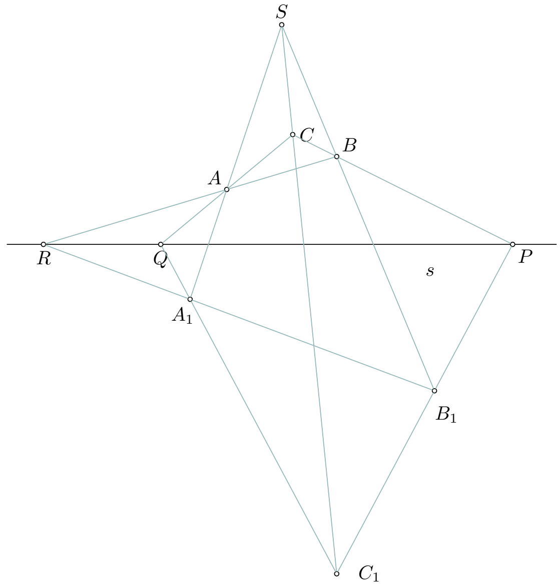
Primetimo i sledeće. Ako se u homologiji sa centrom S i osom s, proizvoljna tačka A slika u A_1, tada su S, A, A_1 kolinearne tačke. Ako se prava a slika u pravu a_1, tada su prave a, a_1, s konkurentne. Takođe, ako je neka prava p invarijantna u projektivnom reslikavanju σ ravni, ne znači da je ona osa. Da bi bila osa, neophodno je da bar tri njene tačke budu invarijantne, tada je preslikavanje $\sigma|_p$ identičko preslikavanje prave. S obzirom na dualni karakter pravih i tačaka u ravni, isto važi i za pramen pravih kroz tačku. Ako je tačka P invarijantna, ne znači da je ona centar preslikavanja. Da bi tačka P bila centar neophodno je da bar tri prave koje je sadrže budu invarijantne, tada će sve prave koje sadrže P biti invarijantne.

Dokažimo sada dve važne teoreme projektivne geometrije.

Teorema 24 *(Dezargova) Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 dve trojke nekolinearnih tačaka projektivnog prostora $\mathbb{R}P^3$, takvih da su prave AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentne. Tada se prave BC i B_1C_1, AC i A_1C_1, AB i A_1B_1 seku u kolinearnim tačkama P, Q i R, redom.*

Dokaz. Neka su A, B, C, A_1, B_1, C_1 tačke jedne ravni i neka se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u tački S. Četvorke tačaka S, A, B, C, kao i S, A_1, B_1, C_1 su takve da su svake tri tačke u jednoj četvorki u opštem položaju. Zato postoji jedinstvena projektivna transformacija ravni σ kojom se S, A, B, C slikaju redom u S, A_1, B_1, C_1. Uočimo da su prave

SA, SB, SC invarijantne. Zato je S centar, a σ homologija. Pri tom, prave BC, CA, AB se redom slikaju u B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 pa odgovarajuće presečne tačke P, Q i R pripadaju osi preslikavanja σ.



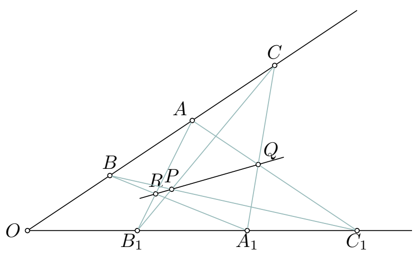
Sl. 5.5 Dezargova teorema

Neka trojke tačaka A, B, C, A_1, B_1, C_1 pripadaju raznim ravnima π i π_1. S obzirom da su prave AA_1 i BB_1 konkurentne, postoji ravan koja ih sadrži, pa su ujedno komplanarne i prave AB i A_1B_1, te postoji njihov presek R. Pri tom $R \in \pi \cap \pi_1$. Slično, postoje tačke P, Q i takođe pripadaju presečnoj pravoj ravni π i π_1, te su kolinearne. $\square$

Slično se dokazuje i obrnuta Dezargova teorema.

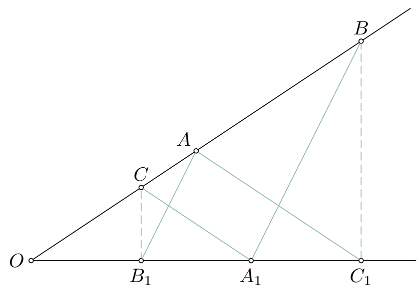
Teorema 25 *Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 dve trojke nekolinearnih tačaka projektivnog prostora $\mathbb{R}P^3$, takve da se prave BC i B_1C_1, AC i A_1C_1, AB i A_1B_1 seku u kolinearnim tačkama P, Q i R, redom. Tada su prave AA_1, BB_1, CC_1 konkurentne.*

Teorema 26 *(Papus) Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 dve trojke kolinearnih tačaka jedne ravni. Tada su tačke P, Q i R preseka parova pravih B_1C i BC_1, C_1A i CA_1, A_1B i AB_1, redom, kolinearne tačke.*



Sl. 5.6 Papusova teorema

Dokaz. S obzirom da projektivna preslikavanja "čuvaju" kolinearnost, možemo pretpostaviti da su tačke Q i R beskonačno daleke. Euklidski, prave A_1B i AB_1, odnosno A_1C i AC_1 su paralelne.



Sl. 5.7 Tačke Q i R su beskonačno daleke

Neka je tačka O presek pravih AB i A_1B_1 konačna. Tada je, na osnovu Talesove teoreme $\frac{OC}{OA} = \frac{OA_1}{OC_1}$ i $\frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OC_1}$. Zato važi i $\frac{OC}{OB} = \frac{OB_1}{OC_1}$, te su i B_1C i BC_1 paralelne. Projektivno, njihova presečna tačka P je beskonačno daleka, pa su P, Q, R kolinearne.

Ukoliko je O beskonačna tačka, četvorouglovi ACA_1C_1 i ABA_1B_1 su paralelogrami, pa se slično dobija da je i $B_1C||BC_1$. $\square$

5.2 Konike u projektivnoj ravni

Setimo se da je jednačina krive drugog reda u euklidskoj ravni, u afinim koordinatama, data sa

$$a_{11}\mathrm{x}_1^2 + 2a_{12}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + a_{22}\mathrm{x}_2^2 + 2a_{13}\mathrm{x}_1 + 2a_{23}\mathrm{x}_2 + a_{33} = 0.$$

S obzirom da je $\mathrm{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}, \mathrm{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}$, gde su $(x_1 : x_2 : x_3)$ odgovarajuće projektivne koordinate, prethodna jednačina u projektivnim koordinatama ima sledeći oblik

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

odnosno $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$. Matrično jednačinu krive drugog reda u projektivnim koordinatama zapisujemo $X^tAX = 0$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

simetrična matrica. Sve proporcionalne, ne-nula matrice zadaju istu krivu. Pri tom, uočimo da nam je neophodno, u opštem slučaju pet raznih tačaka da bi kriva bila određena na jedinstven način.

Neka je $X = QX'$ promena homogenih koordinata (ili projektivno preslikavanje). Tada direktno dobijamo da u novim koordinatama kriva drugog reda ima jednačinu $X'^tQ^tAQX' = 0$, odnosno da je matrica krive data sa Q^tAQ. S obzirom da je matrica A simetrična, ona je dijagonalizabilna, odnosno, postoji ortogonalna matrica Q takva da je $Q^tAQ = D[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$. Ukoliko je $\lambda_1 \neq 0$ tada promenom koordinata $x_1' = \sqrt{|\lambda_1|}x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3$, dobijamo da je nova matrica krive je oblika $D[\pm 1, \lambda_2, \lambda_3]$.

Sličnim postupkom dolazimo do zaključka da postoji promena koordinata (ili projektivno preslikavanje), takvo da je u novim koordinatama matrica krive oblika $A_1 = D[1, 0, 0], A_2 = D[1, 1, 0], A_3 = D[1, -1, 0], A_4 = D[1, 1, 1]$, $A_5 = D[1, 1, -1]$.

1. Ako je matrica krive A_1, onda je jednačina krive $x_1^2 = 0$, pa je kriva zapravo prava $x_1 = 0$.

2. Matricama A_2 i A_3 odgovaraju krive sa jednačinama $x_1^2 + x_2^2 = 0$ i $x_1^2 - x_2^2 = 0$, te su u pitanju, redom tačka $(0:0:1)$ i unija dve prave $x_1 + x_2 = 0$ i $x_1 - x_2 = 0$.

3. Ako je kriva data matricom A_4 ima jednačinu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, čija su rešenja $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ali s obzirom da ne postoji tačka čije su sve homogene koordinate nula, u pitanju je prazan skup.

4. Matrici A_5 odgovara jednačina $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, odnosno u afinim koordinatama $\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 = 1$, te je u pitanju jedinični krug.

U prva četiri slučaja smo dobili degenerisane krive drugog reda. S obzirom da projektivne transformacije slikaju prave u prave, tačke u tačke, zaključujemo da peti slučaj odgovara svim nedegenerisanim konikama. Dakle važi sledeća teorema.

Teorema 27 *Sve nedegenerisane konike projektivne ravni projektivno su ekvivalentne jediničnom krugu.*

Direktna posledica je i da su svake dve nedegenerisane konike međusobno ekvivalentne.

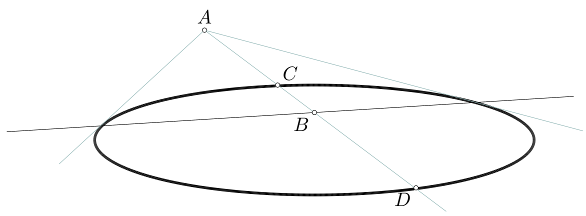
Pol i polara. Neka je $\Gamma : \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j = 0$ nedegenerisana konika.

Definicija 5.8 Dve tačke A i B su harmonijski spregnute (harmonijski konjugovane) u odnosu na Γ ako važi $H(A, B, C, D)$, za neke dve tačke $C, D \in \Gamma$.

Tada tačke C i D pripadaju pravoj AB i važi $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \lambda_1\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \lambda_2\overrightarrow{B}$, gde je $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Možemo u ovoj definiciji dopustiti i da se tačke C i D poklapaju, tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, te pisati i da je $H(A, B, A, A)$. Pri tom, tada prava AB ima sa krivom jednu zajedničku tačku te je AB tangenta na Γ u tački A. Tada takođe smatramo da je tačka B spregnuta sa A.

Takođe, prava AB ne mora da ima zajedničkih (realnih) tačaka sa Γ. Tada formalno postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, odnosno prava AB seče Γ u imaginarnim tačkama. Ako je $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ i tada ćemo smatrati da su A i B spregnute u odnosu na Γ. Primetimo da, s obzirom da projektivne transformacije slikaju spregnute tačke u spregnute tačke, direktno sledi da je i odnos pol-polara u odnosu na krivu invarijantan pri projektivnim transformacijama.

Neka su $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ i $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ homogene koordinate tačaka A i B. Tačke C i D pripadaju Γ ako i samo ako je $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\alpha_i + \lambda\beta_i)(\alpha_j + \lambda\beta_j) = 0$, gde je $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$. Uslov $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ekvivalentan je, na osnovu Vijetovih formula, tome da je koeficijent u prethodnoj kvadratnoj jednačini λ jednak nuli, odnosno $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\alpha_i\beta_j = 0$. Sad vidimo da je skup tačaka ravni spregnutih sa A u odnosu na Γ dat jednačinom $\sum_{i,j=1}^3 \alpha_i x_j = 0$, i predstavlja pravu.



Sl. 5.8 Polara tačke A

Definicija 5.9 Pravu a koja je skup svih tačaka harmonijski spregnutih sa A u odnosu na krivu Γ nazivamo **polarom** te tačke u odnosu na krivu. Tačka A je **pol** prave a.

Ako je A matrica krive, vidimo da se homogene koordinate polare dobijaju kao

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da je relacija harmonijske spregnutosti u odnosu na tačke C i D simetrična po A i B, direktno sledi naredno tvrđenje.

Tvrđenje 17 *Neka su redom, A i a, odnosno B i b parovi pol-polara u odnosu na datu krivu Γ. Tada važi da tačka A pripada pravoj b ako i samo ako tačka B pripada pravoj a.*

Tvrđenje 18 *Neka su P i p pol i polara u odnosu na krivu Γ. Tada važi da tačka P pripada pravoj p ako i samo ako pripada krivoj Γ.*

Dokaz. Neka je kriva data jednačinom $X^tAX = 0$. Označimo sa P kolonu koordinata iste tačke, a sa $u^t = [u_1 : u_2 : u_3]$ koordinate polare p. Tada je $AP = u$.

Tačka P pripada polari ako i samo ako je $u^tP = 0$ što je ekvivalentno sa $P^tAP = 0$ odnosno tome da tačka P pripada krivoj Γ. □

Elipsa, parabola i hiperbola u projektivnoj ravni. Posmatrajmo elipsu datu u kanonskom obliku $\frac{\mathrm{x}_1^2}{a^2} + \frac{\mathrm{x}_2^2}{b^2} = 1$. Odgovarajuća projektivna jednačina je $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$, a matrica krive je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ te je } A^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zato je pol beskonačno daleke prave $x_3 = 0$ tačka $(0 : 0 : 1)$, odnosno centar elipse. Uočimo da elipsa i prava $x_3 = 0$ nemaju zajedničkih tačaka.

Neka je data hiperbola u kanonskom obliku $\frac{\mathrm{x}_1^2}{a^2} - \frac{\mathrm{x}_2^2}{b^2} = 1$. Slično kao u slučaju elipse, matrica krive je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

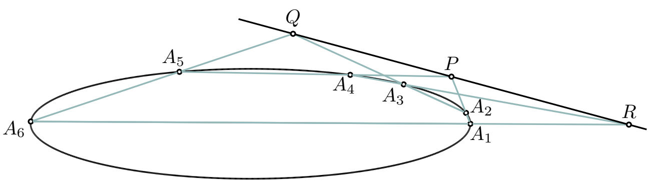
pa je pol beskonačno daleke prave $x_3 = 0$ tačka $(0 : 0 : 1)$, odnosno centar hiperbole. Hiperbola i beskonačno daleka prava $x_3 = 0$ imaju dve zajedničke tačke $(a : b : 0)$ i $(a : -b : 0)$. One su beskonačno daleke tačke pravih $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$ i $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$, odnosno asimptota hiperbole. Asimptote hiperbole su tangente na tu krivu iz centra hiperbole, a dodiruju krivu (u projektivnom smislu) u beskonačno dalekim tačkama.

Neka je data parabola u kanonskom obliku $\mathrm{x}_2^2 = 2p\mathrm{x}_1$, odnosno, $x_2^2 = 2px_1x_3$. Beskonačno daleka prava ima jednu zajedničku tačku sa parabolom $(1 : 0 : 0)$, to je beskonačno daleka tačka ose parabole. Kako je prava $x_3 = 0$ tangenta na parabolu u datoj tački, tačka $(1 : 0 : 0)$ je pol beskonačno daleke prave, te je u analogiji sa prethodnim primerima možemo smatrati centrom parabole.

Naglasimo da se svaka druga elipsa, parabola ili hiperbola preslikavaju u date afinim transformacijama, u kojima se beskonačno daleka prava slika u sebe (tj. ostaje beskonačno daleka). Zato možemo reći da je nedegenerisana konika elipsa, parabola ili hiperbola u zavisnosti od toga da li ima dve, jednu ili nijednu zajedničku tačku sa beskonačno dalekom pravom.

Navedimo, u nastavku, dve važne teoreme vezane za nedegenerisane konike projektivne ravni.

Teorema 28 *(Paskalova) Neka su $A_1, \dots, A_6$ tačke nedegenerisane konike projektivne ravni. Neka se parovi pravih A_1A_2 i A_4A_5, A_2A_3 i A_5A_6, A_3A_4 i A_6A_1 redom seku u tačkama P_1, P_2, P_3. Tada su tačke P_1, P_2 i P_3 kolinearne.*



Sl. 5.9 Paskalova teorema

Dokaz. Kako je svaka nedegenerisana kriva projektivno ekvivalentna krugu, dovoljno je tvrđenje dokazati za tačke jednog kruga. Pokažimo prvo jedan pomoćni rezultat.

Neka se dva kruga seku u tačkama P i Q. Neka su, dalje, p i q prave koje redom sadrže P i Q i koje seku ova dva kruga, redom, u tačkama A i M, odnosno B i N. Tada su prave AB i MN paralelne. Pretpostavimo da su tačke A i B sa iste strane prave PQ. Tada su i M i N sa iste strane PQ, a četvorouglovi $ABQP$ i $MPQN$ su tetivni. Zato je $\angle ABQ = \pi - \angle APQ = \angle QPM = \pi - QNM$. Zato prave AB i MN određuju podudarne saglasne uglove sa pravom q, te su paralelne. Slično dobijmo i kada su A i B sa raznih strana PQ.

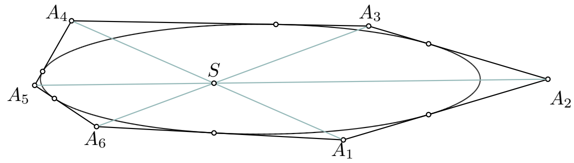
Neka su k_1 i k_2 krugovi određeni tačkama A_1, A_2, A_5 i A_2, A_5, P_2. Neka su B_1 i B_2 druge tačke preseka pravih A_1A_2 i A_4A_5 sa k_2. Dva kruga imaju zajedničku tetivu A_2A_5. Primenom prethodnog tvrđenja na prave A_2A_3 i A_4A_5 dobijamo da je $A_3A_4||P_2B_2$. Primenom na prave A_1A_2 i A_5A_6 dobijamo i da je $A_1A_6||B_1P_2$. Na kraju, primenom na A_1A_2 i A_4A_5 sledi da je takođe i $A_1A_4||B_1B_2$. S obzirom da su odgovarajuće ivice trouglova $A_1A_4P_3$ i $B_1B_2P_2$ paralelne, trouglovi su homotetični, i to sa centrom homotetije $A_1B_1 \cap A_4B_2 = \{P_1\}$, te P_1 pripada i pravoj P_2P_3, (ili po obrnutoj Dezargovoj teoremi, prave A_1B_1, A_4B_2 i P_2P_3 su konkurentne). □

Teorema 29 *(Obrnuta Paskalova teorema) Neka su $A_1, \dots, A_6$ tačke jedne ravni od kojih su svake tri u opštem položaju. Neka se parovi pravih A_1A_2 i A_4A_5, A_2A_3 i A_5A_6, A_3A_4 i A_6A_1 redom seku u tačkama P_1, P_2, P_3. Ako su tačke P_1, P_2, P_3 kolinearne tada postoji nedegenerisana konika koja sadrži tačke $A_1, \dots, A_6$.*

Ako se tačka A_2 konike, "približava" tački A_1, tada prava A_1A_2 teži položaju tangente u tački A_1. Naglasimo da možemo u Paskalovoj teoremi posmatrati i specijalne slučajeve, kada je umesto jednog para konsekventnih tačaka u nizu data tačka i tangenta na krivu u toj tački.

Teorema dualna Paskalovoj je Brianšonova.

Teorema 30 *(Brianšonova) Neka su tačke $A_1, \dots A_6$ takve da su svake tri od njih u opštem položaju i da nedegenerisana konika dodiruje prave $A_1A_2, A_2A_3, \dots A_6A_1$. Tada su prave A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 konkurentne. Važi i obrnuto: ako za tačke $A_1, \dots A_6$ važi da su A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 konkurentne prave onda postoji konika koja dodiruje prave $A_1A_2, A_2A_3, \dots A_6A_1$.*



Sl. 5.10 Brianšonova teorema

Slično kao i u slučaju Paskalove teoreme možemo dopustiti specijalne slučajeve, recimo, ako dopustimo da su tačke A_1, A_6, A_5 kolinearne, tada teorema važi za tačku A_6 koja je dodirna tačka tangente A_1A_5 na krivu.

6 Inverzivna geometrija

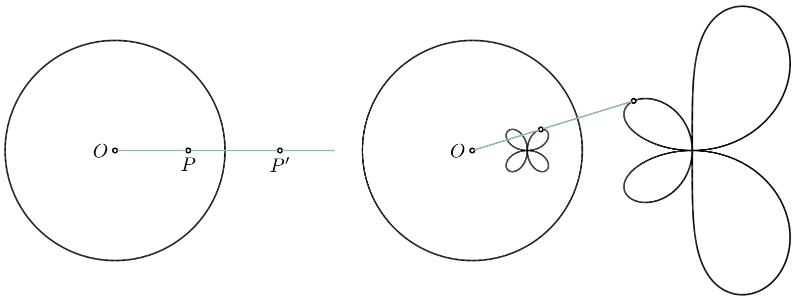
U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa još jednom grupom transformacija. Njihov domen je euklidska ravan kojoj je pridružena još jedna tačka koju ćemo nazivati beskonačno dalekom. Elementi koji generišu ovu grupu su osne refleksije i inverzije u odnosu na krug.

6.1 Inverzija u odnosu na krug

Definicija 6.1 Neka je $k(O, r)$ krug euklidske ravni $\mathbb{E}^2$. Inverzija u odnosu na krug k je preslikavanje $\psi_k : \mathbb{E}^2 \backslash \{O\} \to \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$ koje proizvoljnu tačku P slika u tačku P' poluprave OP, takvu da je

$$OP \cdot OP' = r^2. \tag{18}$$

Tačka O je **centar inverzije**.



Sl. 6.1 Inverzija u odnosu na krug k

Neka je O koordinatni početak. Uočimo da su tada formule inverzije ψ_k, gde je $k(O, r)$ u standardnim euklidskim koordinatama date sa

$$\psi_k(x_1, x_2) = \Big(\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\Big). \tag{19}$$

Očigledno je da je inverzija u odnosu na krug bijektivno preslikavanje. Takođe, jasno je da je $\psi_k(P') = P$, te je ψ_k i involutivno preslikavanje, odnosno važi $\psi_k^2 = \varepsilon$.

Neka je $P \in \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$ proizvoljna. S obzirom da je $OP \cdot OP' = r^2$, direktno sledi i da je $OP < r$ ako i samo ako je $OP' > r$, odnosno da se inverzijom u odnosu na krug k tačke iz njegove unutrašnjosti slikaju u tačke koje pripadaju spoljašnjosti kruga k, i obrnuto, spoljašnjost se slika u unutrašnjost.

Ako je $OP = r$ tada je i $OP' = r$, odnosno $P = P'$ te je tačka P invarijantna za transformaciju ψ_k. Dakle važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 19 *Jedine invarijantne tačke inverzije u odnosu na krug k su tačke kruga k.*

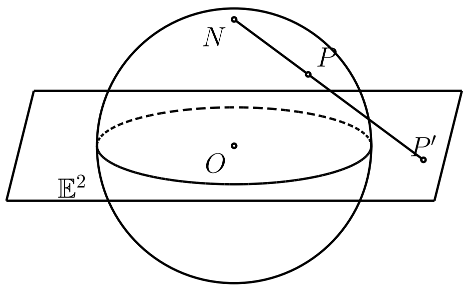
Možemo euklidskoj ravni pridružiti jednu, **beskonačno daleku**, tačku ∞, a dobijeni skup možemo zvati **proširenom eukllidskom ravni**. Tada, možemo definisati i da je $\psi_k(O) = \infty$, $\psi_k(\infty) = O$. Takođe, uočimo da formula (19) ima smisla $0 \cdot \infty = r^2$, u kontekstu graničnih vrednosti. Pri tom, proširena euklidska ravan je bijektivno ekvivalentna sferi.

Primedba 6.1 (Stereografska projekcija) Neka je data jedinična sfera euklidskog prostora $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$. Postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između tačaka sfere $\mathbb{S}^2$ i tačaka proširene euklidske ravni $x_3 = 0$, koja se naziva **stereografskom projekcijom**.

Neka je $N(0, 0, 1)$ "severni pol" sfere. Ako je $P \in \mathbb{S}^2$, $P \neq N$, tada prava PN seče ravan u konačnoj tački P' i tada definišemo da je $\pi(P) = P'$. Posebno, tački $P = N$ pridružujemo beskonačno daleku tačku proširene euklidske ravni.

Ako je $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ stereografska projekcija, a (x_1, x_2, x_3) koordinate tačke P sfere, tada su koordinate tačke P' date sa

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right), & x_3 \neq 1 \\ \infty, & x_3 = 1. \end{cases}$$



Sl. 6.2 Stereografska projekcija

Inverzno preslikavanje je dato sa

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x_1, x_2) &= \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right), \\ \pi^{-1}(\infty) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Proizvoljni krug k sfere $\mathbb{S}^2$ je presek te sfere i neke ravni $\alpha : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Nađimo njegovu sliku u stereografskoj projekciji. Ako su $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ koordinate euklidske ravni, tada tačka pripada slici kruga k ako i samo ako je $\pi^{-1}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in \alpha$ odnosno ako i samo ako je

$$a\frac{2\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + 1} + b\frac{2\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + 1} + c\frac{\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 - 1}{\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + 1} + d = 0.$$

Ekvivalentno je

$$(c + d)(\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2) + 2a\mathrm{x}_1 + 2b\mathrm{x}_2 + (d - c) = 0,$$

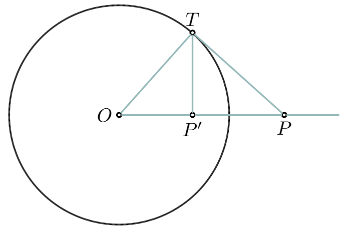
pa je u pitanju krug, za $c + d \neq 0$ ili prava za $c + d = 0$. Uslov $c + d = 0$ je ekvivalentan uslovu $N \in \alpha$, pa vidimo da se u prave (proširene tačkom ∞) slikaju krugovi koji sadrže tačku N.

U proširenoj euklidskoj ravni, sada i pravu možemo smatrati krugom koji pri tom sadrži beskonačno daleku tačku, a prave i krugove zajedno nazivati **uopštenim krugovima**.

Naglasimo da se može pokazati i da stereografska projekcija "čuva uglove". Ako se neke dve krive na sferi seku pod uglom ϕ, tada se i njihove slike u euklidskoj ravni seku pod istim uglom.

$\diamond$

Pronađimo sliku tačke $P \in \mathbb{E}^2 \backslash \{O\}$. Pretpostavimo da P pripada spoljašnjosti kruga k. Neka je T dodirna tačka jedne tangente iz P na k i P' podnožje normale iz T na OP.

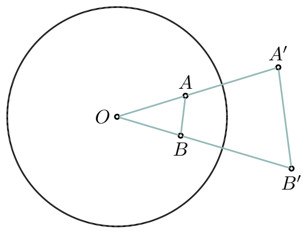


Sl. 6.3 $\psi_k(P) = P'$

Uočimo da su trouglovi $OP'T$ i OTP slični. Zato je $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$, odnosno $P' = \psi_k(P)$. Kako je $\psi_k(P') = P$ jasno je i kako konstruišemo sliku u inverziji tačke koja pripada unutrašnjosti kruga k.

Ako je OAB trougao i $\psi_k(A) = A'$, $\psi_k(B) = B'$, tada iz $OA'/OB' = OB/OA$ zaključujemo i da su trouglovi OAB i $OB'A'$ slični. Zato je

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{r^2}{OB \cdot OA}.$$



Sl. 6.4 $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$

Definicija 6.2 Neka su A, B, C, D četiri proizvoljne razne tačke (ne nužno kolinearne ili konciklične). Tada broj $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ nazivamo **dvorazmerom** te četiri tačke i označavamo $[A, B; C, D]$.

Ukoliko su tačke kolinearne očigledno važi $|(A, B; C, D)| = [A, B; C, D]$.

Neka su A', B', C', D' slike tačaka A, B, C, D u inverziji ψ_k. Tada je

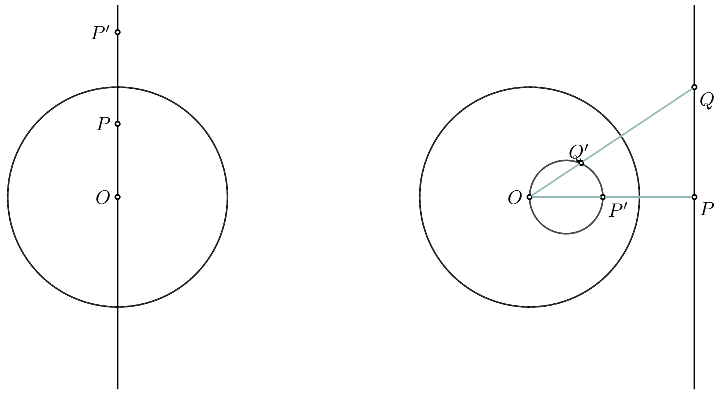
$$[A', B'; C', D'] = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{\frac{r^2 AC}{OC \cdot OA}}{\frac{r^2 CB}{OB \cdot OC}} : \frac{\frac{r^2 AD}{OD \cdot OA}}{\frac{r^2 DB}{OB \cdot OD}} = [A, B; C, D].$$

Definiciju dvorazmere možemo proširiti, korišćenjem graničnih vrednosti, i za tačke O i ∞ u proširenoj euklidskoj ravni, a prethodna jednakost važi i u tom slučaju. Dakle, važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 20 *Inverzija u odnosu na krug "čuva" dvorazmeru.*

Slede tvrđenja koja pokazuju da se prave i krugovi, odnosno uopšteni krugovi proširene euklidske ravni, slikaju u uopštene krugove.

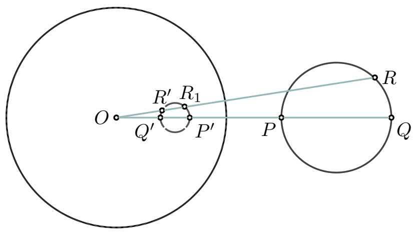
Teorema 31 *Neka je p prava ravni $\mathbb{E}^2$. Tada važi:*
a) Ako $O \in p$ onda $\psi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.
b) Ako O ne pripada pravoj p tada postoji krug ravni l koji sadrži tačku O, takav da je $\psi_k(p) = l \backslash \{O\}$.



Sl. 6.5 Slika prave u inverziji u odnosu na krug

Dokaz.
a) Neka je $P \in p$. Tada su tačke P, O, P' kolinearne, pa sve pripadaju pravoj p, pa je i $P' \in p$. S obzirom da je ψ_k involucija važi i skupovna jednakost $\psi_k(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.
b) Neka je P podnožje normale iz O na p i $\psi_k(P) = P'$. Neka je l krug sa prečnikom OP'. Neka je $Q \in p$, $Q \neq P$ proizvoljna tačka. Tada, s obzirom da su trouglovi OPQ i $OQ'P'$ slični, sledi i da je $\angle OQ'P' = \angle OPQ$ prav. Zato tačka Q' pripada krugu sa prečnikom OP, odnosno l. Obrnuto, ako je $Q' \in l \backslash \{O\}$, tačka Q' se inverzijom ψ_k slika u tačku Q poluprave OQ' za koju važi i da je $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ te Q pripada i pravoj ortogonalnoj u P na OP', odnosno pravoj p. Zato važi skupovna jednakost $\psi_k(p) = l \backslash \{O\}$. □

Teorema 32 *Neka je l krug euklidske ravni. Tada važi:*
a) Ako je $O \in l$, onda je $\psi_k(l \backslash \{O\})$ neka prava p te ravni koja, pri tom ne sadrži tačku O.
b) Ako l ne sadrži tačku O tada je $\psi_k(l) = l'$ takođe krug koji ne sadrži tačku O. Pri tom, postoji i homotetija sa centrom u O kojom se l slika u l'.



Sl. 6.6 Slika kruga koji ne sadrži tačku O

Dokaz.
a) S obzirom da je ψ_k involucija, tvrđenje direktno sledi iz Teoreme 31 pod b).
b) Neka je S centar kruga l i A i B tačke u kojima prava OS seče l. Neka je $R \in l$ proizvoljna. Prava OR seče krug l još u tački R_1. Posebno, ako je OR tangenta na l, tada je $R = R_1$. Neka je $\psi_k(R) = R'$. Pri tom, zbog potencije tačke O u odnosu na krug l sledi da je $OR \cdot OR_1 = OA \cdot OB$. Kako je i $OR \cdot OR' = r^2$, sledi da je i $\frac{OR'}{OR_1} = \frac{r^2}{OA \cdot OB} = const$. Zato tačka R' pripada krugu l', slici kruga l u homotetiji sa centrom u tački O i koeficijentom $\frac{r^2}{OA \cdot OB}$. Kako je ψ_k involucija sledi i da važi skupovna jednakost $\psi_k(l) = l'$. □

Tvrđenje 21 *Kompozicija dve inverzije sa istim centrom je homotetija.*

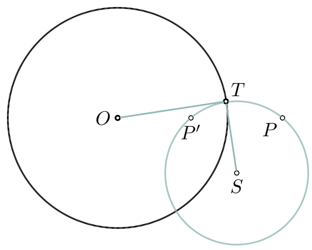
Dokaz. Neka su $k_1(O, r_1)$ i $k_2(O, r_2)$ koncentrični krugovi i P proizvoljna tačka. Ako je $\psi_{k_1}(P) = P_1$ i $\psi_{k_2}(P_1) = P'$ tada je $OP \cdot OP_1 = r_1^2$ i $OP_1 \cdot OP' = r_2^2$ pa je

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Zato je $P' = H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}}(P)$, pa je $H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}} = \psi_{k_2} \circ \psi_{k_1}$. □

Tvrđenje 22 *Neka tačka P ne pripada krugu k i neka je $P' = \psi_k(P)$. Ako krug l sadrži tačke P i P' onda su krugovi k i l ortogonalni.*

Dokaz. Neka je $k(O, r)$. Potencija tačke O u odnosu na krug l je $OP \cdot OP' = OT^2$, gde je T dodirna tačka tangente iz O na l.



Sl. 6.7 Krug koji sadrži P i P'

Zato je $r = OT$, pa tačka T ujedno pripada i krugu k. Tada se tangente na k i l u T seku pod pravim uglom pa su krugovi ortogonalni. □

Tvrđenje 23 *Neka su k i l dva kruga euklidske ravni. Tada je $\psi_k(l) = l$ ako i samo ako su krugovi k i l ortogonalni ili $k = l$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $k \neq l$ i neka je $X \in l$ tačka koja ne pripada krugu k, a $\psi_k(X) = X'$.

Ako je $\psi_k(l) = l$ tada $X' \in l$ pa na osnovu prethodne teoreme sledi $k \perp l$.

Obratno, ako je $k \perp l$, sledi da je dodirna tačka T tangente iz tačke O na l zajednička za k i l, pa je potencija tačke O u odnosu na l jednaka $OT^2 = r^2$. Ako je X'' druga presečna tačka kruga l i prave OX tada je potencija $OX \cdot OX'' = r^2$, a kako je X' slika tačke X u inverziji važi i $r^2 = OX \cdot OX'$. Zato je $X' = X''$ pa se krug l slika u sebe.

□

Tvrđenje 24 *Neka su A, B, P, Q četiri razne kolinearne tačke i k krug sa prečnikom PQ. Tada važi $\psi_k(A) = B$ ako i samo ako je $H(A, B, P, Q)$.*

Dokaz. Neka je O središte duži PQ. Za obe relacije $\psi_k(A) = B$, $H(A, B, P, Q)$ važi da tačke A i B pripadaju istoj polupravoj prave PQ sa temenom O i da je jedna u unutrašnosti, a druga u spoljašnjosti kruga k, a pri tom su relacije simetrične po A i B. Zato možemo pretpostaviti da je raspored $A - P - B - O - Q$. Tada je

$$\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} = \frac{AO - r}{r - BO} : \frac{AO + r}{BO + r} = \frac{AO \cdot OB + r(AO - OB) - r^2}{r^2 + (AO - OB)r - OA \cdot OB}.$$

S obzirom na raspored tačaka one su harmonijski spregnute, ako i samo ako je $\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} = 1$, odnosno ako i samo ako je $OA \cdot OB = r^2$ što je ekvivalentno sa $\psi_k(A) = B$. □

Teorema 33 *Neka su l_1 i l_2 uopšteni krugovi euklidske ravni. Njihove slike l_1' i l_2' u inverziji ψ_k se seku pod istim uglom kao l_1 i l_2 ali suprotne orijentacije.*

Dokaz. Ako je ∞ jedina zajednička tačka dva uopštena kruga, tada su l_1 i l_2 prave i to paralelne, pa se one "dodiruju" u tački ∞ odnosno seku se pod uglom nula. Njihove slike su krugovi koji sadrže tačku O, centar inverzije, a njihovi prečnici čije je teme O pripadaju istoj pravoj. Zato se l_1 i l_2 dodiruju u O. Obratno ako je O jedina zajednička tačka, l_1 i l_2 su krugovi koji se dodiruju u O, a slikaju se u paralelne prave.

Slično, ako se dva uopštena kruga dodiruju, slikaju se u uopštene krugove koji se dodiruju, pa za njih tvrđenje važi.

Pretpostavimo sada da l_1 i l_2 imaju zajedničku konačnu tačku $X \neq O$ i neka je X' njena slika u inverziji ψ_k. Neka su t_1 i t_2 tangente na l_1 i l_2 u X. Neka su k_1 i k_2 krugovi ortogonalni na k, a redom tangentni na t_1 i t_2 u X.

Orijentisani ugao između l_1 i l_2 u X je ugao između tangenti t_1 i t_2, odnosno između k_1 i k_2 u X. Inverzijom ψ_k krugovi k_1 i k_2 se slikaju u sebe, t_1 i t_2 u uopštene krugove koji dodiruju k_1 i k_2 u X', a odgovarajući ugao, u ugao u tački $X' \in k_1 \cap k_2$, između k_1 i k_2, koji je podudaran, ali suprotne orijentacije u odnosu na ugao u tački X. □

Sada se lako može se pokazati i da inverzija "čuva uglove" i između proizvoljnih krivih koje se seku, ali menja orijentaciju.

Uočimo takođe da su i refleksija u odnosu na pravu i inverzija u odnosu na krug bijektivna preslikavanja, involucije, koje slikaju jednu od oblasti ravni koju graniče u drugu. Njihove invarijantne tačke su tačke osnove refleksije/inverzije. Ako se tačka P slika u P' tada je prava PP' ortogonalna na osnovicu transformacije. Ako PP' seče tu osnovicu u tačkama P_1 i P_2 u slučaju inverzije važi da je $H(P, P', P_1, P_2)$. U slučaju refleksije, pored jedne konačne tačke P_1 dve prave obe sadrže i beskonačno daleku tačku ∞, pa je $P_2 = \infty$. Tada i u slučaju refleksije važi da je $H(P, P', P_1, P_2)$. Zato u proširenoj euklidskoj ravni, gde su i prave uopšteni krugovi, možemo smatrati da je refleksija u odnosu na pravu, zapravo, inverzija u odnosu na uopšteni krug.

6.2 Mebijusove transformacije ravni

Postoji jednoznačna korespondencija između tačaka euklidske ravni $\mathbb{E}^2$ i skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ u kojoj tački (x_1, x_2) odgovara kompleksni broj $z = x_1 + \imath x_2$, a kažemo da je z kompleksna koordinata date tačke.

Uočimo da je rastojanje između dve tačke sa koordinatama z_1 i z_2 jednako $|z_1 - z_2|$.

Tvrđenje 25 *Svaka izometrija euklidske ravni $\mathcal{I}$ može se zapisati kao*

$$\mathcal{I}(z) = az + b, \ \ \textit{ili} \ \mathcal{I}(z) = a\overline{z} + b,$$

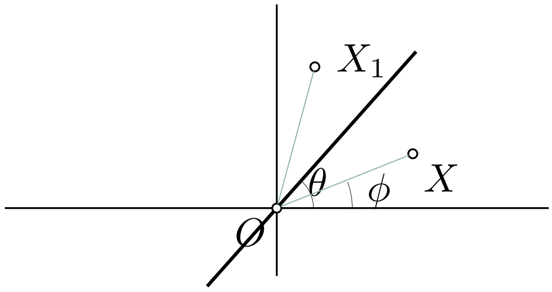
gde su $a, b \in \mathbb{C}$ i $|a| = 1$. Obratno, svaka transformacija ovog oblika je izometrija.

Dokaz. Dokažimo prvo da su ovako zadate transformacije izometrije. Ako se tačke sa kompleksnim koordinatama z_1, z_2 slikaju u z_1' i z_2' transformacijom $\mathcal{I}$, tada je rastojanje između slika $|z_1' - z_2'| = |a||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$, pa su date transformacije izometrije.

Specijalno $z \mapsto \overline{z}$ slika tačke $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$, pa je u pitanju osna refleksija u odnosu na x_1-osu, koju ćemo označavati sa S_p.

Neka je $\mathcal{I}(0) = b$, a $\mathcal{I}(1) = b + a$. Tada je $|a| = 1$. Neka je je $\mathcal{J}(z) = az + b$, izometrija. Tada je i $\mathcal{J}(0) = a$, $\mathcal{J}(1) = b + a$, te su tačke 0 i 1 invarijantne u izometriji $\mathcal{J}^{-1} \circ \mathcal{I}$. Zato, ova kompozicija može biti ili koincidencija ε, kada je $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ ili osna refleksija S_p, kada je $\mathcal{I} = \mathcal{J} \circ S_p$. □

Primer 6.2 Uočili smo da je transformacija $z \mapsto \overline{z}$ refleksija u odnosu na x_1-osu. Ako je q prava koja sadrži koordinatni početak i određu je ugao θ sa x_1-osom tada se tačka $z = |z|e^{i\phi}$ refleksijom u odnosu na q slika u tačku $z' = |z|e^{\imath(2\theta-\phi)} = e^{2\imath\theta}\overline{z}$.



Sl. 6.8 Refleksija u odnosu na pravu q

$\diamond$

Primer 6.3 Ako je $b = b_1 + \imath b_2$, tada je transformacija $z \mapsto z + b$ data sa $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + b_1, x_2 + b_2)$ te je u pitanju translacija za vektor (b_1, b_2). $\diamond$

Primer 6.4 Posmatrajmo izometriju $z \mapsto az$. Kako je $|a| = 1$, sledi da je $a = \cos\phi + \imath\sin\phi$. Zato važi $(x_1, x_2) \mapsto (\cos\phi x_1 - \sin\phi x_2, \sin\phi x_1 + \cos\phi x_2)$, pa je data transformacija rotacija oko koordinatnog početka O za ugao ϕ. $\diamond$

Vidimo, sada, da se svaka izometrija ravni može predstaviti, kada je u pitanju direktna transformacija, kao kompozicija rotacije oko tačke O i translacije, a kojima, u slučaju indirektne transformacije prethodi refleksija u odnosu na x_1-osu.

Primer 6.5 Neka je $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Neka je $f(z) = kz$. Tada se (x_1, x_2) slika u (kx_1, kx_2), te je transformacija homotetija $H_{O,k}$. $\diamond$

Setimo se da se svaka sličnost može predstaviti kao kompozicija proizvoljne homotetije i neke izometrije. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 26 *Svaka sličnost euklidske ravni $\mathcal{S}$ može se zapisati kao*

$$\mathcal{S}(z) = az + b, \ \ \text{ili } \mathcal{S}(z) = a\overline{z} + b,$$

gde su $a, b \in \mathbb{C}$ i gde je $a \neq 0$.

Tvrđenje 27 *Neka je $k(S, r)$ proizvoljni krug euklidske ravni sa centrom $c = a + ib$ i poluprečnikom r. Tada je inverzija u odnosu na krug k u kompleksnim koordinatama data sa:*

$$\psi_k : z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z - c}} + c.$$

Dokaz. Neka je $S = O$, koordinatni početak. U realnim koordinatama je tada inverzija data formulama $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2})$. Pri tom je $z\overline{z} = x_1^2 + x_2^2$, pa u kompleksnim koordinatama je ova transformacija data sa $z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z}}$.

Ako tačka S, sa koordinatom c nije koordinatni početak, tada se translacijom $\tau(z) = z - c$, dati krug slika u krug k_1 sa centrom u koordinatnom početku. Pri tom ako su w i w' tačke inverzne u odnosu na k, one se slikaju u tačke w_1 i w_1' inverzne u odnosu na k_1. Zato važi $\psi_k = \tau^{-1} \circ \psi_{k_1} \circ \tau$, pa dobijamo traženu formulu. $\square$

Definicija 6.3 Transformacija proširene euklidske ravni koja je kompozicija konačnog broja uopštenih inverzija je **inverzivna transformacija**.

Svaka izometrija je kompozicija refleksija, pa i inverzivna transformacija. Homotetija se može predstaviti kao kompozicija dve inverzije te je i ona inverzivna transformacija, kao i sličnosti.

Primer 6.6 Neka je $f(z) = \frac{1}{z}$. Tada transformaciju f možemo predstaviti kao kompoziciju $f = S_p \circ \psi_k$, gde je $\psi_k(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ inverzija u odnosu na jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku, a $S_p(z) = \overline{z}$ refleksija u odnosu na x_1-osu. Dakle i f je inverzivna transformacija. $\diamond$

Lako dobijamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 28 *Skup svih inverzivnih transformacija proširene euklidske ravni čini grupu. Grupa sličnosti je podgrupa te grupe.*

Definicija 6.4 Transformacije proširene euklidske ravni date sa

$$m : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

nazivamo **Mebijusovim transformacijama** ili **homografijama**. Kompozicija Mebijusove transformacije i refleksije u odnosu na x_1-osu $m \circ S_p$

$$z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

je **antihomografija**. Skup svih Mebijusovih transformacija označavaćemo sa $\mathcal{M}_1$ a svih antihomografija sa $\mathcal{M}_2$.

Svaka Mebijusova transformacija je određena odgovarajućom invertibilnom kompleksnom matricom

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Pri tom, dve srazmerne matrice određuju isto preslikavanje.

Tvrđenje 29 *Skup svih Mebijusovih transformacija $\mathcal{M}_1$ je grupa.*

Dokaz. Direktnom proverom dobijamo da je kompozicija dve Mebijusove transformacije $m_2 \circ m_1$ sa matricama M_1 i M_2, ponovo Mebijusova transformacija sa matricom $M_2 \circ M_1$, a da je inverz m_1^{-1} Mebijusova transformacija kojoj odgovara matrica M_1^{-1}. $\square$

Tvrđenje 30 *Kompozicija homografije i antihomografije je antihomografija, a kompozicija dve antihomografije je homografija.*

Dokaz. Svaka antihomografija je data sa $z \mapsto m(\overline{z})$ gde je m homografija. Ako je M matrica homografije m, tada je $\overline{m(\overline{z})} = \overline{m}(z)$ homografija sa matricom $\overline{M}$. Neka su m_1 i m_2 dve homografije. Tada su kompozicije homografije $z \mapsto m_2(z)$ i antihomografije $z \mapsto m_1(\overline{z})$ date sa

$$z \mapsto m_2(m_1(\overline{z})) = m_2 \circ m_1(\overline{z}),$$
$$z \mapsto m_1(\overline{m_2(z)}) = m_1(\overline{m_2}(\overline{z})) = m_1 \circ \overline{m_2}(\overline{z}),$$

te su u pitanju homografije. Kompozicija dve antihomografije $z \mapsto m_2(\overline{z})$ i $z \mapsto m_1(\overline{z})$ data je sa

$$z \mapsto m_2(\overline{m_1(\overline{z})}) = m_2(\overline{m_1}(z)) = (m_2 \circ \overline{m_1})(z),$$

pa je u pitanju homografija. $\square$

Tvrđenje 31 *Transformacija proširene euklidske ravni je inverzivna ako i samo ako je homografija ili antihomografija.*

Dokaz. Pokažimo da su Mebijusove transformacije inverzivne. Ako je $c = 0$, a samim tim $ad \neq 0$, transformacija je kompozicija izometrije, videti Tvrđenje 25, i homotetije $H_{O,|a|}$, pa je inverzivno preslikavanje.

Neka je $c \neq 0$. Tada je

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{a}{c}d}{cz+d} = \frac{b - \frac{a}{c}d}{c}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

pa dobijamo kompoziciju inverzivnih preslikavanja.

Kako je svaka antihomografija kompozicija homografije i refleksije onda je i ona inverzivno preslikavanje.

Pokažimo sada obrnuto tvrđenje, odnosno da je svaka inverzivna transformacija homografija ili antihomografija.

Izometrije dobijamo za $c = 0$ i $|a| = 1$.

Inverzija u odnosu na krug $k(S, r)$ gde je kompleksna koordinata tačke S data $c = a+ib$ je

$$\psi_k(z) = \frac{r^2}{\overline{z-c}} + c = \frac{c\overline{z} + (r^2 - c\overline{c})}{\overline{z} - \overline{c}},$$

pa je ψ_k antihomografija. S obzirom da svako inverzivno preslikavanje dobijamo kao kompoziciju inverzija i refleksija, a unija Mebijusovih transformacija i antihomografija je zatvorena za kompozicije dobijamo da važi tvrđenje. $\square$

Primedba 6.7 Svaka inverzija u odnosu na krug je antihomografija, kao i refleksije u odnosu na prave koje sadrže koordinatni početak. Ako prava r ne sadrži koordinatni početak, postoji translacija τ koja je slika u pravu q kroz O. Tada je $S_r = \tau \circ S_q \circ \tau^{-1}$ pa je svaka refleksija antihomografija. Zato je svaka Mebijusova transformacija kompozicija parnog broja uopštenih inverzija, a svaka antihomografija kompozicija neparnog broja uopštenih inverzija. Nazivamo ih redom, **direktnim** i **indirektnim** inverzivnim transformacijama. $\diamond$

S obzirom na osobine osnih refleksija i inverzije važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 32
a) Invertivna preslikavanja slikaju uopštene krugove u uopštene krugove.
b) Invertivna preslikavanja "čuvaju" dvorazmeru.
c) Dve krive koje se seku preslikavaju se invertivnim preslikavanjem u krive koje se seku pod istim uglom. Pri tom, direktne inverzivne transformacije "čuvaju" orijentaciju uglova, a indirektne menjaju.

7 Hiperbolička geometrija

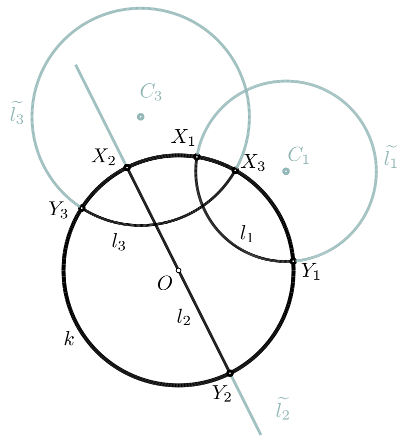
U ovoj glavi bavićemo se hiperboličkom geometrijom ravni i to putem jednog od njenih modela, Poenkareovog disk modela.

7.1 Poenkareov disk model

Posmatrajmo jedinični krug $k : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ euklidske ravni $\mathbb{E}^2$. U kompleksnim koordinatama on je dat jednačinom $|z| = 1$. Tačke Poenkareovog disk modela, koje ćemo nazivati h-**tačkama**, su tačke unutrašnjosti ovog kruga $\mathbb{D}^2 = \{z||z| < 1\}$. Skup svih h-tačaka je h-**ravan**, a sam krug nazivamo **apsolutom**. Specijalno, tačku O datu sa $z = 0$ nazivamo centrom apsolute.

h-**prave.** Neka je $\widetilde{l}$ uopšteni krug ravni $\mathbb{E}^2$, normalan na apsolutu k. Tada $\widetilde{l}$ i k imaju dve zajedničke tačke X i Y.

Tada je $\widetilde{l}$ u euklidskom smislu prava ako i samo ako $\widetilde{l}$ sadrži centar apsolute O. Skup tačaka uopštenog kruga $\widetilde{l}$ koje su ujedno i h-tačke je h-**prava** i označavaćemo je sa l. Tačke preseka apsolute i $\widetilde{l}$, X i Y, nazivamo **beskonačno dalekim tačkama** h-prave l.



Sl. 7.1 h-prave

Ako je $\widetilde{l}$ u euklidskom smislu prava, koja onda sadrži tačku O i ako je θ ugao koji $\widetilde{l}$ određuje sa x_1 osom, onda je jednačina $\widetilde{l}$ data sa

$$\sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = 0.$$

Neka je $\widetilde{l}$ u euklidskom smislu krug i neka je njegov centar C dat koordinatom $c = a + ib$, a poluprečnik r. Ako je X jedna zajednička tačka krugova k i $\widetilde{l}$ trougao OXC je pravougli, pa je $1 + r^2 = |c|^2$. Zato je krug $\widetilde{l}$ dat jednačinom $|z - c| = r$, tj. $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$, odnosno

$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0.$$

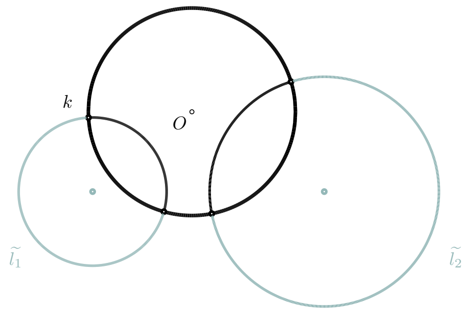
Uočimo da za dve razne h-tačke A i B postoji tačno jedna h-prava l koja ih sadrži. Tada $\widetilde{l}$ sadrži i tačke $\psi_k(A)$ i $\psi_k(B)$.

Ako je $\widetilde{l}$ u euklidskom smislu krug, smatramo da je h-tačka A h-**između** h-tačaka B i C ako pripada luku BC kruga $\widetilde{l}$ koji je podskup unutrašnjosti apsolute. Ako je $\widetilde{l}$ u euklidskom smislu prava, h-tačka A h-**između** h-tačaka B i C ako je i euklidski A između B i C. Sve h-tačke A koje su h-između B i C je h-duž BC.

Ako uopšteni krug $\widetilde{l}$ seče apsolutu u tačkama X i Y i sadrži h-tačku A, onda su skupovi tačaka otvorenih lukova $\widehat{AX}$ i $\widehat{AY}$ koji pripadaju h-ravni, **otvorene h-poluprave**.

Međusobni položaj dve h-prave. Dva razna uopštena kruga $\widetilde{l}_1$ i $\widetilde{l}_2$ koji određuju h-prave, l_1 i l_2 mogu da imaju zajedničke najviše dve tačke.

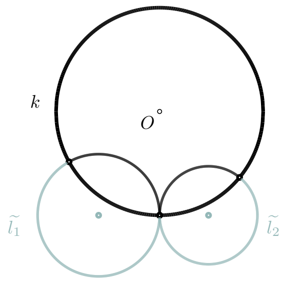
Ako nemaju zajedničkih tačaka, tada se ni l_1 i l_2 ne seku. Tada kažemo da su l_1 i l_2 **hiperparalelne**.



Sl. 7.2 Hiperparalelne h-prave

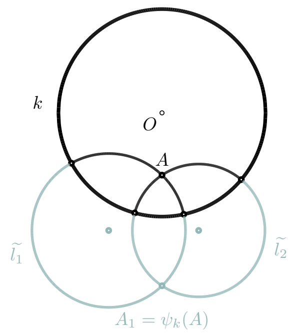
S obzirom da se inverzijom u odnosu na krug k, $\widetilde{l}_1$ i $\widetilde{l}_2$ slikaju u sebe, ako je skup zajedničkih tačaka neprazan, on se slika u sebe.

Zato, ako se $\widetilde{l}_1$ i $\widetilde{l}_2$ dodiruju u jednoj tački, ona je invarijantna za inverziju, pa pripada apsoluti k i nije h-tačka. Tada kažemo da su l_1 i l_2 **paralelne** prave.



Sl. 7.3 Paralelne h-prave

Ako se $\widetilde{l}_1$ i $\widetilde{l}_2$ seku u dve tačke, jedna pripada unutrašnjosti, a druga spoljašnjosti apsolute, pa se l_1 i l_2 seku u jednoj tački. Tada kažemo da su one **konkurentne**.

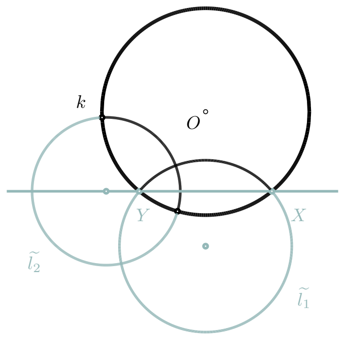


Sl. 7.4 Konkurentne h-prave

Ugao. Mera ugla između dve h-prave je njegova euklidska mera, odnosno, ugao između dve h-prave l_1 i l_2 je ugao između tangenti na l_1 i l_2 u presečnoj tački.

h-normale. Neka je l_1 h-prava sa beskonačno dalekim tačkama X i Y. Tada je uopšteni krug $\widetilde{l_1}$ normalan na apsolutu k. Odredimo h-pravu l_2 normalnu na l_1. Ako je $\widetilde{l_1}$ euklidski prava, tada je $\widetilde{l_2}$ ili prava ortogonalna na $\widetilde{l_1}$ u O ili krug sa centrom C koji pripada pravoj $\widetilde{l_1}$. Pri tom je njegov poluprečnik $r = \sqrt{OC^2 - 1}$.

Neka je $\widetilde{l_1}$ krug. Ispitajmo kada je uopšteni krug $\widetilde{l_2}$ ortogonalan na k i $\widetilde{l_1}$.



Sl. 7.5 $l_2 \perp l_1$

Ako je $\widetilde{l_2}$ prava, tada ona sadrži centre krugova $\widetilde{l_1}$ i k. Ako je $\widetilde{l_2}(C, r)$ krug, tada tačka C ima istu potenciju r^2 prema krugovima $\widetilde{l_1}$ i k, pa tačka C pripada radikalnoj osi XY ovih krugova, a ne pripada duži XY. Pri tom važi $OC^2 = 1 + r^2$.

Ako krug $\widetilde{l_2}$ sadrži h-tačku A, tada, s obzirom da je ortogonalan na k sadrži i tačku $\psi_k(A) = A'$.

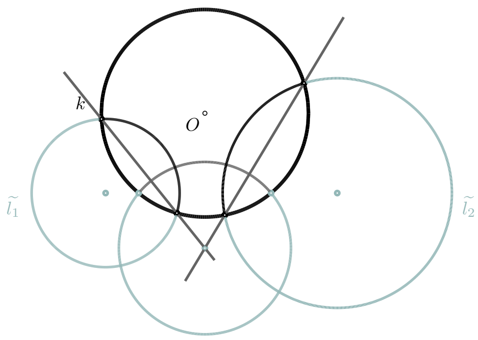
Sada lako sledi naredno tvrđenje.

Teorema 34 *Postoji jedinstvena h-prava n koja sadrži datu h-tačku A i normalna je na datu h-pravu a.*

Pravu n nazivamo **h-normalom**. Ako je A_0 zajednička tačka pravih n i a, tada je A_0 **h-projekcija** h-tačke A na h-pravu a.

Tvrđenje 33 *Dve h-prave l_1 i l_2 su hiperparalelne ako i samo ako imaju zajedničku h-normalu. Pri tom, ta normala je jedinstvena.*

Dokaz. Dokažimo tvrđenje u slučaju da su $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$ krugovi. Ako je $\widetilde{l}$ ortogonalan na $\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ i k onda njegov centar pripada radiklanim osama parova krugova $\widetilde{l_1}, k$ i $\widetilde{l_2}, k$.



Sl. 7.6 Zajednička h-normala za l_1 i l_2

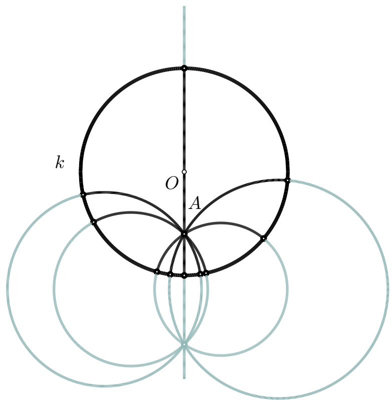
Ako se ove ose seku u tački C, krug $\widetilde{l}(C, r)$ gde je r^2 potencija tačke C u odnosu na k je ortogonalan $\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ i k te određuje zajedničku h-normalu za l_1 i l_2. Pri tom, $\widetilde{l}$ je jedini krug sa ovom osobinom, a tada ne postoji ni (euklidska) prava ortogonalna na $\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ i k, jer su im centri nekolinearne tačke.

Obrnuto, ako postoji krug $\widetilde{l}$ ortogonalan i na $k, \widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$, njegov centar C pripada radikalnoj osi za $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$, te ako $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$ imaju zajedničkih tačaka, onda l_1 i l_2 imaju ili iste obe beskonačno daleke tačke pa se poklapaju, ili se dodiruju u beskonačno dalekoj tački, ali tada se potencije C u odnosu na $\widetilde{l_1}$ i k razlikuju. Dakle tada su l_1 i l_2 hiperparalelne.

Ako se radikalne ose parova krugova $\widetilde{l_1}, k$ i $\widetilde{l_2}, k$ ne seku, nego su (euklidski) paralelne prave, tada ne postoji krug $\widetilde{l}$ ortogonalan na $\widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ i k. Sa druge strane, tada su centri ovih krugova (euklidski) kolinearne tačke i pripadaju pravoj $\widetilde{p}$, koja određuje h-pravu p ortogonalnu na l_1 i l_2. Pri tom, $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$ nemaju zajedničkih tačaka, pa su l_1 i l_2 hiperparalelne.

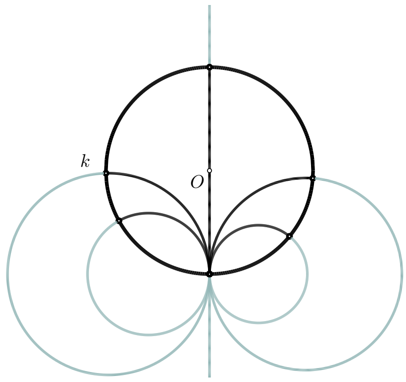
U ostalim slučajevima tvrđenje se dokazuje na sličan način. $\square$

Ako je A h-tačka, tada skup svih h-pravih koje sadrže A nazivamo **pramenom konkurentnih** pravih ili **eliptičkim** pramenom pravih, sa centrom u A i označavamo $\mathfrak{X}_A$.



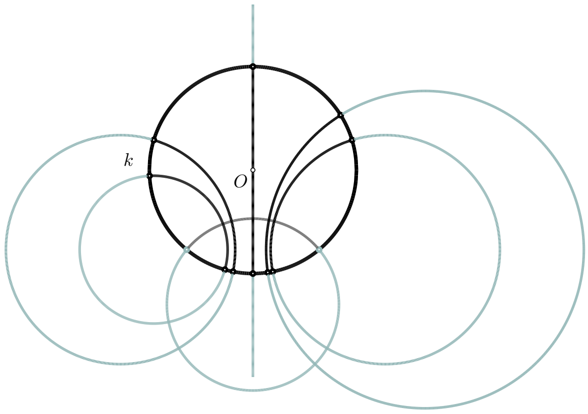
Sl. 7.7 h-prave eliptičkog pramena

Ako je X tačka apsolute, svi uopšteni krugovi koji sadrže X i koji određuju h-prave se dodiruju u tački X. Zato sve h-prave koje imaju zajedničku beskonačno daleku tačku X nazivamo **pramenom paralelnih** pravih ili **paraboličkim** pramenom, sa centom u X. Njega označavamo sa $\mathfrak{X}_X$.



Sl. 7.8 h-prave paraboličkog pramena

Ako je s h-prava, tada skup svih h-pravih normalnih na s nazivamo **pramenom hiperparalelnih** pravih, odnosno **hiperboličkim** pramenom i označavamo sa $\mathfrak{X}_s$.

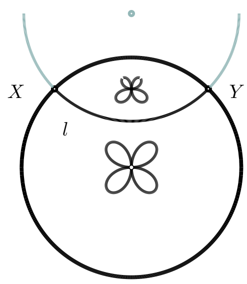


Sl. 7.9 h-prave hiperboličkog pramena

Uočimo da za dve razne h-prave postoji tačno jedan pramen $\mathfrak{X}$ koji ih sadrži.

h-refleksije. Neka je l h-prava. Tada je $\widetilde{l}$ uopšteni krug ortogonalan na apsolutu k. Uopštena inverzija $\psi_{\widetilde{l}}$ u odnosu na $\widetilde{l}$ tada slika krug k u sebe. Pri tom, h-tačke h-prave l su invarijantne za ovo preslikavanje. h-prava l razlaže unutrašnjost kruga k na dve oblasti koje se preslikavanjem $\psi_{\widetilde{l}}$ slikaju jedna u drugu.

Restrikciju $\psi_{\widetilde{l}}$ na h-ravan nazivamo h**-refleksijom** i označavamo sa S_l.



Sl. 7.10 h-refleksija

Definicija 7.1 Kompozicija konačnog broja h-refleksija je h**-izometrija**. Ukoliko je h-izometrija kompozicija parnog broja h-refleksija onda je ona **direktna**, a ako je kompozicija neparnog broja h-refleksija **indirektna** h-izometrija.

Sledeće tvrđenje sledi direktno.

Tvrđenje 34 *Skup svih h-izometrija je grupa.*

Zbog osobina uopštenih inverzija važi i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 35 *Svaka h-izometrija slika h-kolinearne tačke u h-kolinearne tačke i čuva raspored. Slika h-prave u h-prave. Pri tom, uglovi između dve h-prave i njihovih slika su jednaki. Konkurentne, paralelne, odnosno hiperparalelne h-prave se slikaju redom u konkurentne, paralelne, odnosno hiperparalelne h-prave.*

Neka je h-prava l data jednačinom $\sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = 0$. Nađimo fomule h-refleksije u odnosu na nju. S obzirom da je $\widetilde{l}$ (euklidski) prava koja sadrži tačku O tražene formule su formule euklidske refleksije u odnosu na pravu $\widetilde{l}$ odnosno formula h-refleksije je

$$S_l(z) = e^{2i\theta}\overline{z}. \tag{20}$$

Ako je h-prava l data jednačinom

$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0,$$

odnosno određena euklidskim krugom sa centrom u $c = a + \imath b$ i poluprečnikom $r^2 = |c|^2 - 1$ onda su formule inverzije $\psi_{\widetilde{l}}$, a samim tim i S_l date sa $z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{c}} + c = \frac{r^2+\overline{z}c-|c|^2}{\overline{z}-\overline{c}} = \frac{c\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{c}}$, odnosno

$$S_l(z) = \frac{c\overline{z} - 1}{\overline{z} - \overline{c}}. \tag{21}$$

Primedba 7.1 Uočimo da su (20) i (21) antihomografije, koje pri tom slikaju $\mathbb{D}^2$ u $\mathbb{D}^2$. Pri tom, oba se mogu zapisati i kao $z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{\overline{b}\overline{z}+\overline{a}}$, gde je u prvom slučaju $a = e^{\imath\theta}, b = 0$, a u drugom $a = \imath c, b = -\imath$.

S obzirom da su kompozicije antihomografija inverzivna preslikavanja, vidimo da su sve h-izometrije inverzivna preslikavanja koja slikaju $\mathbb{D}^2$ u sebe.

Sa druge strane, direktnim računom se može pokazati da za homografije $m : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ u kojima je apsoluta k invarijantna, postoje koeficijenti a, b, c, d takvi da je $c = \overline{b}, d = \overline{a}$ (proveriti!). Pri tom, uslov da se i $\mathbb{D}^2$ slika u sebe je ekvivalentan uslovu $m(O) \in \mathbb{D}^2$, odnosno $|b| < |a|$.

Simetrija $S_p : z \mapsto \overline{z}$ je jedna antihomografija koja slika $\mathbb{D}^2$ u sebe. Ako je $\mathcal{I}$ bilo koja druga antihomografija za koju je skup $\mathbb{D}^2$ invarijantan $\mathcal{I} \circ S_p$ je homografija koja slika $\mathbb{D}^2$ u sebe, odnosno oblika (22).

Dakle, inverzivna preslikavanja koje slikaju $\mathbb{D}^2$ u sebe su m i $m \circ S_p$ gde je

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, |b| < |a|, \\ S_p(z) &= \overline{z}. \end{aligned} \tag{22}$$

◇

Teorema 35 *Direktne h-izometrije su date sa* $m(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$, *gde* $a, b \in \mathbb{C}$ *i* $|b| < |a|$, *a indirektne* $z \mapsto m(\overline{z})$.

Dokaz. Direktne, odnosno indirektne izometrije su homografije, odnosno antihomografije koje slikaju $\mathbb{D}^2$ u sebe, te moraju biti datog oblika. Pokažimo da važi i obrnuto, odnosno da je svaka homografija (antihomografija) ovog oblika ujedno i h-izometrija.

Neka je $m(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, |b| < |a|$ homografija određena matricom

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Pokažimo da je ona kompozicija dve h-refleksije.

Neka je $b = 0$. Tada možemo smatrati $a = e^{i\theta}$. Kompozicija $m \circ S_p : z \mapsto m(\overline{z})$ je antihomografija sa matricom M i predstavlja h-refleksiju u odnosu na h-pravu q koja određuje ugao θ sa x_1-osom. Zato je $m = S_q \circ S_p$.

Ako $b \neq 0$, neka je $c = -\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ i $S_l : z \mapsto \frac{c\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{c}}$. Tada je $m \circ S_l$ antihomografija sa matricom

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -1 \\ 1 & -\overline{c} \end{bmatrix} = \Big(\frac{|a|^2}{|b|^2} - 1\Big) \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{bmatrix},$$

odnosno h-refleksija u odnosu na h-pravu q koja sadrži tačku O. Zato je $m = S_q \circ S_l$. Zato su sve homografije ovog oblika ujedno i direktne h-izometrije. Svaka antihomografija je tada $m \circ S_p$ odnosno kompozicija tri h-refleksije. $\square$

Primedba 7.2 Dakle, grupa h-izometrija hiperboličke ravnije podgupa grupe inverzivnih transformacija. Pri tom, pokazali smo i da se svaka direktna h-izometrija može predstaviti kao kompozicija dve h-refleksije, a svaka indirektna je kompozicija do tri h-refleksije. $\diamond$

Tvrđenje 36 *Neka je A h-tačka različita od centra apsolute O. Tada postoji jedinstvena h-refleksija S_l koja slika A u O.*

Dokaz. Neka je l h-prava koja ne sadrži tačku O, određena krugom $\widetilde{l}$ sa centrom u C i koordinatom $c = a + \imath b$. Tada je $S_l(O) = \frac{1}{\overline{c}}$, videti (21). Ako je $A \neq O$ h-tačka i w njena kompleksna koordinata, sledi da je $c = \frac{1}{\overline{w}}$, centar euklidskog kruga $\widetilde{l}$ koji određuje h-pravu l takvu da je $S_l(A) = O$. $\square$

Definicija 7.2 h-prava l takvu da se h-refleksijom S_l tačka A slika u B je h-simetrala duži AB.

Dakle, ako je jedna od tačaka A i B centar apsolute pokazali smo da postoji jedinstvena h-simetrala te duži. Ako je S_q refleksija kojom se A slika u O a B u B_1 i l_1 h-simetrala duži OB_1, tada je h-prava $S_q(l)$ simetrala duži AB. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 37 *Neka su A i B dve razne h-tačke. Tada postoji jedinstvena h-simetrala duži AB.*

Primedba 7.3 Ako je w kompleksna koordinata tačke $A \neq O$ tada je formula h-refleksije kojom se A slika u O data sa $S_l(z) = \frac{\frac{1}{\overline{w}}\overline{z}-1}{\overline{z}-\frac{1}{\overline{\overline{w}}}} = \frac{\frac{1}{\overline{w}}\overline{z}-1}{\overline{z}-\frac{1}{w}}$ odnosno

$$S_l(z) = \frac{w}{\overline{w}} \frac{\overline{z} - \overline{w}}{w\overline{z} - 1}. \tag{23}$$

$\diamond$

Primedba 7.4 Neka je $\mathcal{I}$ h-izometrija. Tada je $\mathcal{I}$ restrikcija homografije $\widetilde{\mathcal{I}}$, odnosno antihomografije proširene euklidske ravni. Svaka direktna (odnosno indirektna) transformacija $\widetilde{\mathcal{I}}$ je određena na jedinstven način slikama tri tačke proširene euklidske ravni. Ako je tačka A sa koordinatom z invarijantna za $\widetilde{\mathcal{I}}$, direktno dobijamo i da je $\psi_k(A) = A'$ sa koordinatom $\frac{1}{\overline{z}}$ invarijantna za $\widetilde{\mathcal{I}}$. $\diamond$

Indirektne h-izometrije. Potražimo invarijantne tačke indirektne h-izometrije $\mathcal{I}$ i odgovarajuće antihomografije. Naglasimo da ukoliko $\widetilde{\mathcal{I}}$ ima bar jednu invarijantnu tačku A koja ne pripada apsoluti, tada je i $\psi_k(A) \neq A$ takođe invarijantna tačka.

Ako je $z \in \mathbb{C}$ koordinata invarijantne tačke, tada je za $a = |a|e^{\imath\alpha}$, $z = |z|e^{\imath\phi}$ i $b = b_1 + \imath b_2$

$$
\begin{aligned}
&a\overline{z} - \overline{a}z = \overline{b}|z|^2 - b, \\
&2Im\ a\overline{z} = b_1(|z|^2 - 1) - \imath b_2(|z|^2 + 1), \\
&b_1(|z|^2 - 1) = 0, \quad 2|z|\sin(\phi - \alpha) = \frac{b_2}{|a|}(|z|^2 + 1).
\end{aligned} \tag{24}
$$

1. Pretpostavimo, prvo da je $b_1 = 0$ i pokažimo da je tada data transformacija h-refleksija. Naime, ako je $b = 0$, onda je $\mathcal{I}$ očigledno refleksija u odnosu na pravu kroz O. Ako pretpostavimo da je $b \neq 0$ onda je transformacija $\mathcal{I}$ data sa

$$z \mapsto \frac{-a/b\overline{z} - 1}{-\overline{b}/b\overline{z} - \overline{a}/b}, \tag{25}$$

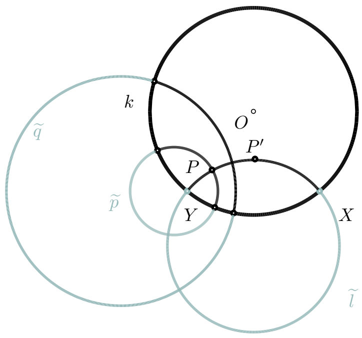
pa kako je $Re\ b = 0$, sledi da je u pitanju h-refleksija u odnosu na h-pravu koja pripada euklidskom krugu sa centrom $C(-\frac{a}{b})$.

Obratno, ako je transformacija h-refleksija, onda ona ima invarijantne h-tačke, za koje važi da je $|z| < 1$, pa iz prve jednakosti (24) sledi da je $b_1 = 0$.

Dakle, pokazali smo da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 38 *Neka je $\mathcal{I}$ indirektna h-izometrija $z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{\overline{b}\overline{z}+\overline{a}}$. Tada:*
a) $\mathcal{I}$ je refleksija ako i samo ako je $Re\ b = 0$;
b) $\mathcal{I}$ je refleksija ako i samo ako ima bar jednu invarijantnu tačku.

2. Ako indirektna h-izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih h-tačaka, tada je $b_1 \neq 0$ i transformacija $\mathcal{I}$ može imati invarijantne tačke samo na apsoluti k. Dakle tada je $|z| = 1$, a $\sin(\phi - \alpha) = \frac{b_2}{|a|}$. Za argument ϕ imamo dva rešenja $\phi_1 = \arcsin(\frac{b_2}{|a|}) + \alpha$ i $\phi_2 = \pi - \arcsin(\frac{b_2}{|a|}) + \alpha$, odnosno postoje dve invarijantne beskonačno daleke tačke X i Y. Tada se i h-prava l (ortogonalna na apsolutu) određena tačkama X i Y slika u sebe.



Sl. 7.11 Razlaganje klizajuće refleksije na h-refleksije

Neka je $P \in l$ h-tačka i $P' = \mathcal{I}(P)$. Neka je p h-prava ortogonalna na l u P i q h-simetrala duži PP'. h-refleksija S_p slika pravu l u sebe, a h-polupravu PX u h-polupravu PY, pa odgovarajuća antihomologija slika tačku X u Y i obrnuto. Zato je kompozicija $S_p \circ S_q \circ S_l$ restrikcija antihomologije koja ima invarijantne tačke X i Y, a pri tom slika tačku P u P' i dalje je $\mathcal{I} = S_p \circ S_q \circ S_l$. Ovu transformaciju zovemo **klizajućom refleksijom** $\mathcal{G}_{l,\overrightarrow{PP'}}$ duž prave l za vektor $\overrightarrow{PP'}$.

Direktne h-izometrije. Neka je $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ direktna h-izometrija. Ako je A invarijantna tačka homologije $\widetilde{\mathcal{I}}$ onda je to i $\psi_k(A)$. Stoga, ako transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih h-tačaka, onda $\widetilde{\mathcal{I}}$ može imati invarijantne samo tačke koje pripadaju apsoluti, pri tom ne više od dve.

Ako se h-tačka A slika h-refleksijom S_{l_1} u h-tačku $A_1 \neq A$, tada je l_1 h-simetrala duži AA_1. Ako je $S_{l_2}(A_1) = A$ tada je i l_2 h-simetrala duži AA_1 pa je $l_1 = l_2$. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 39 *Ako su l_1 i l_2 razne h-prave tada je h-tačka A invarijantna za $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ ako i samo ako se l_1 i l_2 seku u A.*

Sada ćemo, na osnovu međusobnog položaja h-pravih $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$, odnosno, na osnovu broja invarijantnih tačaka homologije $\widetilde{\mathcal{I}}$ i njihovog položaja klasifikovati direktne h-izometrije.

1. Ako je $l_1 = l_2$, onda je $\mathcal{I}$ **identičko preslikavanje** ili **koincidencija** i označavamo je ε. Sve h-tačke su invarijantne.

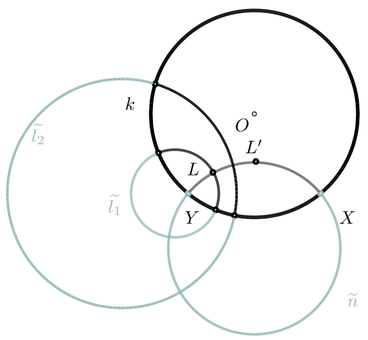
2. Ako neidentička transformacija ima bar jednu invarijantnu h-tačku A, onda se l_1 i l_2 seku u h-tački A, a tačka $\psi_k(A) = A'$ je invarijantna i za $\widetilde{\mathcal{I}}$, videti sliku 7.4. Ako bi $\widetilde{\mathcal{I}}$ pored ove dve tačke imala još neku invarijantnu tačku bila bi identičko preslikavanje. Zato ne postoje ni beskonačno daleke invarijantne tačke.

   Proizvoljna h-tačka X se transformacijom $\mathcal{I}$ slika u tačku X' takvu da je ugao α između h pravih AX i AX' jednak dvostrukom uglu između h-pravih l_1 i l_2. Transformaciju $\mathcal{I}$ nazivamo **centralnom rotacijom**, sa centrom A za ugao α i označavamo sa $\mathcal{R}_{A,\alpha}$. Znači važi tvrđenje.

   Tvrđenje 40 *Neidentička direktna h-izometrija $\mathcal{I}$ je rotacija ako i samo ako $\mathcal{I}$ ima invarijantnu bar jednu h-tačku. Tada je ta h-tačka jedinstvena invarijantna za $\mathcal{I}$.*

3. Ako su X i Y dve beskonačno daleke invarijantne tačke i n h-prava njima određena, tada je n invarijantna za $\mathcal{I}$.

   Neka je l_1 ortogonalna na n u L i neka je $\mathcal{I}(L) = L_1$, a h-prava l_2 h-simetrala h-duži LL_1. Tada je kompozicija $S_{l_2} \circ S_{l_1}$ restrikcija homografije kojom se tačke X, Y, L slikaju redom u X, Y i L_1, pa je $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$. h-prave l_1 i l_2 su hiperparalelne. Transformaciju $\mathcal{I}$ nazivamo **translacijom** za vektor $\overrightarrow{LL_1}$ i označavamo $\tau_{\overrightarrow{LL_1}}$.



Sl. 7.12 Razlaganje translacije na h-refleksija

Obratno, ako su l_1 i l_2 hiperparalelne prave, ortogonalne na n i X i Y beskonačno daleke tačke prave n, tada $\widetilde{\mathcal{I}}$ neidentička transformacija koja slika tačke X i Y u sebe, te je u pitanju translacija.

4. Ukoliko su prave l_1 i l_2 paralelne sa zajedničkom beskonačno dalekom tačkom X tada je X invarijantna za $\widetilde{\mathcal{I}}$, videti sliku 7.3. Dakle ne postoji transformacija $\widetilde{\mathcal{I}}$ bez invarijantnih tačaka. Uopšteni krugovi $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$ se dodiruju u tački X, te njihovi centri pripadaju euklidskoj pravoj koja u X dodiruje k. Ako bi postojala još neka beskonačno daleka invarijantna tačka Y, tada bi važilo $\psi_{\widetilde{l_1}}(Y) = \psi_{\widetilde{l_2}}(Y) = Y_1 \neq Y$, pa bi centri $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_1}$ pripadali pravoj koja seče k u tačkama Y i Y_1. Zato transformacija $\widetilde{\mathcal{I}}$ ima samo jednu beskonačno daleku invarijantnu tačku. h-izometrija $\mathcal{I}$ je **oriciklička rotacija** odnosno **paralelno pomeranje**. Označavamo ga sa $\mathcal{R}_{X,L,L_1}$ gde je L proizvoljna tačka, a L_1 njena slika.

   Pokažimo da i u ovom slučaju možemo $\mathcal{R}$ da predstavimo kao kompoziciju $S_{l_2} \circ S_{l_1}$, gde je l_2 proizvoljna prava sa beskonačno dalekom tačkom X. Neka je L_1 proizvoljna h-tačka h-prave l_2 i $L = \mathcal{R}^{-1}(L_1)$, a l_1 h-simetrala duži LL_1. Tada je kompozicija $\mathcal{R} \circ S_{l_1}$ indirektna transformacija sa bar jednom invarijantnom h-tačkom L_1, pa je u pitanju osna refleksija S_q, gde $L_1 \in q$. Tada je $\mathcal{R} = S_q \circ S_{l_1}$. S obzirom da $\widetilde{\mathcal{R}}$ ima samo jednu invarijantnu tačku, beskonačno daleku X, h-prave l_1 i q su takođe paralelne, sa istom beskonačno dalekom tačkom X. Zato je $q = l_2$ i $\mathcal{R} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

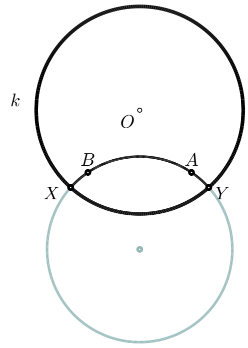
Primer 7.5 Neka su l_1 i l_2 dve prave koje se seku u O a redom određuju uglove θ_1 i θ_2 sa x_1-osom. Tada je $S_{l_2} \circ S_{l_1} : z \mapsto e^{2\imath\theta_2}\overline{(e^{2\imath\theta_1}\overline{z})} = e^{2\imath(\theta_2-\theta_1)}z$. Dakle, h-rotacija oko tačke O za dati ugao je restrikcija euklidske rotacije za isti ugao. $\diamond$

izometrija	inv. h-tačke	inv. b.d. tačke	direktnost
ε	sve	sve	$+$
$\tau_{\overrightarrow{LL_1}}$	$\emptyset$	$X, Y \in \widetilde{LL_1}$	$+$
$R_{A,\alpha}$	A	$\emptyset$	$+$
R_{X,L,L_1}	$\emptyset$	X	$+$
S_p	tačke prave p	$X, Y \in \widetilde{p}$	$-$
$\mathcal{G}_{p,\overrightarrow{LL_1}}$	$\emptyset$	$X, Y \in \widetilde{p}$	$-$

Tab. 7.1 h-izometrije hiperboličke ravni

7.2 Funkcija rastojanja.

Definicija 7.3 Neka su A, B h-tačke i X i Y beskonačno daleke tačke prave koja sadrži tačke A i B, takve da tačka B pripada h-polupravoj AX. Rastojanje u Poenkareovom disk modelu je dato sa $d_h(A, B) = \ln(\frac{AX}{AY} : \frac{BX}{BY})$.



Sl. 7.13 $d_h(A, B) = \ln(\frac{AX}{AY} : \frac{BX}{BY})$

Sledeće tvrđenje ostavljamo bez dokaza.

Tvrđenje 41 *Preslikavanje d_h jeste funkcija rastojanja.*

Neka je $\widetilde{l}$ uopšteni krug ortogonalan na apsolutu. S obzirom da uopštena inverzija $\psi_{\widetilde{l}}$ slika h-pravu u h-pravu, čuva h-raspored tačaka i dvorazmeru, direktno sledi i naredno tvrđenje.

Tvrđenje 42 *Neka je $\mathcal{I}$ h-izometrija, A i B dve h-tačke i $\mathcal{I}(A) = A', \mathcal{I}(B) = B'$. Tada je $d_h(A, B) = d_h(A', B')$.*

Primer 7.6 Neka je A h-tačka čija je kompleksna koordinata z i O centar apsolute. Neka su X i Y beskonačno daleke tačke h-prave OA takve da tačka A pripada polupravoj OY. Tada je $AX = 1+|z|$, $AY = 1-|z|$, $OX = OY = 1$. Veza između hiperboličkog rastojanja d i euklidskog $|z|$ tačaka O i A data sa $d = d_h(O, A) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$.

Tada je i

$$|z| = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}, \tag{26}$$

odnosno $|z| = \tanh \frac{d}{2}$, tj. $d = 2 \operatorname{arctanh} |z|$. ◇

Teorema 36 *Neka su z_1 i z_2 koordinate h-tačaka A i B. Tada je*

$$d_h(A, B) = 2 \operatorname{arctanh} |\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \overline{z_2}}|.$$

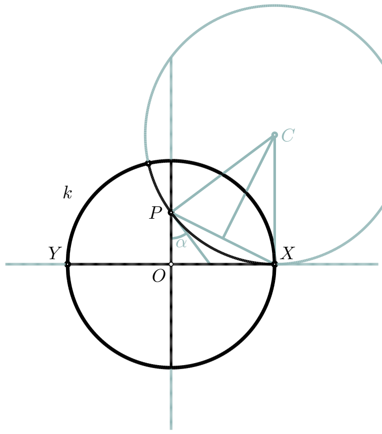
Dokaz. Neka je S_l h-refleksija kojom se tačka A slika u centar apsolute O. Data je formulom $S_l(z) = \frac{z_1}{\overline{z_1}} \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{z_1 \overline{z} - 1}$, videti (23), a tačka $S_l(B) = B'$ ima koordinatu $b' = \frac{z_1}{\overline{z_1}} \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{z_1 \overline{z_2} - 1}$. Tada je $|b'| = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \overline{z_2}|}$, pa je

$$d_h(A,B) = d_h(O,B') = 2\operatorname{arctanh}|b'| = 2\operatorname{arctanh}\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}.$$

$\square$

Primer 7.7 Neka je $M \neq O$ h-tačka sa kompleksnom koordinatom z i M_1 h-središte duži OM_1, sa koordinatom z_1. S obzirom da je $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ važi da je $|z| = \frac{2|z_1|}{1+|z_1|^2}$, odnosno $|z_1| = \frac{1-\sqrt{1-|z|^2}}{|z|}$. $\diamond$

Ugao paralelnosti. Neka su p i q dve h-prave međusobno ortogonalne u centru apsolute O. Tada su i uopšteni krugovi $\widetilde{p}$ i $\widetilde{q}$ (euklidski) prave normalne u O. Neka je $P \in q$ h-tačka. Nađimo h-prave koje sardže tačku P i paralelne su p. Neka su X i Y beskonačno daleke tačke h-prave p.



Sl. 7.14 Prava paralelna p kroz P

Ako je h-prava r paralelna p tako što $X \in \widetilde{r}$, tada je $\widetilde{r}$ ili prava koja sadrži O, odnosno $r = p$ ili krug čiji centar C pripada pravoj kroz X paralenoj $\widetilde{q}$.

S obzirom da $P \neq p$, $\widetilde{r}$ je euklidski krug. Pri tom, tačka C pripada i simetrali duži PX, pa postoji jedinstven krug $\widetilde{r}$ koji ispunjava tražene uslove.

Kako se h prave p i q h-refleksijom S_q, odnosno euklidskom refleksijom $S_{\widetilde{q}}$ slikaju u sebe, a h-poluprava OX u h-polupravu OY, sledi da postoji i jedinstvena h-prava r_1 kroz P paralelna p tako što je Y njena beskonačno daleka tačka.

Neka su A i a redom h-tačka i h-prava i A' podnožje h-normale koja sadrži tačku A na h-pravu a. Kako postoji h-refleksija S_l kojom se tačka A' slika u centar apsolute O, a osobine kao kolinearnost, ortogonalnost i paralelnost su invarijantne za h-refleksije, prave koje sadrže tačku A i paralelne su a slikaju se u prave koje sadrže $S_l(A)$ i paralelne su p.

Takođe, uočimo da prave r i r_1 određuju oštre uglove sa pravom q koji su međusobno h-simetrični u odnosu na q, odnosno jednaki i pri tom, na jedinstven način određeni sa $d_h(P,O)$. Ova osobina je očuvana h-refleksijom S_l.

Zato važi sledeća teorema.

Teorema 37 *Neka su A i a h-tačka i h-prava. Ako tačka A ne pripada pravoj a, onda postoje tačno dve h prave koje sadrže A i paralelne su a. Pri tom je simetrala ugla kojeg r i r_1 određuju, a koji sadrži pravu a ujedno normalna na a.*

Ako tačka A pripada pravoj a, prava a je jedinstvena prava incidentna sa A i paralelna a.

Definicija 7.4 Neka tačka A ne pripada h-pravoj a, i neka su A i r podnožje normale iz A na a i h-prava koja sadrži A i paralelna je a. Oštar ugao koji određuju prave AA' i r naziva se **uglom paralelnosti** za rastojanje $d = d_h(A, A')$. Preslikavanje $\Pi : R^+ \to (0, \frac{\pi}{2})$ kojom se d slika u odgovarajući ugao paralelnosti je funkcija **Lobačevskog**.

Neka je p h-prava kroz centar apsolute sa beskonačnom tačkom X, P h-tačka takva da je h-prava PO normalna na p i C centar euklidskog kruga $\widetilde{r}$ takvog da r sadrži P i pripada paraboličkom pramenu sa centrom u X, videti sliku 7.14. Euklidski trougao CPX je jednakokraki. Neka je ugao pri vrhu jednak 2ϕ. On je u krugu $\widetilde{r}$ centralni nad tetivom PX, pa je ugao $\angle OXP$, kao ugao između tetive i tangente jednak ϕ. Tangenta u tački P na $\widetilde{r}$ razlaže ugao $\angle OPX$ na dva ugla. Jedan je ugao između h-pravih OP i r, označimo ga sa α, a drugi je takođe ugao između tetive i tangente kruga $\widetilde{r}$, pa je jednak ϕ. Zato je $2\phi + \alpha = \frac{\pi}{2}$. Pri tom, iz pravouglog euklidskog trougla OPX vidimo da važi $PO = \tan\phi = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$. Ako je $d = d_h(O, P)$, tada je $OP = \frac{e^d-1}{e^d+1}$, odakle je $e^d \tan\frac{\alpha}{2} = 1$. S obzirom da je $\alpha = \Pi(d)$ dobijamo da važi $e^{-d} = \tan\frac{\Pi(d)}{2}$, odnosno

$$\Pi(d) = 2\arctan(e^{-d}). \tag{27}$$

Primedba 7.8 Uočimo da za $d \to 0^+$ važi $\Pi(d) \to \frac{\pi}{2}^-$, ugao paralelnosti u hiperboličkom smislu teži uglu paralelnosti u euklidskom smislu. Zato možemo smatrati da se u hiperboličkoj ravni na vrlo malim rastojanjima realizuje euklidska geometrija. $\diamond$

Na osnovu formule (27) direktno sledi tvrđenje.

Tvrđenje 43 *Funkcija Lobačevskog je monotono opadajuća, odnosno važi:*

$$d_1 > d_2 \Leftrightarrow \Pi(d_1) < \Pi(d_2).$$

7.3 Epicikli

Definicija 7.5 Neka je A h-tačka i $\mathfrak{X}$ pramen pravih. Ukoliko je $\mathfrak{X}$ eliptički pramen pretpostavljamo da A nije njegov centar. Skup svih tačaka osnosimetričnih tački A u odnosu na prave pramena $\mathfrak{X}$ je **epicikl**.

Ako tri tačke A, B i C pripadaju jednom epiciklu, onda h-simetrale duži AB, BC i CA pripadaju odgovarajućem pramenu $\mathfrak{X}$, odnosno tačka C je h-simetrična i tački A i tački B u odnosu na neke dve prave tog pramena. Sledi da se skupovi tačaka h-simetričnih A, odnosno B, u odnosu na prave datog pramena poklapaju. Zato je epicikl određen na jedinstven način pramenom $\mathfrak{X}$ i bilo kojom svojom tačkom.

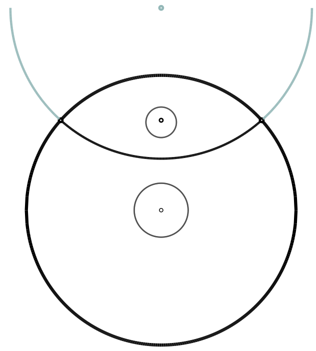
Tvrđenje 44 *Postoji tačno jedan epicikl koji sadrži tri razne h-tačke.*

Dokaz. Neka su A, B i C tri razne h-tačke i a, b, c h-simetrale h-duži BC, CA i AB. h-prave a i b određuju tačno jedan pramen $\mathfrak{X}$, a može se pokazati i da c tada pripada $\mathfrak{X}$. Epicikl određen tačkom A i pramenom $\mathfrak{X}$ je tada jedini koji sadrži tačke A, B, C. $\square$

Nađimo epicikle Poenkareovog disk modela prema tipu pramena.

Krug. Neka je $\mathfrak{X}$ eliptički pramen sa centrom h-tačkom M. U refleksijama u odnosu na h-prave pramena $\mathfrak{X}$ tačka M je invarijantna, te epicikl predstavlja skup tačaka h-ravni X takvih da je $d_h(X, M) = d_h(A, M)$. Njega nazivamo h-**krugom** $k_h(M, d)$, M je centar kruga, a $d = d_h(A, M)$ poluprečnik tog kruga.

Pretpostavimo da je $O = M$. Tada je $\mathfrak{X}$ pramen pravih kroz O, a h-refleksije su restrikcije euklidskih refleksija u odnosu na euklidske prave kroz O. Zato je h-krug sa centrom u O koji sadrži tačku A i euklidski krug sa centrom u O. Ako je r hiperbolički poluprečnik kruga, euklidski poluprečnik je $\frac{e^r-1}{e^r+1}$.



Sl. 7.15 h-krugovi

Pretpostavimo sada da je $M \neq O$. Neka je dalje S_l h-refleksija kojom se tačka M slika u O. S obzirom da je rastojanje invarijanta za h-refleksije, h-krug sa centrom u M koji sadrži A slika se u h-krug sa centrom u O koji sadrzhi $A' = S_l(A)$. Zato je traženi h-krug slika euklidskog kruga sa centrom u O koji sadrži A' u h-refleksiji S_l.

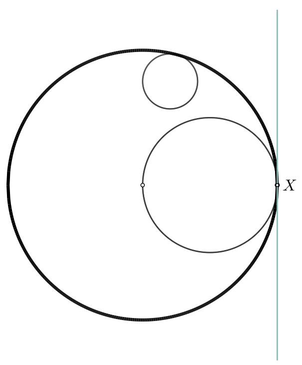
Uopštena inverzija $\psi_{\widetilde{l}}$ slika krug koji ne sadrži centar inverzije u krug, pa je traženi h-krug k_h, ujedno i euklidski krug. Međutim, kako inverzija ne slika centar kruga u centar kruga, euklidski centar kruga k_h se ne poklapa sa tačkom M.

Oricikl. Neka je $\mathfrak{X}$ parabolički pramen sa centrom u beskonačno dalekoj tački X. Epicikl određen paraboličkim pramenom naziva se **oricikl.**

Neka je $M = O$, a X beskonačno daleka tačka sa kompleksnom koordinatom 1. h-prave pramena sa centrom X su određene euklidskom pravom OX i euklidskim krugovima čiji centri pripadaju euklidskoj pravoj $x_1 = 1$. Ako je C centar jednog takvog kruga $\widetilde{l}$ sa koordinatom $c = 1 + \imath b$, odgovarajuća h-refleksija je data sa $S_l(z) = \frac{c\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{c}}$, a tačka $O' = S_l(O)$ ima koordinatu

$$x_1 + \imath x_2 = \frac{1}{\bar{c}} = \frac{1}{1+b^2}(1+\imath b).$$

Zato ako tačka pripada datom oriciklu onda pripada i euklidskom krugu $k_1 : (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}$. Krug k_1 dodiruje apsolutu k u tački X. Obratno, za svaku tačku skupa $(x_1, x_2) \in k_1 \setminus \{X\}$ postoji $b \neq 0$ takvo da je $x_1 = \frac{1}{1+b^2}, x_2 = \frac{b}{1+b^2}$. Zato je dati epicikl $k_1 \setminus \{X\}$. Označimo ovaj oricikl sa χ_0.



Sl. 7.16 Oricikli

Ako je $M \neq O$, postoji h-refleksija kojom se tačka M slika u O, a centar datog pramena, tačka Y u neku drugu beskonačno daleku tačku X_1. Dalje, ukoliko je $X_1 \neq X$, postoji rotacija hiperboličke ravni oko tačke O (koja je u ovom slučaju restrikcija euklidske rotacije oko O) kojom se tačka X_1 slika u X, dok je, naravno, O invarijantna.

Dakle, postoji h-izometrija kojom se traženi oricikli slika u χ_0 i obrnuto, traženi oricikl je slika χ_0 u nekoj h-izometriji. h-izometrija je restrikcija inverzivnog preslikavanja koje slika k_1 u euklidski krug koji dodiruje apsolutu.

Dakle, oricikl je skup tačaka euklidskog kruga koji dodiruje apsolutu u nekoj tački Y, bez tačke Y. Uočimo i da smo pokazali da je svaki oricikl h-izometričan oriciklu χ_0. Zato važi sledeće tvrđenje.

Teorema 38 *Svaka dva oricikla su međusobno h-izometrična.*

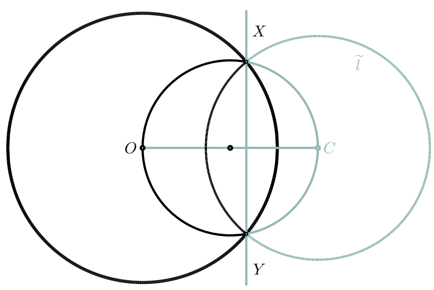
Ekvidistanta. Epicikl određen hiperboličkim pramenom $\mathfrak{X}$ nazivamo **ekvidistantom**. Ako je l osnovica tog pramena, tada je l i **osnovica ekvidistante**. Ako su M i N dve h-tačke te ekvidistante tada h-simetrala duži MN pripada pramenu $\mathfrak{X}$. Ako su M_0 i N_0 h-ortogonalne projekcije tačaka M i N na l tada je $d_h(M, M_0) = d_h(N, N_0)$. Zato je ekvidistanta skup tačaka koje se nalaze sa iste strane prave l i koje su podjednako udaljene od l. **Visina** ekvidistante je $d = d_h(M, M_0)$.

Neka je $p : x_2 = 0$ h-prava kroz O i $\widetilde{l}(C, r)$ krug koji određuje h-pravu l ortogonalnu na p. Tada je $OC = \sqrt{1 + r^2}$. Neka je $\mathfrak{X}$ pramen hiperparalelnih pravih ortogonalnih na l, a X i Y beskonačno daleke tačke prave l. Pored h-prave p ovom pramenu pripadaju h-prave određene euklidskim krugovima ortogonalnim na k i $\widetilde{l}$. Krug $\widetilde{m}(C_1, R)$ je ortogonalan na k i $\widetilde{l}$ ako i samo ako njegov centar C_1, sa koordinatom c, pripada radikalnoj osi za k i $\widetilde{l}$, odnosno pravoj XY (van duži XY) i ako je njegov poluprečnik $R^2 = |c|^2 - 1$.

Radikalna osa ima jednačinu $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, a tačke X i Y koordinate $(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}})$, pa centar C_1 ima koordinate $(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+r^2}})$, gde je $|b| > r$. Slika tačke O u h-refleksiji u odnosu na ovim definisanu h-pravu je ima kompleksnu koordinatu $\frac{1}{\bar{c}} = \frac{\sqrt{1+r^2}}{1+b^2}(1 + ib)$. Kako je $b = x_2/x_1$ sledi da slike tačke u u h-refleksijama u odnosu na prave pramena $\mathfrak{X}$ pripadaju skupu tačaka opisanim jednačinom $x_1 = \frac{x_1^2\sqrt{1+r^2}}{x_1^2+x_2^2}$ tj.

$$(x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + r^2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}(1 + r^2),$$

odnosno euklidskom krugu k_1 sa prečnikom OC, kome pripadaju i tačke X i Y. Sama ekvidistanta je otvoreni luk XY kruga k_1 koji pripada h-ravni $\mathbb{D}^2$. Ako je $\widetilde{l}$ prava, tada slike tačke O u h-refleksijama pripadaju h-pravoj l, te je skup tačaka ekvidistante određene tačkom O i pramenom $\mathfrak{X}$ presek euklidskog kruga određenog tačkama X, Y i O i h-ravni.



Sl. 7.17 Ekvidistanta sa osnovicom l

Slično kao i u slučaju oricikla, s obzirom da su h-rotacije i h-refleksije restrikcije inverzivnih preslikavanja koja slikaju uopštene krugove u uopštene krugove možemo zaključiti sledeće. Ako je hiperbolički pramen određen h-pravom l sa beskonačno dalekim tačkama X i Y, tada je ekvidistanta sa osnovicom l koja sadrži tačku M presek uopštenog kruga euklidske ravni koji sadrži X, Y, M i $\mathbb{D}^2$.

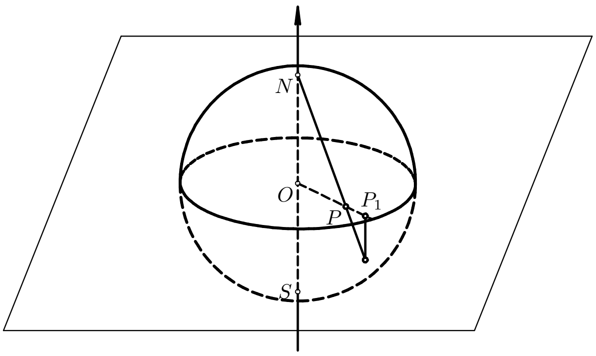
7.4 Klajnov projektivni model

Predstavićemo ukratko, još jedan poznat model hiperboličke geometrije, Klajnov disk model $\mathbb{K}$. Tačke ovog modela su takođe tačke unutrašnjosti jediničnog kruga kojeg takođe nazivamo **apsolutom**.

Sam model $\mathbb{K}$ se od Poenkareovog disk modela može dobiti jednostavnom geometrijskom konstrukcijom. Neka je $\mathbb{S}^2$ jedinična sfera euklidskog prostora sa centrom u koordinatnom početku. Tada je apsoluta presek sfere $\mathbb{S}^2$ i ravni $x_3 = 0$. Stereografskom projekcijom π, južna hemisfera $\mathbb{S}^2_- = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 < 0\}$ slika se u unutrašnjost apsolute, dok je sama apsoluta invarijantna u ovoj projekciji.

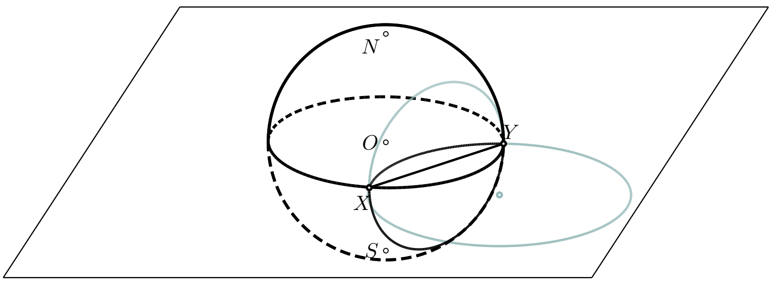
Neka je π_1 ortogonalna projekcija prostora na ravan $x_3 = 0$. Njena restrikcija na $\mathbb{S}^2_-$ je bijekcija kojom se $\mathbb{S}^2_-$ slika u unutrašnjost apsolute. Zato $\pi_1 \circ \pi^{-1}$ slika unutrašnjost apsolute u sebe.

Klajnov disk model je slika Poenkareovog disk modela u bijekciji $J = \pi_1 \circ \pi^{-1}$, videti sliku 7.18.



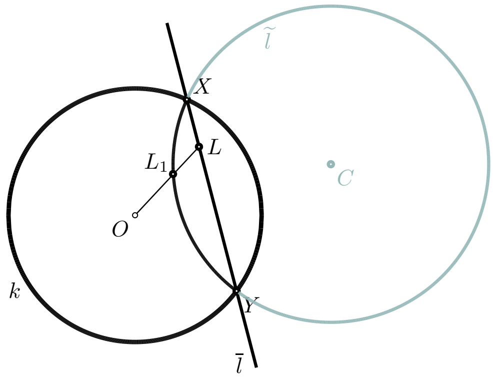
Sl. 7.18 Izomorfizam dva modela

Prave Klajnovog modela $\mathbb{K}$ su slike h-pravih Poenkareovog disk modela. h-prava je uopšteni krug euklidske ravni ortogonalan na apsolutu. Stereografska projekcija slika uglove u njima jednake uglove, a uopštene krugove euklidske ravni u krugove sfere $\mathbb{S}^2$, i pri tom je apsoluta invarijantna. Zato je slika uopštenog kruga $\widetilde{l}$ ortogonalnog na apsolutu, krug sfere ortogonalan na apsolutu, koji tada pripada ravni prostora paralelnoj x_3-osi, videti sliku 7.19. Pri tom, tačke h-prave se slikaju u tačke južne hemisfere, pa je slika jedne h-prave l, u stereografskoj projekciji, polukrug ortogonalan na apsolutu.



Sl. 7.19 Slika h-prave

Dalje, ortogonalnom projekcijom π, polukrugovi južne hemisfere se slikaju u euklidske otvorene duži, jer pripadaju ravnima normalnim na $x_3 = 0$. Ako su X i Y beskonačno daleke tačke h-prave l, tada je njena slika, prava u Klajnovom modelu $\mathfrak{l}$, otvorena euklidska duž XY, a tačke X i Y smatramo beskonačno dalekim tačkama hiperboličke prave $\mathfrak{l}$. Uočimo, pri tom, ukoliko je $\widetilde{l}$ euklidski krug i C njegov centar, prava XY je polara tačke C u odnosu na apsolutu. Slično, ako je $\widetilde{l}$ prava tada je prava XY polara beskonačno daleke tačke. Pravu XY označavamo tada sa $\bar{l}$.



Sl. 7.20 Izomorfizam J

Ako su $z = x_1 + \imath x_2$ koordinate tačke Poenkareovog disk modela, tačka $\pi^{-1}(x_1, x_2)$ ima koordinate X, Y, Z

$$X = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad Y = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad Z = -\sqrt{1 - X^2 - Y^2}.$$

Zato su koordinate $\omega = \mathrm{x}_1 + \imath \mathrm{x}_2$ odgovarajuće tačke Klajnovog modela date sa

$$\mathrm{x}_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad \mathrm{x}_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1},$$

odnosno $\omega = \frac{2}{|z|^2+1} z$. Obratno,

$$x_1 = \frac{X}{1-Z} = \frac{\mathrm{x}_1}{1 + \sqrt{1 - \mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2}}, \quad x_2 = \frac{Y}{1-Z} = \frac{\mathrm{x}_2}{1 + \sqrt{1 - \mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2}},$$

odnosno $z = \frac{1}{1+\sqrt{1-|\omega|^2}} \omega$.

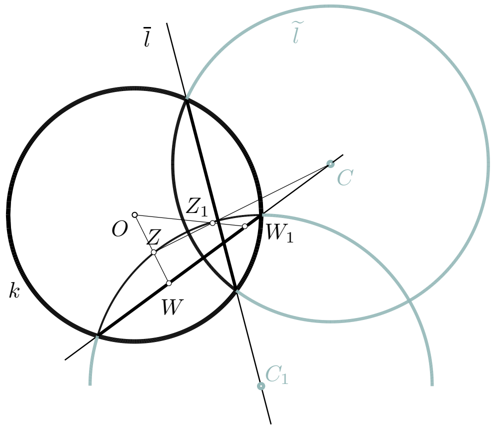
Izomorfizam dva modela ne preslikava uglove u njima podudarne uglove. Neka su $\widetilde{l_1}$ i $\widetilde{l_2}$, dva kruga sa centrima C_1 i C_2, koji definišu h-prave l_1 i l_2 Poenkareovog disk modela sa beskonačno dalekim tačkama X_1, Y_1, odnosno X_2 i Y_2. Oni su normalni ako i samo ako centar jednog pripada radikalnoj osi za drugi krug i krug k, odnosno ako i samo ako $C_2 \in X_1Y_1$, ili ekvivalentno $C_1 \in X_2Y_2$. Slično važi ukoliko je bar jedna od h-pravih određena euklidskom pravom. Zato važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 45 *Prava Klajnovog modela $\mathfrak{l}_1$ normalna na pravu $\mathfrak{l}_2$ ako i samo ako prava $\overline{l_1}$ sadrži pol prave $\overline{l_2}$.*

h-refleksije u Klajnovom modelu. Neka je l h-prava Poenkareovog disk modela i $\mathfrak{l}$ njena slika u Klajnovom modelu. Nađimo refleksiju u odnosu na pravu $\mathfrak{l}$ Klajnovog modela odnosno preslikavanje $S_\mathfrak{l} = J \circ S_l \circ J^{-1}$. h-prave se h-refleksijom slikaju u h-prave. Zato $S_\mathfrak{l}$ slika otvorene tetive apsolute u otvorene tetive apsolute i "čuva" kolinearnost tačaka.

Setimo se da se preslikavanje ravni koje "čuva" kolinearnost naziva **kolineacija** i da je svaka kolineacija projektivno preslikavanje. Zato je $S_{\mathfrak{l}}$ restrikcija jednog projektivnog preslikavanja $\mathcal{P}$ ravni, koje pri tom slika apsolutu k u sebe.

Tačke osnovice su invarijantne za refleksiju. Dakle, tačke $\mathfrak{l}$, a samim tim i $\bar{l}$ su invarijantne za $\mathcal{P}$, pa je prava $\bar{l}$ osa preslikavanja $\mathcal{P}$. h-prave normalne na osnovicu h-refleksije su invarijantne za tu refleksiju. Zato, ako je $\mathfrak{p}$ prava Klajnovog modela normalna na $\mathfrak{l}$, odnosno ako $\overline{p}$ sadrži pol prave $\bar{l}$, onda je $\mathfrak{p}$ invarijantna za $S_{\mathfrak{l}}$. Zato je $\overline{p}$ invarijantna za $\mathcal{P}$, pa je pol prave $\bar{l}$ centar preslikavanja. Zato je $\mathcal{P}$ hiperbolička homologija.



Sl. 7.21 Refleksija: Z i Z_1 su h-tačke, W, W_1 njihove slike u $\mathbb{K}$

Neka se tačka A modela $\mathbb{K}$ slika putem refleksije $S_{\mathfrak{l}}$ u tačku A_1, neka je C pol prave $\bar{l}$ i neka AA_1 seče $\bar{l}$ u L. Tada su C i L invarijantne za preslikavanje, a tačke A i A_1 se slikaju jedna u drugu. Projektivno preslikavanje "čuva" dvorazmeru, pa je $(C, L, A_1, A)^{-1} = (C, L, A, A_1) = (C, L, A_1, A)$ odnosno $(C, L, A_1, A) = -1$. Zato je $H(C, L, A, A_1)$. Homologija sa ovom osobinom je **harmonijska** homologija. Svaka harmonijska homologija je involutivno preslikavanje.

Obratno, ako je $\mathcal{P}$ harmonijska homologija, gde su osa i centar, redom, pol i polara u odnosu na k, slika k u sebe, a $\mathcal{P}|_{\mathbb{K}}$ je jedna refleksija modela.

Zato je grupa izometrija hiperboličke ravni podgrupa grupe projektivnih transformacija za koje je, pri tom, krug k invarijantan.

Važi i obrnuto, odnosno restrikcija svakog projektivnog preslikavanja $\mathcal{P}$ za koje je krug k invarijantan, na $\mathbb{K}$ je jedna izometrija modela.

Dovoljno je pokazati da se $\mathcal{P}$ može predstaviti kao kompozicija konačnog broja harmonijskih homologija za koje je k invarijantan.

Neka su X, Y i Z tri tačke apsolute. Neka su X, Y i Z invarijantne za $\mathcal{P}$. Tada, s obzirom da je $\mathcal{P}(k) = k$, tangente u tačkama X, Y, Z slikaju se u sebe pa su i njihovi preseci invarijantne tačke. Projektivno preslikavanje sa bar četiri invarijantne tačke je identitet.

Pretpostavimo zato neke od ovih tačaka nisu invarijantne. Neka je $\mathcal{P}(X) = X_1$ i $X \neq X_1$. Neka je l_0 euklidska simetrala duži XX_1 i C_0 njen (beskonačno daleki) pol. Neka je h_{C_0} harmonijska homologija sa centrom C_0 i osom l_0. Tada je X invarijantna tačka transformacije $h_{C_0} \circ \mathcal{P}$. Ako su i Y i Z invarijantne, tada je $\mathcal{P} = h_{C_0}$.

Pretpostavimo, zato da je $\mathcal{P}(Y) = Y_1 \neq Y$. Tangenta kruga t_X u tački X i YY_1 seku se u tački C_1 (konačnoj ili beskonačnoj). Neka je $\overline{l_1}$ polara tačke C_1 u odnosu na k. Označimo sa h_{C_1} harmonijsku homologiju sa centrom C_1 i osom $\bar{l}$. Tada je $h_{C_1} \circ h_{C_0} \circ \mathcal{P} : X, Y \mapsto X, Y$. Ako je Z invarijantna tačka u ovom preslikavanju onda je $\mathcal{P} = h_{C_0} \circ h_{C_1}$.

Ako su Z i $h_{C_1} \circ h_{C_0} \circ \mathcal{P}(Z)$ sa raznih strana prave XY neka je C pol prave XY i $\mathcal{I}$ harmonijska homologija sa centrom C, u kojoj su X i Y invarijantne, a inače neka je

$\mathcal{I} = \varepsilon$. Tada $\mathcal{I} \circ h_{C_1} \circ h_{C_0} \circ \mathcal{P}(Z) = Z_1$ takva da su Z i Z_1 sa iste strane prave XY. Ako je $Z = Z_1$ tada je $\mathcal{P} = h_{C_0} \circ h_{C_1} \circ \mathcal{I}$.

Ako je $Z \neq Z_1$ neka je C_2 presek pravih ZZ_1 i XZ. Neka je $\overline{l_2}$ polara tačke C_2. Tada, s obzirom da je $C_2 \in \overline{l_1}$ sledi i da je $C_1 \in \overline{l_2}$. Zato $h_{C_2} \circ \mathcal{I} \circ h_{C_1} \circ h_{C_0} \circ \mathcal{P}$ slika redom tačke X i Y u Y i X, dok je tačka Z invarijantna. Neka je $\overline{l_3}$ prava određena tačkama C i Z, a C_3 njen centar. Harmonijska homologija h_{C_3} slika tačke X i Y redom u Y i X, a Z u Z. Zato je $\mathcal{P} = h_{C_0} \circ h_{C_1} \circ \mathcal{I} \circ h_{C_2} \circ h_{C_3}$ odnosno $\mathcal{P}$ je kompozicija harmonijskih homologija za koje je krug k invarijantan.

Setimo se i da su proizvoljne dve konike projektivno ekvivalentne. Zato važi sledeće tvrđenje.

Teorema 39 *Grupa izometrija hiperboličke ravni izomorfna je podgrupi projektivnih preslikavanja ravni u kojima je data konika invarijantna.*