Materijali za predmet

M A T E M A T I K A 1

Fizička hemija

Zoran Rakić

Beograd, 2010. godine

S A D R Ž A J

GLAVA 1

Uvod

Ova glava sadrži potrebna predznanja za uspešno savladavanje gradiva koje je izloženo u nastavku ove knjige. Velika većina ovih predznanja trebalo bi da je čitaocima poznata iz srednje škole. Većina ostalog gradiva predstavlja nešto što je važno, a tome se ne pridaje toliki značaj u srednjim školama, a manji deo su neke generalizacije ili informacije o nekim objektima o kojima više detalja čitaoci mogu naći u literaturi.

1. Skupovi

1.1. U ovoj knjizi nećemo uvoditi pojam skupa formalnom definicijom niti ćemo izlaganja zasnivati na aksiomatskoj teoriji skupova, već ćemo koristiti intuitivan i operativan pristup skupu kao kolekciji datih objekata. Za one koji su skloniji formalnom i apstraktnom jeziku možemo tretirati skup kao osnovni pojam koji ne definišemo.

Uz pojam skupa javlja se i pojam elementa skupa (ili pripadanja skupu) koji takođe ne definišemo. Za dati element a skupa A, pisaćemo $a \in A$. Negaciju ovog iskaza, tj. a ne pripada (nije element) A zapisujemo $a \notin A$.

Primer. Najvažniji skupovi brojeva koji su nam poznati iz srednje škole su $\mathbb{N}$–skup prirodnih brojeva, $\mathbb{Z}$–skup celih brojeva, $\mathbb{Q}$–skup racionalnih brojeva, $\mathbb{R}$–skup realnih brojeva i $\mathbb{C}$–skup kompleksnih brojeva.

Skup koji nema elemenata nazivamo praznim skupom i obeležavamo ga sa $\emptyset$. Skup A je konačan ako ima konačan broj elemenata. Sa $\|A\|$ ili sa $\mathsf{card}A$ obeležavamo broj elemenata skupa A.

Kako se skupovi sastoje od elemenata skupovi se obično zadaju na dva načina:

(i1) popisivanjem svih elemenata, npr. $A = \{1, 2, 3, 7\}$,

(i2) zadavanjem zajedničkom osobinom, tj. $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ je skup svih onih elemenata datog skupa X koji zadovoljavaju osobinu P. Tako skup svih realnih brojeva većih od 3 obeležavamo sa $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 3\}$.

Drugi način zadavanja skupova je mnogo prikladniji i uglavnom se koristi u matematici.

1.2. Podskup. Skup B je podskup skupa A, ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A, tj. ako iz $x \in B$ sledi da je $x \in A$. To zapisujemo kao $B \subseteq A$ ili ponekad kao $A \supseteq B$, i čitamo A je nadskup od B (ili A sadrži B). Skupovi A i B su jednaki ako sadrže iste elemente, preciznije oni su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, i zapisujemo $A = B$. Skup B je pravi podskup skupa A ako je $B \subseteq A$ i $A \neq B$. Za pravi podskup koristimo oznaku $B \subset A$ (ili $B \subsetneqq A$). Jasno, prazan skup je jedinstven i on je podskup svakog skupa. Očigledno važe tvrdnje, (i1) $A \subseteq A$,

(i2) $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \implies A \subseteq C$.

Primer. Kao što znamo: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$, jer $\mathbb{Z} \ni 0 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \ni 1/2 \notin \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \ni \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; i $\mathbb{C} \ni i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

U većini primena skupovi sa kojima radimo su podskupovi nekog datog skupa X, koji se ponekad naziva univerzalnim skupom (ili kraće univerzumom). Skup svih podskupova datog skupa X, obeležavamo sa $\mathcal{P}(X)$ i zovemo ga partitivnim skupom skupa X.

1.3. Operacije sa skupovima. Neka je dat skup X. Na skupu svih podskupova skupa X defininisane su sledeće (prirodne) operacije,

komplement skupa $A \subseteq X$ je skup $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$.
unija skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$.
presek skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$.
razlika skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Primetimo, da je $A \cup A^c = X$ i $A \cap A^c = \emptyset$, kao i to da je $A \setminus B = A \cap B^c$. Dakle, razlika skupova nije osnovna operacije jer se može izraziti preko drugih. Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$. Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.4. Osnovna svojstva unije i preseka. *Za proizvoljne skupove A, B, $C \subseteq X$ važe sledeća svojstva:*

(asocijativnost)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(komutativnost)	$A \cup B = B \cup A$,	$A \cap B = B \cap A$,
(distributivnost I)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,	
(distributivnost II)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,	
(neutral)	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$,	$A \cap X = X \cap A = A$,
(idempotentnost)	$A \cup A = A$,	$A \cap A = A$,
(de Morganovi[1] zakoni)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dokaz. Dokazaćemo osobinu distributivnost II. Ostale osobine dokazuju se analogno. Potrebno je dokazati jednakost dva skupa, a to je ekvivalento (vidi **1.2**) sa pokazivanjem dve inkluzije: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
Pokažimo prvu: neka je $x \in A \cap (B \cup C)$ tj. $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Kako je $x \in B \cup C$, tj. $x \in B$ ili $x \in C$ i kako je $x \in A$ sledi da je $x \in A \cap B$ ili $x \in A \cap C$. Dakle, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Drugu inkluziju možemo dokazati na isti način, ali dajemo kraći dokaz u kojem smo iskoristili očiglednu osobinu inkluzije skupova.
Kako je $B \subseteq B \cup C$, odmah sledi da je $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$. Slično važi i $A \cap C \subseteq A \cap (C \cup B) = A \cap (B \cup C)$. Dakle,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap (B \cup C)) \cup (A \cap (B \cup C)) = (A \cap (B \cup C)). \qquad \square$$

1.5. Proširenje osnovnih skupovnih operacija. Neka je dat neki neprazni skup X i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X tada definišemo uniju skupova iz $\mathcal{F}$ kao skup svih onih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova familije $\mathcal{F}$. Analogno, presek skupova iz $\mathcal{F}$ je skup koji se sastoji od onih elemenata koji pripadaju

[1] Augustus de Morgan, 1806 – 1871, engleski matematičar i logičar.

svim skupovima familije $\mathcal{F}$. Operativnija realizacija ove konstrukcije sastoji se u tome da elemente familije $\mathcal{F}$ indeksiramo elementima nekog skupa S, tj. $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X \mid \alpha \in S\}$. Ispostavlja se da mnoga od gore pomenutih svojstava važe i za familije skupova. Preciznije, neka je data familija $\mathcal{F}$ i neki $B \subseteq X$

$$\text{(i1)}\ \overline{\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha} \qquad \text{(i3)}\ \Big(\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha\Big)\bigcap B = \bigcup_{\alpha\in S}\Big(A_\alpha \bigcap B\Big)$$

$$\text{(i2)}\ \overline{\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha} \qquad \text{(i4)}\ \Big(\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\Big)\bigcup B = \bigcap_{\alpha\in S}\Big(A_\alpha \bigcup B\Big)$$

1.6. Dekartov[2] proizvod. Dekartov proizvod dva skupa A i B, je skup

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\},$$

pri čemu su uređeni parovi (a_1, b_1) i (a_2, b_2) jednaki ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Iz same definicije jasno je da Dekartov proizvod nije komutativan, npr. čim $A \neq B$, sledi da $A \times B \neq B \times A$. Dekartov proizvod direktno se uopštava na konačan broj faktora, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_k \in A_k\}$$

i uređene $k-$torke $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ se podudaraju ako i samo ako (=akko)[3] je $a_j = b_j\,(j = 1, \ldots, k)$. Direktan proizvod može se generalisati na proizvoljnu familiju skupova $\mathcal{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, što ćemo zapisivati kao $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$.
Ako su skupovi A i B konačni tada je i skup $A \times B$ konačan. Specijalno, ako skup A ima n elemenata a skup B m elemenata, skup $A \times B$ imaće $n \cdot m$ elemenata. Na ovoj jednostavnoj činjenici zasnivaju se osnovne tehnike prebrojavanja skupova.
Skup elemenata

$$\{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A\,,$$

zove se dijagonala Dekartovog proizvoda $A \times A$.

1.7. Dekartov proizvod i osnovne skupovne operacije. Za svaka tri skupa A, B, i C važi:

(i1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, (i2) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$,
(i3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, (i4) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cup D)$,
(i5) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Dokaz. Pokažimo (i1). Ova tvrdnja posledica je sledećeg niza ekvivalencija:

$$(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in A \cup B \ \text{ i } \ y \in C \iff (x \in A \ \text{ i } \ y \in C) \ \text{ ili } \ (x \in B \ \text{ i } \ y \in C)$$
$$\iff ((x,y) \in A \times C) \ \text{ ili } \ ((x,y) \in B \times C) \iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).$$

Ostala tvrđenja dokazuju se analogno. $\square$

[2] Descartes Rene, 1596–1650.
[3] U budućе ćemo frazu "ako i samo ako" kraće zapisivati "akko".

2. Funkcije

1.8. Definicija. Neka su A i B neprazni skupovi tada je **funkcija (preslikavanje)** uređena trojka (A, B, f) čije prve dve komponente su dati skupovi A i B, a treća je 'zakon' f kojem se svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan element skupa B. Obično se uređena trojka (A, B, f) poistovećuje sa f, i zapisuje kao $f : A \longrightarrow B$. Postoje razne ekvivalentne definicije pojma funkcije (koja je bez sumnje jedan od najvažnijih objekata u matematici). Tako npr. funkciju sa A u B možemo definisati kao skup $M_f \subseteq A \times B$ takav da za svaki $a \in A$ postoji jedinstven $b \in B$ takav da je uređeni par $(a, b) \in M_f$. Za element b (zbog njegove jedinstvenosti) koristi se oznaka $b = f(a)$. Skup A zove se domen funkcije f, a B njen kodomen.
Napomenimo da su funkcije (A, B, f) i (C, D, f) jednake akko je $A = C$, $B = D$ i $f = g\,(\iff \forall\, x \in A = C,\ f(x) = g(x))$.

1.9. Injekcija. Surjekcija. Bijekcija. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je injekcija ili '1–1' ako za bilo koja dva različita elementa $x_1, x_2 \in A$ i njihove slike su različite, tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Formalnije, ovaj uslov zapisujemo:

$$(\forall\, x_1,\, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Često se u dokazima koristi obrat po kontrapoziciji[4] gornje implikacije, tj. sledeća implikacija,

$$(\exists\, x_1,\, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\,.$$

Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je surjekcija ili 'na' ako za svaki $b \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $b = f(a)$. Formalnije,

$$(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A) \quad \text{takav da je} \quad b = f(a)\,.$$

Funkcija koja je istovremeno '1–1' i 'na' naziva se bijekcija.

1.10. Slika i praslika. Inverzna funkcija. Neka je data funkcija $f : A \longrightarrow B$, i neka je $X \subseteq A$ tada skup

$$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x),\, x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B\,,$$

nazivamo slikom skupa X. Specijalno, ako je $X = A$ tada za $f(A)$ koristimo oznaku $\mathsf{Im}A$ i nazivamo ga slikom funkcije f. Jasno, funkcija f je 'na' akko je $\mathsf{Im}A = B$. Analogno, za $Y \subseteq B$ skup

$$f^{-1}(Y) = \{y \in A \mid f(y) \in Y\} \subseteq A\,,$$

nazivamo praslikom skupa Y.
Primetimo[5] da za neki $b \in B$ može postojati više elemenata iz A koje f preslika u b. Tada nije moguće na jedinstven način definisati funkciju $f^{-1} : B \longrightarrow A$, očiglednom formulom $f^{-1}(b) = a$, za $b = f(a)$. Da bismo mogli definisati f^{-1} potrebno je da se praslika svakog elementa iz B sastoji od tačno jednog elementa, što je ekvivalentno sa činjenicom da je funkcija f bijekcija. Ispostavlja se da je '1–1' suštinska osobina za

[4] Ako su a i b iskazi tada je iskaz $a \Rightarrow b$ ekvivalentan sa $\rceil b \Rightarrow \rceil a$. $\rceil a$ je negacija od a.
[5] Iz definicije funkcije.

egzistenciju inverznog preslikavanja, jer ako f nije 'na' onda možemo suziti kodomen na $\mathsf{Im}A$ i tako dobiti bijekciju $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathsf{Im}A$.
Dakle, ako je f bijekcija onda je dobro definisano preslikavanje $f^{-1} : B \longrightarrow A$, formulom: $f^{-1}(b) = a$, za $b = f(a)$. Preslikavanje f^{-1} naziva se inverznom funkcijom od f.

1.11. Kompozicija funkcija. Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$, dve funkcije. Tada na prirodan način definišemo funkciju $g \circ f : A \longrightarrow C$ formulom $(\forall\, x \in A)$

$$(g \circ f)(x) \stackrel{def}{=} g(f(x))\,.$$

Funkcija $g \circ f$ zove se kompozicija funkcija f i g. Za kompoziciju funkcija važi svojstvo $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f)$, koja se naziva asocijativnost. Preciznije, važi sledeća jednostavna teorema:

Teorema. *Kompozicija funkcija je asocijativna kad ima smisla.*

Dokaz. Dokaz ove činjenice posledica je sledećeg niza jednakosti $(\forall\, x \in A)$,

$$\underline{((h \circ g) \circ f)(x)} = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = \underline{(h \circ (g \circ f))(x)}\,,$$

što kraće zapisujemo: $((h \circ g) \circ f) = (h \circ (g \circ f))\,.$

I dokaz je gotov □

Na svakom nepraznom skupu A definišemo funkciju $\mathsf{id}_A(x) = x$ koju nazivamo identitetom na A. Neka je $f : A \longrightarrow B$, funkcija, tada je egzistenciju inverzne funkcije f^{-1} moguće opisati preko kompozicije funkcija: ako za datu funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoje funkcije $g : B \longrightarrow A$ i $h : B \longrightarrow A$ takve da je

$$f \circ g = \mathsf{id}_B \ \text{ i } \ h \circ f = \mathsf{id}_A \ \text{ tada je } \ h = g = f^{-1}\,.$$

Primer. Navedimo sada nekoliko važnih primera inverznih funkcija, koji su nam poznati iz ranijeg školovanja.

(i1) Za linearnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,x + 3$ odredimo inverznu funkciju. Koristimo relaciju $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ i nalazimo

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = \underline{x} \; = \; (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \underline{2\,f^{-1}(x) + 3}$$
$$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2}\,.$$

(i2) Za stepene funkcije, $f_{2n+1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ inverzne funkcije su $f^{-1}_{2n+1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i3) Za stepene funkcije, $f_{2n}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}(x) = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ inverzne funkcije su $f^{-1}_{2n}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}(x) = \sqrt[2n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i4) Eksponencijalna funkcija[6] $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \mathsf{e}^x$ ima inverznu funkciju - logaritamsku funkciju $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \mathsf{ln}(x)$.

(i5) Inverzne funkcije osnovnih trigonometrijskih funkcija, $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$, $f(x) = \mathsf{sin}(x)$ i $g : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, $g(x) = \mathsf{cos}(x)$ su $f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2,\pi/2]$, $f^{-1}(x) = \mathsf{arcsin}(x)$ i $g^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, $g^{-1}(x) = \mathsf{arccos}(x)$, redom.

[6] Eksponencijalna funkcija je jedna od najvažnijih funkcija u matematici.

(i6) Za funkcije, $f(x):(-\pi/2,\pi/2)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\mathsf{tg}(x)=\sin(x)/\cos(x)$ i $g(x):(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\mathsf{ctg}(x)=\cos(x)/\sin(x)$ inverzne funkcije su $f^{-1}(x):\mathbb{R}\longrightarrow(-\pi/2,\pi/2)$, $f^{-1}(x)=\mathsf{arctg}(x)$, i $g^{-1}(x):\mathbb{R}\longrightarrow(0,\pi)$, $g^{-1}(x)=\mathsf{arcctg}(x)$ redom.

Napomenimo da smo u primerima (i3), (i5) i (i6), morali da smanjimo domen funkcija f koje nisu '1-1' na čitavom domenu.

1.12. Neka svojstva kompozicije. Neka su $f:A\longrightarrow B$, i $g:B\longrightarrow C$, dve funkcije. Tada ako

(i1) je $g\circ f$ '1–1' onda je f '1–1', (i2) je $g\circ f$ 'na' onda je g 'na',
(i3) su f i g '1–1' onda je $g\circ f$ '1–1', (i4) su f i g 'na' onda je $g\circ f$ 'na',
(i5) su f i g bijekcije onda je i $g\circ f$ bijekcija.

Dokaz. (i5) je posledica (i3) i (i4). Dokažimo prvo (i2). Neka je $g\circ f$ 'na' tada za svaki $y\in C$ postoji neki $x\in A$ takav da je $(g\circ f)(x)=y$. Sada iz definicije kompozicije sledi da je $g(f(x))=y$ i ako stavimo $z=f(x)\in B$ vidimo da je $g(z)=y$, tj. g je 'na'.
Dokažimo još (i3). Neka su f i g '1–1'. Tada za $x,y\in A$ i $x\neq y$ imamo redom,

$$x\neq y\Longrightarrow f(x)\neq f(y)\Longrightarrow g(f(x))\neq g(f(y))\Longleftrightarrow(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(x),$$

odakle odmah sledi da je funkcija $g\circ f$ injekcija. □

1.13. Funkcije i osnovne skupovne oparacije. Neka je $f:A\longrightarrow B$ funkcija, neka su $X,X_1\subseteq A$ i neka su $Y,Y_1\subseteq B$, tada

(i1) za $X\subseteq X_1\Longrightarrow f(X)\subseteq f(X_1)$, (i2) $f(X\cup X_1)=f(X)\cup f(X_1)$,
(i3) $f(X\cap X_1)\subseteq f(X)\cap f(X_1)$, (i4) za $Y\subseteq Y_1\Longrightarrow f^{-1}(Y)\subseteq f^{-1}(X_1)$,
(i5) $f^{-1}(Y\cup Y_1)=f^{-1}(Y)\cup f^{-1}(X_1)$, (i6) $f^{-1}(Y\cap Y_1)=f^{-1}(Y)\cap f^{-1}(Y_1)$,
(i7) $f^{-1}(Y\setminus Y_1)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(Y_1)$, (i8) $X\subseteq f^{-1}(f(X))$ i $f(f^{-1}(Y))\subseteq Y$.

Dokaz. Iz same definicije slike i praslike očigledno važi (i1), (i4) i (i8). (i3) sledi iz

$$\begin{gathered}x\in f(X\cap X_1)\Longrightarrow\exists\,y\in X\cap X_1\ \text{ takav da }\ x=f(y)\Longrightarrow\exists\,y\in X\text{ i }y\in X_1\\ \text{takav da }x=f(y)\Longrightarrow x\in f(X)\text{ i }x\in f(X_1)\Longrightarrow x\in f(X)\cap f(X_1).\end{gathered}$$

Obratna inkluzija ne mora da važi jer npr. za neki $x\in f(X)\cap f(X_1)$ mogu postojati $y\in X\setminus X_1$ i $y_1\in X_1\setminus X$ takvi da je $x=f(y)=f(y_1)$ i ne mora da postoji $z\in X\cap X_1$ takav da je $f(z)=x$.
(i5) je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(Y\cup Y_1)\quad&\Longleftrightarrow\quad f(x)\in Y\cup Y_1\Longleftrightarrow f(x)\in Y\text{ i }f(x)\in Y_1\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y)\text{ i }x\in f^{-1}(Y_1)\\&\Longleftrightarrow\quad x\in f^{-1}(Y)\cup f^{-1}(Y_1).\end{aligned}$$

(i2), (i6) i (i7) analogno kao (i5) □.

3. Relacije

1.14. Relacija. n-arna relacija ρ na skupu A je svaki podskup Dekartovog proizvoda

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ primeraka skupa }A}.$$

Od svih relacija na skupu A najvažnije su **binarne relacije**, tj. podskupovi skupa $A \times A$. Za $(a,b) \in \rho$ koristi se i oznaka $a\,\rho\,b$. Kako su relacije ρ, σ na A podskupovi jasno je što znače iskazi $\rho \subseteq \sigma$, $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, ρ^c.

1.15. Operacije na skupu relacija. Neka je dat skup A na njemu postoji specijalna relacija: dijagonala $\jmath_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$. Za proizvoljnu binarnu relaciju ρ na A definišemo i relaciju $\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$. Takođe za binarne relacije ρ, σ na A definišemo njihov proizvod, tj. relaciju $\rho\sigma$, na sledeći način: $x(\rho\sigma)y$ akko postoji $z \in A$ takav da je $x\rho z$ i $z\sigma y$.

1.16. Svojstva relacija. Najvažnije osobine koju neka binarna relacija ρ na skupu A može imati su:

(r) refleksivnost: $(a,a) \in \rho$ za svaki $a \in A \iff \jmath_A \subseteq \rho$;
(ar) antirefleksivnost: $(a,a) \notin \rho$ za svaki $a \in A \iff \jmath_A \cap \rho = \emptyset$;
(s) simetričnost: iz $(a,b) \in \rho$ sledi $(b,a) \in \rho \iff \rho = \rho^{-1}$;
(a) antisimetričnost: iz $(a,b) \in \rho$ i $(b,a) \in \rho$ sledi $a = b \iff \rho \cap \rho^{-1} = \jmath_A$;
(t) tranzitivnost: iz $(a,b), (b,c) \in \rho$ sledi $(a,c) \in \rho \iff \rho^2 \subseteq \rho$.

1.17. Relacija ekvivalencije. Relaciju ρ na A koja je refleksivna (r), simetrična (s) i tranzitivna (t) zovemo relacijom ekvivalencije. Svaka relacija ekvivalencije na skupu A razbija taj skup na međusobno disjunktne i neprazne klase (podskupove),

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \qquad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \quad \text{za} \ \ (\alpha \neq \beta), \tag{1}$$

pri čemu je I skup kojim su indeksirane klase. Dakle, $A_\alpha = [a_\alpha] = \{x \in A \mid x\rho a_\alpha\}$ je klasa svih onih elemenata iz A koji su u relaciji ρ sa elementom a_α.
Obratno, svako razbijanje (1) nepraznog skupa A na disjunktnu uniju nepraznih skupova definiše relaciju ekvivalencije ρ (na A) na sledeći način: $x\rho y$ akko x, y pripadaju istoj klasi.

Primer. Relacije ekvivalencije su npr.

(i1) one relacije u čijoj osnovi je neka jednakost (među nekim objektima) kao što je npr. jednakost skupova; podudarnost trouglova u ravni (dva trougla se podudaraju ako postoji translacija i rotacija u ravni kojom jedan prelazi u drugi); jednakost razlomaka $m/n = m_1/n_1 \iff m \cdot n_1 = n \cdot m_1$, i sl.,
(i2) 'biti paralelan' na skupu svih pravih u ravni ili prostoru;
(i3) za fiksni prirodan broj $n > 1$ na skupu $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{Z}$) relacija $x\rho y$ akko x i y daju isti ostatak pri delenju sa n.

1.18. Relacija parcijalnog poretka. Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se relacija parcijalnog poretka. Obično se relacija poretka označava sa $\leq$.

Antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se relacijom strogog poretka. Obično se relacija strogog poretka označava sa $<$.

Primer. Relacije parcijalnog (strogog) poretka su npr.

(i1) $\leq$ $(<)$ na skupu realnih brojeva;

(i2) $\subseteq$ $(\subset)$ na skupu svih podskupova datog nepraznog skupa X;

(i3) relacija deljivosti ($a \llcorner b$ a je deljiv sa b) na skupu $\mathbb{N}$.

1.19. Funkcija binarne realcije. Neka je ρ neka binarna relacija na skupu A. Tada na prirodan način definišemo funkciju

$$f_\rho : A \times A \longrightarrow \{0,1\}, \quad \text{formulom} \quad f(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ako } (a,b) \in \rho\,, \\ 0, & \text{ako } (a,b) \notin \rho\,. \end{cases}$$

Jasno je da je zadavanje relacije ρ na skupu $\mathbb{A}$ ekvivalentno sa zadavanjem funkcije f_ρ na $A \times A$. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ konačan skup onda funkciju relacije f_ρ možemo predstaviti u obliku sledeće tablice:

$$\begin{array}{c|cccccc}
f_\rho & a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots & a_m \\
\hline
a_1 & f_\rho(a_1,a_1) & f_\rho(a_1,a_2) & \cdots & f_\rho(a_1,a_k) & \cdots & f_\rho(a_1,a_m) \\
a_2 & f_\rho(a_2,a_1) & f_\rho(a_2,a_2) & \cdots & f_\rho(a_2,a_k) & \cdots & f_\rho(a_2,a_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_j & f_\rho(a_j,a_1) & f_\rho(a_j,a_2) & \cdots & f_\rho(a_j,a_k) & \cdots & f_\rho(a_j,a_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_m & f_\rho(a_m,a_1) & f_\rho(a_m,a_2) & \cdots & f_\rho(a_m,a_k) & \cdots & f_\rho(a_m,a_m)\,.
\end{array}$$

Primetimo da se iz gornje tablice odmah mogu prepoznati neke osobine relacija. Ako je relacija ρ

- refleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 1,
- antirefleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 0,
- simetrična, tada je tablica simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. $f_\rho(a_k, a_j) = f_\rho(a_j, a_k)$,
- antisimetrična onda su na glavnoj dijagonali 1 i tablica je antisimetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. ako je za $k \neq j$, $f_\rho(a_k, a_j) = 0$ tada je $f_\rho(a_j, a_k) = 1$ i obratno.

4. Brojevi: celi, racionalni i realni

1.20. Prirodni brojevi. Skup $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, nazivamo skupom prirodnih brojeva. U ovom skupu dobro su definisane dve uobičajene binarne operacije $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$: sabiranje i množenje prirodnih brojeva, koje imaju sledeća svojstva $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N})$:

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, (A5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(A4) $a + b = b + a$, (A8) $a \cdot b = b \cdot a$.

Primetimo da za množenje postoji istaknuti broj 1, koji ima osobinu $(\forall\, a \in \mathbb{N})$,

$$\text{(A6)} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Ako skup $\mathbb{N}$ proširimo brojem 0, dobijamo skup $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ u kojem važi analogon svojstva (A6) za operaciju sabiranja prirodnih brojeva,

$$\text{(A2)} \qquad a + 0 = 0 + a = a.$$

Operacije sabiranja i množenja povezane distributivnim zakonom ($\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$):

$$\text{(A9)} \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

1.21. Matematička indukcija. Skup prirodnih brojeva može se opisati i Peanovim[7] aksiomama:

(i1) 1 je prirodan broj (tj. skup prirodnih brojeva nije prazan),

(i2) dobro je definisano preslikavanje $\xi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, formulom $\xi(n) = n + 1$,

(i3) 1 nije u slici preslikavanja ξ, tj. ne postoji prirodan x takav da je $\xi(x) = 1$,

(i4) preslikavanje ξ je '1–1',

(i5) (aksioma matematičke indukcije) za $M \subseteq \mathbb{N}$ takav da važi

(bi) $1 \in M$,

(ki) ako iz $n \in M$ sledi da je i $\xi(n) \in M$,

tada je $M = \mathbb{N}$.

Primetimo da aksioma matematičke indukcije funkcioniše na sledeći način: $1 \in M$, zbog (bi), zatim (ki) primenimo na $n = 1$ i dobijamo da je $\xi(1) = 2 \in M$, zatim (ki) primenimo na $n = 2$ i dobijamo da je $\xi(2) = 3 \in M$, itd.

Napomenimo da se provera (bi) iz gornje definicije zove baza indukcije, implikacija (ki) zove se korak indukcije, a $n \in M$ iz (ki) zove se pretpostavka indukcije koju ćemo obeležavati sa (pi). Aksiomu matematičke indukcije koristimo onda kada neku tvrdnju treba pokazati za svaki prirodan broj, a to ćemo raditi u mnogim glavama ove knjige.

Primer 1. Pokažite da za svaki prirodan broj n važi sledeća formula

$$(2) \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\ .$$

Dokaz. Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid (2) \text{ važi za } n\}$. Tada je očigledno $1 \in M$ jer je $1 = (1\,(1+1))/2$. Pretpostavimo da je neki prirodan broj $n \in M$, tada redom imamo,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \overset{\text{(pi)}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n+1}{2}\,(n+2) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}\,, \end{aligned}$$

tj. i $n+1 \in M$. Sada AMI (aksioma matematičke indukcije) implicira da je $M = \mathbb{N}$, tj. (2) važi za sve prirodne brojeve. □

Primer 2. Dokažite da za svaki $n \in N$ i $\forall\,\beta > -1$ važi Bernoullijeva nejednakost: $(1 + \beta)^n \geq 1 + n\,\beta$,

---
[7] Peano Giuseppe, 1858–1932.

Dokaz. Baza indukcije je trivijalna, jer je $(1+\beta)^1 \geq 1 + 1\cdot\beta$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, sada imamo redom

$$(1+\beta)^{n+1} = (1+\beta)\,(1+\beta)^n \overset{\text{(pi)}}{\geq} (1+\beta)\,(1+n\,\beta) = 1+(n+1)\,\beta + n\,\beta^2 \geq 1+(n+1)\,\beta\,. \qquad \square$$

1.22. Fibonaccijev (Fibonači) niz[8]**.** Niz definisan rekurzivnom formulom,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\,, \quad \text{uz} \quad a_1 = a_2 = 1\,,$$

zove se Fibonaccijev niz. Nekoliko prvih članova niza su: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..
Pokažite da

(i1) su svaka dva uzastopne člana niza uzajamno prosta.

(i2) da je svaki četvrti član niza deljiv sa 3.

Dokaz. (i2) Baza indukcije. $n=1$ $a_{4\cdot 1}=3$, i jasno $3\,\big|\,a_{4\cdot 1}$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$ $3\,\big|\,a_{4n}$, tj. $a_{4n}=3\,\alpha$, tada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} &= a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = 2\,a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3\,a_{4n+1} + 2\,a_{4n} \overset{\text{pi}}{=} 3\,a_{4n+1} + 2\cdot 3\,\alpha \\ &= 3\,\underbrace{(a_{4n+1}+2\,\alpha)}_{\in\,\mathbb{N}} \quad\Longrightarrow\quad 3\,\big|\,a_{4(n+1)}\,. \end{aligned} \qquad \square$$

1.23. Celi brojevi. U skupu prirodnih brojeva nije moguće rešiti jednačinu $x+a=b$, za proizvoljni izbor $a,b\in\mathbb{N}$ (npr. $a=5, b=2$) zbog toga se pitamo da li je moguće proširiti skup $\mathbb{N}_0$ tako da u tom proširenom skupu svojstva sabiranja (A1), (A2) i (A4) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $x+a=b$, za svaki izbor a,b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup celih brojeva $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} = -\mathbb{N}\cup\mathbb{N}_0$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Z}$ važi i svojstvo: $\forall a\in\mathbb{Z}$ postoji jedinstveni broj $-a\in\mathbb{Z}$ takav da je,

$$\text{(A3)} \quad a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Broj $-a$ zove se suprotni element od a ili inverzni element od a s obzirom na sabiranje.

Na skupu $\mathbb{Z}$ (ali već i na $\mathbb{N}$) postoji relacija poretka $\leq$ ('biti manji ili jednak'). Ako uvedemo uobičajenu oznaku $a<b$, koja znači $a\leq b$ i $a\neq b$, vidimo da na skupu $\mathbb{Z}$ važi,

(A10) $\forall\, a\in\mathbb{Z} \quad a\leq a$,

(A11) $\forall\, a,b\in\mathbb{Z} \quad a\leq b$ i $b\leq a \implies a=b$,

(A12) $a\leq b$ i $b\leq c \implies a\leq c$.

(A13) $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ tačna je barem jedna od relacija $a\leq b$ ili $b\leq a$.

(A14) $a\leq b$ i $c\in\mathbb{Z} \implies a+c\leq b+c$,

(A15) $a>0$ i $b>0 \implies a\cdot b>0$.

[8] Fibonacci Leonardo, 1170–1240 (?), poznat i kao Leonardo iz Pise.

Primetimo da svojstva (A10)-(A13) znači da je relacija $\leq$ relacija totalnog poretka na $\mathbb{Z}$; (A14) i (A15) znači da se relacija poretka slaže sa sabiranjem i množenjem celih brojeva.

Iz dosada evidentnih svojstava vidimo da su ona podeljena na tri dela: svojstva (A1)-(A9) [9] su algebarska svojstva, (A10)-(A13) su svojstva relacije '$\leq$' i (A14)-(A15) predstavljaju kompatibilnost relacije '$\leq$' i operacija sabiranja i množenja celih brojeva. [10]

1.24. Deljivost i prosti brojevi. Pretpostavljamo da oznake $a < b$, $a \leq b$, $|a|$ imaju uobičajeno značenje. Kažemo da a deli b što zapisujemo kao $a \mid b$, ili da je b deljiv sa a akko postoji $t \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = at$. Prirodan broj $p > 1$ koji je deljiv samo sa 1 i sa samim sobom zove se prost broj.

Skup svih prostih brojeva $\mathcal{P}r = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ je beskonačan.

1.25. Teorema o delenju. *Za svaki $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveni brojevi $t \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < n$ takvi da je*

$$m = n \cdot t + r.$$

Dokaz. Egzistencija. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$, i posmatrajmo niz

$$q_0 = m,\ q_1 = m - n,\ q_2 = q_1 - n = m - 2n,\ \dots,\ q_k = q_{k-1} - n = m - kn,\ \dots .$$

Kako je ovaj niz strogo opadajući postoji najmanji indeks t takav da je $q_{t+1} < 0$. Tada je $0 \leq r = q_t = m - tn < n$ odakle sledi tvrdnja za $m \geq 0$. Ako je $m \leq 0$ onda je $-m \geq 0$, i na osnovu upravo dokazanog imamo

$$\begin{aligned} -m = n \cdot t + r_1,\quad 0 \leq r_1 < n \implies m &= n \cdot (-t) - r_1 + n - n = n \cdot (-t-1) + (n - r_1) \\ &= n \cdot (-t-1) + r, \qquad 0 \leq r = n - r_1 < n . \end{aligned}$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para takvih brojeva (t_1, r_1) i (t_2, r_2), tj. $m = n \cdot t_1 + r_1 = n \cdot t_2 + r_2$. Ako ih oduzmemo odmah dobijamo

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = n \cdot (t_1 - t_2) &\implies |r_2 - r_1| = n \cdot |t_2 - t_1| \implies n > |r_2 - r_1| \mid n \\ &\implies |r_2 - r_1| = 0 \implies r_2 = r_1 \ \text{ i } \ t_2 = t_1. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

1.26. Svojstva deljivosti. Iz definicije odmah sledi da za relaciju deljivosti važi:

(i1) tranzitivnost, tj. $a \mid b$ i $b \mid c \implies a \mid c$,

(i2) $a \mid b$ i $a \mid c \implies a \mid b \pm c$,

(i3) ako $a \mid b$ onda za svako $c \in \mathbb{Z}$ važi $a \mid b \cdot c$,

(i4) ako $a \mid b_1$, $a \mid b_2, \dots, a \mid b_k$ onda za sve $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ važi
$a \mid b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \dots + b_k \cdot c_k$.

[9] Primetimo da je (A7) zasada preskočeno.

[10] Napomenimo da se uređeni par $(G, \star)$ gde je G neki neprazan skup, a $\star$ binarna operacija za koju važe aksiome (A1)-(A3) zove grupa, a ako još važi i aksioma (A4) tada govorimo o komutativnoj ili Abelovoj grupi. Slično za uređenu trojku $(G, +, \cdot)$ za koju važe aksiome (A1)-(A6) i (A8)-(A9) kažemo da je komutativni prsten sa jedinicom. Dakle, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten sa jedinicom.

1.27. Najveći zajednički delitelj (divizor). Najveći zajednički deljitelj celih brojeva a i b, u oznaci $\mathsf{NZD}(a,b)$, je prirodan broj d koji ima sledeća svojstva

(d) $d \mid a$ i $d \mid b$ (d je zajednički deljitelj),
(n) ako $d_1 \mid a$ i $d_1 \mid b \implies d_1 \mid d$ (d je najveći zajednički delitelj).

Ako je $\mathsf{NZD}(a,b) = 1$ onda kažemo da su brojevi a i b uzajamno prosti.

1.28. Namanji zajednički sadržalac. Najmanji zajednički sadržalac celih brojeva a i b, u oznaci $\mathsf{NZS}(a,b)$, je prirodan broj s koji ima sledeća svojstva

(s) $a \mid s$ i $b \mid s$ (a je zajednički sadržalac),
(n) ako $a \mid s_1$ i $b \mid s_1 \implies s \mid s_1$ (d je najmanji zajednički sadržalac).

1.29. Euklidov algoritam. Neke su a, $b \in \mathbb{N}$, onda iz Teoreme o deljenju imamo niz jednakosti ($a > b$)

$$\begin{array}{ll} a = b \cdot q_1 + r_1\,, & r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}\,, \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2\,, & r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k\,, \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots & r_k = r_{k-1} \cdot q_{k+1}\,. \end{array}$$

Tada je $\mathsf{NZD}(a,b) = r_k$.

Posledica 1. *Neke su a, $b \in \mathbb{N}$, neka je $\mathsf{NZD}(a,b) = d$ i neka je $d_1 \in \mathbb{N}$ takav da $d \nmid d_1$. Tada jednačine (po x i y)*

$a \cdot x + b \cdot y = d$, ima rešenja u $\mathbb{Z}$.
$a \cdot x + b \cdot y = d_1$, nema rešenja u $\mathbb{Z}$.

Specijalno, ako su a i b uzajamno prosti onda postoje x, $y \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$a \cdot x + b \cdot y = 1\,.$$

Dokazi prethodnih teorema i njihovih posledica mogu se naći u Glavi 3, reference [5] u kojoj analogne teoreme dokazujemo za polinome ili u knjigama koje se bave deljivošću celih brojeva.

Posledica 2. *Neke su a i b uzajamno prosti brojevi. Ako $a \mid b \cdot c$ tada $a \mid c$. Specijalno, ako prost broj deli proizvod celih brojeva tada on mora deliti barem jedan od njih.*

1.30. Relacija kongruencije. U poglavlju o relacijama spomenuli smo kao primer relacije ekvivalencije (i2), o kojoj ćemo sada nešto više reći. Za dati $2 \leq n \in \mathbb{N}$ i za a, $b \in \mathbb{Z}$ kažemo da je a kongruentno b po modulu n i pišemo

$$a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n) \iff \exists\, t \in \mathbb{Z} \qquad \text{takav da je } a - b = n \cdot t,$$

tj. a i b daju isti ostatak pri delenju sa n.

Teorema. *Relacija kongruencije po modulu $n > 1$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$. Ova relacija razbija skup $\mathbb{Z}$ na sledeće klase*

$$\mathbb{Z} = [0]_n \cup [1]_n \cup \cdots \cup [n-1]_n, \qquad \text{gde je}$$
$$[k]_n = \{k, k-n, k+n, k-2n, k+2n, \ldots, k-jn, k+jn, \ldots\}\,.$$

Dokaz. Refleksivnost. $a \equiv a \,(\mathsf{mod}\ n)$ jer za $t = 0$ važi $a - a = 0 \cdot n$.
Simetričnost. Ako je $a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n) \Longrightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z}$ takav da je $a - b = n \cdot t$, odakle je $b - a = n \cdot (-t)$, tj. $b \equiv a\,(\mathsf{mod}\ n)$.
Tranzitivnost. Ako je $a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n)$ i $b \equiv c\,(\mathsf{mod}\ n) \Longrightarrow \exists\, t_1,\, t_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a - b = n \cdot t_1$, i $b - c = n \cdot t_2$, odakle je

$$\begin{aligned} a - c \;&=\; (a-b) - (b-c) = n \cdot t_1 - n \cdot t_2 = n \cdot (t_1 - t_2) = n \cdot t, \\ &\text{gde je} \quad t = t_1 - t_2 \in \mathbb{Z} \;\Longrightarrow\; a \equiv c\,(\mathsf{mod}\ n). \end{aligned}$$

Preostale tvrdnje posledica su činjenice da svaka relacija ekvivalencija razbija skup na disjunktne unije nepraznih podskupova. □

1.31. Teorema (Osnovni stav aritmetike). *Za svaki prirodni broj a jedinstveno su određeni prosti brojevi $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takvi da je*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\,.$$

Dokaz. Egzistencija. Ako je a prost broj onda je dokaz gotov. Ako nije onda postoji najmanji prost broj q_1 takav da $q_1 \mid a \Longleftrightarrow a = q_1 \cdot a_1$ i $a > a_1$ jer je $q_1 \geq 2$. Sada analogno razmatranje primenimo na a_1. Dakle, ako je a_1 prost broj dokaz je gotov jer je $a = q_1 \cdot a_1$, ako a_1 nije prost onda postoji minimalni prost broj $q_2 \geq q_1$ (jer u suprotnom q_1 ne bi bio minimalan koji deli a) takav da $q_2 \mid a_1 \Longleftrightarrow a_1 = q_2 \cdot a_2$ i $a_1 > a_2$ jer je $q_2 \geq 2$, itd. Tako dolazimo do niza prirodnih brojeva $a = a_0 > a_1 > a_2 \cdots > a_k > 1$ i algoritam staje kada je a_k prost. To se mora desiti jer između a i 1 ima konačno mnogo prostih brojeva. Ako sada među prostim brojevima $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_k \leq a_k$ skupimo iste dobijamo traženu dekompoziciju.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da imamo dva predstavljanja broj a kao proizvoda prostih brojeva, tj.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m},$$

takvi da je $p_1 < p_2 \cdots < p_n$ i $q_1 < q_2 \cdots < q_m$. Sada pretpostavimo da postoji najmanji indeks i takav da je

$$\begin{aligned} &p_1 = q_1,\ \alpha_1 = \beta_1;\ \ p_2 = q_2,\ \alpha_2 = \beta_2;\ \ldots\ p_{i-1} = q_{i-1},\ \alpha_{i-1} = \beta_{i-1};\ \text{i} \\ &p_i \neq q_i \ \text{ ili } \ p_i = q_i, \ \text{ ali } \ \alpha_i \neq \beta_i\,. \end{aligned}$$

jer je u suprotnom dokaz gotov. Pretpostavimo da je npr. $p_i < q_i$ onda je i $p_i < q_j\ (j = i, \ldots, m)$, sada imamo sa jedne strane $p_i \mid a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ a sa druge $p_i \nmid a = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$ što je nemoguće. Slično dobijamo i u slučaju da je $p_i > q_i$. Neka je sada $p_i = q_i$ ali je npr. $\alpha_i > \beta_i$ odakle

$$a = p_i^{\alpha_i} \cdot a_1 \quad\Longrightarrow\quad p_i^{\alpha_i} \mid a \ \text{ i } \ p_i \nmid a_1 \qquad a = p_i^{\beta_i} \cdot a_2 \quad\Longrightarrow\quad p_i^{\beta_i} \mid a \ \text{ i } \ p_i \nmid a_2,$$

tj. sa jedne strane $p_i^{\alpha_i} \mid a$ a sa druge strane $p_i^{\alpha_i} \nmid a$, što je nemoguće. □

1.32. Racionalni brojevi. Kako u skupu celih brojeva jednačina $a \cdot x = b$, nema rešenja za proizvoljne $a, b \in \mathbb{Z}$ (npr. $a = 2$, $b = 1$), postavlja se slično pitanje kao i kod sabiranja u skupu prirodnih brojeva (**1.23**), tj. da li je moguće proširiti skup $\mathbb{Z}$ tako da u tom proširenom skupu svojstva (A1)-(A6) i (A8)-(A15) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $a \cdot x = b$, za svaki izbor $a \neq 0$[11],b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup racionalni brojeva

[11] jer ako je $a = 0$ i b proizvoljan ceo broj različit od 0 onda jednačina $a \cdot x = b$ očigledno nema rešenja.

$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Q}$ važi i svojstvo: za $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, postoji jedinstveni broj $1/a = a^{-1} \in \mathbb{Q}$ takav da je,

$$\text{(A7)} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Broj a^{-1} zove se inverzni element od a s obzirom na množenje.
Skup racionalnih brojeva ima jednu osnovnu osobinu (koja ga izdvaja od ostalih skupova), a ta je da su **rezultati svih fizičkih merenja racionalni brojevi**. Uređena trojka $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje, tj. algebarska struktura za koju važe aksiome

(i1) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova grupa.

(i2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa.

(i3) važi distributivnost $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q})$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Štaviše $\mathbb{Q}$ je najmanje polje koje ima beskonačno mnogo elemenata.

1.33. Skup realnih brojeva. Sada nastavljamo na sličan način, tj. pokušavamo da rešimo u skupu racionalnih brojeva jednačinu $x^2 = 2$. Sledeća teorema pokazuje da rešenje te jednačin ne postoji u skupu $\mathbb{Q}$.

Teorema. $\sqrt{2}$ *nije racionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada on dozvoljava zapis u vidu $\sqrt{2} = p/q$, gde je $NZD(p, q) = 1$ (tj. razlomak p/q smo maksimalno skratili). Ovu relaciju prepišemo u ekvivalentnom vidu kao $2q^2 = p^2$, odakle sledi da $p = 2\,l$ jer je leva strana poslednje jednakosti parna, tako da p mora biti paran. Sada imamo

$$2q^2 = (2\,l)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = 2\,l^2.$$

Odavde sledi da $2 \mid q$, tj. $NZD(p, q) \geq 2$ što je nemoguće. $\square$

Posmatrajmo sada skupove $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}$ i $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$. Očigledno je da su A, B neprazni skupovi. Primetimo da su npr. $1, 1.4, 1.41, .. \in A$ i postoji racionalni broje M (npr. $2, 3, 4, ...$) takvi da $\forall\, q \in A$ važi da je $q \leq M$. Brojeve M sa ovakvim svojstvom zovemo majorantama (gornjim granicama) skupa M. Od svih gornjih granica od posebnog je interesa najmanja gornja granica koja se zove supremum skupa A i obeležava se sa $\sup A$. Analogno, skup B nema majorantu, ali zato ima minorantu $m \in \mathbb{Q}$ (npr. $0, 1/2, 1, 1.2, ...$), tj. broj takav da $\forall\, q \in B$ važi da je $q \geq m$. Od svih minoranti od posebnog je interesa najveća koja se zove infimum skupa B i koja se obeležava sa $\inf B$.

Iz prethodne teoreme sledi da je $\sup A = \inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tj. npr. skup A nema supremuma u $\mathbb{Q}$, tj. u nekom smislu je šupalj. Tako se opet nameće pitanje da li je moguće skup $\mathbb{Q}$ proširiti tako da da sva svojstva (A1)-(A15) ostanu sačuvana i u tom proširenju, ali da važi da svaki podskup A tog proširenja koji je odozgo ograničen ima supremum u tom proširenju. Odgovor i na ovo pitanje je pozitivan, najmanji takav skup je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, skup realnih brojeva je skup u kojem važe svojstva (A1)-(A15), ali još važi i,

(A16) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup $A \subset \mathbb{R}$ ima supremum u skupu $\mathbb{R}$.

Važi sledeća teorema,

Teorema. *Skup $\mathbb{R}$ jedinstveno je određen aksiomama (A1)-(A16) (do na izomorfizam).*

Dakle, za polje $\mathbb{Q}$ važe sve aksiome kao i za $\mathbb{R}$ osim aksiome (A16). Napomenimo da je proširenje sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ znatno komplikovanije od prethodnih proširenja, sa $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$ i sa $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Q}$. Skup $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zove se skup iracionalnih brojeva. Napomenimo da je skup $\mathbb{Q}$ gust u skupu $\mathbb{R}$ u sledećem smislu:

Teorema. *Za bilo koja dva realna broja $r_1 < r_2$ postoji racionalni broj q takav da je $r_1 < q < r_2$.*

1.34. Algebarski brojevi. Izraz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, zove se polinom $n-$tog stepena (ako je $a_n \neq 0$) nad poljem $\mathbb{Q}$ ako su svi koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ racionalni brojevi. Skup $\mathcal{N}_f = \{x_0 \mid f(x_0) = 0\}$ zove se skup svih nula polinoma f. Skup $\mathcal{N}_f$ ne mora biti podskup od $\mathbb{R}$.

Za broj $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je algebarski nad $\mathbb{Q}$ ako postoji polinom f sa racionalnim koeficijentima (za skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima koristimo oznaku $\mathbb{Q}[x]$) takav da je $f(a) = 0$. Skup svih algebarskih brojeva nad $\mathbb{Q}$ obeležavamo sa $\mathbb{A}$. Jasno je da je $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Realni brojevi iz skupa $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, tj. koji nisu algebarski nazivaju se transcedentnim brojevima, takvi su npr. $\pi, e, \sqrt{\pi}, ...$

1.35. Decimalni zapis realnog broja. Kao što znamo iz svakodnevnog iskustva u praksi koristimo dekadski brojni sistem, tj. sve brojeve predstavljamo pomoću cifara $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tako npr. oznaka 12345 predstavlja prirodni broj

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0\,,$$

ili u opštem obliku svaki celi broj [12] može se predstaviti u obliku polinoma $(x = 10)$ na sledeći način:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0, \quad a_n \neq 0.$$

Postoje i drugi brojevni sistemi, a veoma su popularni oni koji se koriste u računarstvu čije su osnove $2, 8$ ili 16.

Primetimo da proizvoljne razlomke (npr. $1/2$) ne možemo predstaviti kao polinome sa osnovom 10 (ili bilo kojom drugom). Ovaj problem se prevazilazi tako da dozvoljavamo i negativne stepene broja 10 i tamo gde počinju negativni stepeni uvodimo decimalni zarez. Tako je npr.,

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}\,, \tag{3}$$

ali se ispostavlja, kao što pokazuje sledeći primer,

$$\frac{1}{3} = 0,3333\cdots = 0,\dot{3} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \cdots = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3 \cdot 10^n\,, \tag{4}$$

da moramo dozvoliti da se iza decimalnog zareza pojavljuje beskonačno mnogo članova [13].

[12] Ako je broj negativan dodamo $-$ ispred broja.

[13] Pitanjima suma sa beskonačno mnogo članova bavićemo se u 2. glavi Nizovi.

Postavlja se prirodno pitanje kako iz decimalnog zapisa realnog broja prepoznati da je on racionalan. Primeri (3) i (4) su tipični tj. broj je racionalan ako i samo ako je njegov decimalni zapis konačan (tj. sve cifre nakon nekog mesta su 0, npr. u slučaju broja 1/2, cifre $a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ su jednake 0) ili nakon nekog mesta postoji konačan niz cifara koji se ponavlja (primer je broj 1/3, kod kojeg je $3 = a_{-1} = a_{-2} = \cdots$).

Primer. Predstaviti broj 17/7 u decimalnom obliku.

$$17/7 = 2,\underbrace{428571}\underbrace{428571}\ldots$$

Iz gore rečenog sledi da decimalni zapisi iracionalnih brojeva nisu konačni i ne postoji konačan niz cifara koji se ponavlja. Drugim rečima cifre u decimalnom zapisu iracionalnog broja ređaju se bez nekog reda, npr. prvih 50 cifara u decimalnim zapisima brojeva π i $\sqrt{2}$ su:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 51 \\ \sqrt{2} &= 1,41421356237309504880168872420969807856967187537 69\,. \end{aligned}$$

1.36. Brojnost (Kardinalni broj) skupa. Za svaki prirodan broj n obeležimo sa $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup prvih n prirodnih brojeva. Kažemo da je skup A konačan ako postoji bijekcija sa nekog od skupova $\mathcal{S}_n$ u A. Npr. ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{55}\}$ onda je A u bijekciji sa skupom $\mathcal{S}_{55}$ i jedna od bijekcija je npr. $f(i) = a_i, i = 1, 2, \ldots, 55$ [14].

Niz u skupu B je svako preslikavanje sa skupa $\mathbb{N}$ u B. Elemente niza obeležavamo sa $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots a_n = f(n), \ldots$ Kažemo da je skup B prebrojiv ako se njegovi elementi mogu poređati u niz, tj. ako postoji bijekcija f sa $\mathbb{N}$ u B. Ovo znači da skup B ima 'isti broj' elemenata kao i skup $\mathbb{N}$.

Tako su npr, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ prebrojivi [15] skupovi. Postavlja se pitanje kako npr. sve cele brojeve poređati u niz. Jedno rešenje je:

$$\begin{aligned} &0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, \quad \text{što možemo zapisati i formulom} \\ &f(0) = 0, \quad f(2k) = k \quad \text{i} \quad f(2k+1) = -k,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Za skup $\mathbb{Q}$ dokaz je komplikovaniji. Dakle, iako skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ imaju beskonačno mnogo elemenata i važi $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$ [16] oni su prebrojivi i u tom smislu imaju isti kardinalni broj. Ipak, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ima bitno više elemenata od prebrojivih skupova, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema. *Skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv. Tada je prebrojivi svaki njegov podskup, pa specijalno i interval $[0, 1]$. Svaki element iz intervala $[0, 1]$ možemo predstaviti u dekadskom obliku. Dakle, postoji bijekcija

[14] Odredite broj bijekcija sa $\mathcal{S}_n$ u A.

[15] Prebrojiv je i skup algebarskih brojeva.

[16] Primetimo da ne postoji bijekcija sa pravog podskupa konačnog skupa na taj isti skup.

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, takva da je

$$f(1) = a_1 = \overline{0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_n^1 \dots}$$
$$f(2) = a_2 = \overline{0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots}$$
$$f(3) = a_3 = \overline{0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots a_n^3 \dots}$$
$$f(4) = a_4 = \overline{0, a_1^4 a_2^4 a_3^4 \dots a_n^4 \dots}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sada posmatrajmo sledeći realni broj,

$$b = \overline{0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots}$$

gde smo izabrali cifre $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ tako da je $b_1 \neq a_1^1$, $b_2 \neq a_2^2$, $b_3 \neq a_3^3$,... $b_n \neq a_n^n$, ... Odavde sledi da broj b nije u slici funkcije f jer $b \neq f(j) = a_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ (jer se broj b razlikuje barem u j.-toj cifri od broja a_j. Dakle, naša pretpostavka da je $\mathbb{R}$ prebrojiv dovela nas je u kontradikciju, jer upravo opisana procedura [17] pokazuje da ne postoji surjekcija sa $\mathbb{N}$ u interval $[0, 1]$. □

Napomena. Rezimirajmo, kardinalni broj (brojnost) skupa:

- $\mathcal{S}_n$ je n (broj njegovih elemenata),
- $\mathbb{N}$ je $\aleph_0$ (alef 0) (prebrojiv),
- $\mathbb{R}$ je c (kontinum).

Iz gore rečenoga možemo da zaključimo da se pojam jednakobrojnosti konačnih skupova na prirodan (tj. najjednostavniji) način generališe i na skupove koji imaju beskonačno mnogo elemenata sledećom definicijom: skupovi A i B su istobrojni ili kažemo da imaju isti kardinalni broj ako postoji barem jedna bijekcija sa A na B.

5. Kompleksni brojevi

1.37. Skup kompleksnih brojeva. Nastavljajući u istom duhu, pokušavamo da rešimo jednačinu $x^2 = -1$ u skupu $\mathbb{R}$. Lako se možemo ubediti (koristeći aksiome (A1)-(A16) da ta jednačina nema rešenja u skupu $\mathbb{R}$. Ako rešenje te jednačine obeležimo sa $i = \sqrt{-1}$, i nazovemo ga imaginarna jedinica, možemo posmatrati skup

$$\mathbb{C} = \{z = a + i\, b \mid a,\, b \in \mathbb{R}\} \supsetneqq \mathbb{R}\,.$$

Skup $\mathbb{C}$ zove se skup kompleksnih brojeva. Realne brojeve $a = \Re(a+i\,b)$ i $b = \Im(a+i\,b)$ nazivamo redom realnim i imaginarnim delom kompleksnog broja $z = a + i\,b$.
Na skupu $\mathbb{C}$ definisane su binarne operacije sabiranja i množenja, koje su proširenja odgovarajućih operacija sa skupa realnih brojeva, formulama

(5) $$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\,,$$

(6) $$z_1\, z_2 = (a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1).$$

Ispostavlja se da ovako definisane operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva imaju iste osobine kao kod realnih brojeva (A1)-(A9). To zapravo znači da je skup $\mathbb{C}$ polje s obzirom na operacije (5) i (6). Može se pokazati da na skupu $\mathbb{C}$ ne postoji

[17] Koja se inače zove Kantorov (Cantor) dijagonalni postupak.

relacija parcijalnog poretka $'\leq'$ koja bi bila proširenje relacije poretka na $\mathbb{R}$, i koja bi se slagala sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

1.38. Geometrijska interpretacija. Primetimo da su dva kompleksna broja jednaka akko imaju jednake realne i imaginarne delove, što je posledica sledećeg niza implikacija:

$$\begin{aligned} & z_1 = a_1 + i\, b_1 = z_2 = a_2 + i\, b_2 \Longrightarrow a_1 - a_2 = i\,(b_2 - b_1) \qquad \text{kvadriranjem} \\ & \Longrightarrow (a_1 - a_2)^2 = i^2\,(b_2 - b_1)^2 = -(b_2 - b_1) \Longrightarrow a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) = 0\,. \end{aligned}$$

Ova činjenica nam omogućuje da skup $\mathbb{C}$ identifikujemo sa $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ na sledeći način (Slika 1):

$$z = a + i\, b \quad \longmapsto \quad z = (a, b)$$

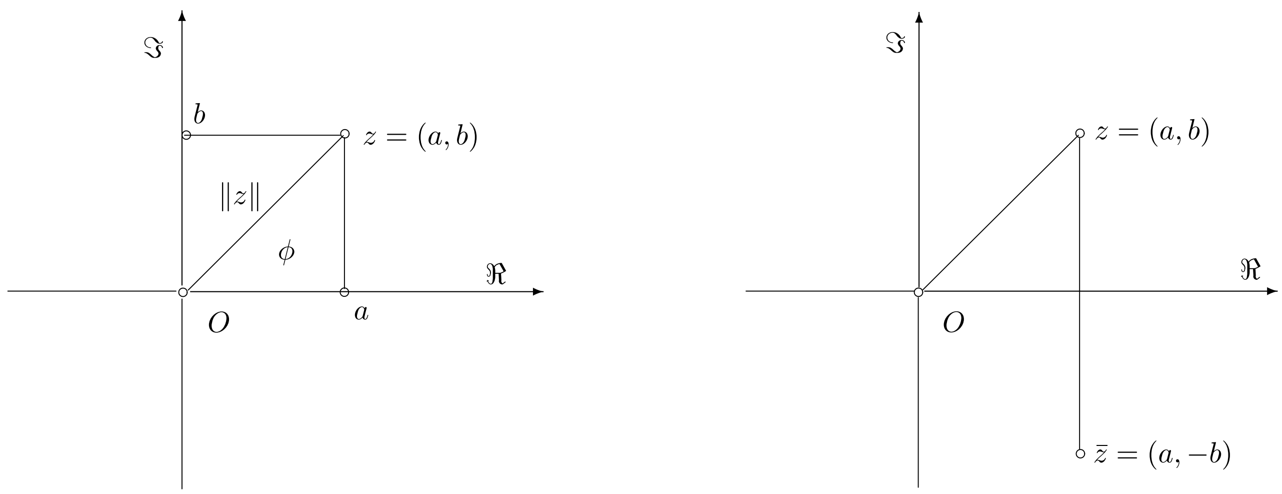
i onda formule (5) i (6) odmah prepisujemo kao

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\,, \tag{7}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2, a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\,. \tag{8}$$

Primetimo da broju i odgovara uređeni par $(0, 1)$.

Ravan $\mathbb{R}^2$ u kojoj predstavljamo kompleksne brojeve zove se Gausova ravan, ose odgovarajućeg koordinatnog sistema Gausove ravni nazivaju se realna i imaginarna osa (Slika 1).



Dekartov i polarni oblik kompleksnog broja — Konjugovanje

Slika 1. Gausova ravan

1.39. Konjugovanje. Preslikavanje $^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definisano formulom

$$\mathbb{C} \ni z = a + i\, b \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = a - i\, b \in \mathbb{C}\,,$$

zove se konjugovanje kompleksnih brojeva. Geometrijski konjugovanje predstavlja osnu simetriju s obzirom na realnu osu u Gausovoj ravni, Slika 1. Konjugovanje kompleksnih brojeva slaže se sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Za bilo koje kompleksne brojeve* z_1, z_2 *važi:*

(i1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$

(i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,.$

(i3) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_1} = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2.$

Dokaz. Neka je $z_1 = a + i\,b$ i $z_2 = c + i\,d$, tada imamo,

(i1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + i\,(b+d)} = (a+c) - i\,(b+d) = (a - i\,b) + (c - i\,d) = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$

(i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + i\,b)\cdot(c + i\,d)} = \overline{(a\,c - b\,d) + i\,(a\,d + b\,c)} = (a\,c - b\,d) - i\,(a\,d + b\,c)$

$= (a - i\,b)(c - i\,d) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

(i3) $z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + i\,b)(a - i\,b) = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2\,.$ □

Broj $\|z_1\|$ zove se modul (moduo) kompleksnog broja z_1 i predstavlja u Gausovoj ravni rastojanje broja z_1 od koordinatnog početka.

1.40. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Izraz $z = a + i\,b$ zove se Dekartov oblik kompleksnog broja. Formule (5) i (7) pokazuju da je Dekartov oblik kompleksnog broja pogodan za sabiranje, dok je formula za množenje kompleksnih brojeva (6) (ili (8)) mnogo komplikovanija. Dekartov oblik možemo prepisati na sledeći način,

$$z = a + i\,b = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\,. \tag{9}$$

Primetimo da je

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1\,,$$

odakle sledi da postoji ugao ϕ ($0 \le \phi \le 2\,\pi$) takav da je

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i} \quad \sin\phi\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

tako da formula (9) prima sledeći oblik,

$$z = a + i\,b = \|z\|(\cos\phi + i\,\sin\phi)\,, \tag{10}$$

koji se zove trigonometrijski ili polarni oblik kompleksnog broja.
Ugao ϕ zove se argument kompleksnog broja z i pišemo $\phi = \arg(z)$.

Geometrijska interpretacija trigonometrijskog broja vidi se u Gausovoj ravni ako vrh broja $z = a + i\,b$ ortogonalno projektujemo na koordinatne ose, dobijamo da je $\Re(z) = \|z\|\,\cos\phi$ i $\Im(z) = \|z\|\,\sin\phi$, Slika 1. Kako smo skup $\mathbb{C}$ identifikovali sa $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tada trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućava da u ravni $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ uvedemo koordinatni sistem čije su koordinate r-rastojanje tačke M od koordinatnog početka i ϕ ugao koji zaklapa poluprava OM (O je koordinatni početak) sa pozitivnim delom ose x. Ovaj koordinatni sistem zove se polarni koordinatni sistem u ravni.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja pogodniji za množenje kompleksnih brojeva od Dekartovog kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka su* $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\,\sin\phi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\,\sin\phi_2)$ *dva proizvoljna kompleksna broja tada važi formula*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\, r_2\, (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,\sin(\phi_1 + \phi_2))\,. \tag{11}$$

Iz ove formule vidimo da se kompleksni brojevi množe tako što se moduli pomnože, a argumenti saberu.

Dokaz.
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \;=\; & r_1(\cos\phi_1 + i\,\sin\phi_1)\, r_2(\cos\phi_2 + i\,\sin\phi_2) = r_1\, r_2\, ((\cos\phi_1\,\cos\phi_2 - \sin\phi_1\,\sin\phi_2) \\ & + i\,(\cos\phi_1 \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cos\phi_2)) = r_1\, r_2\, ((\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,\sin(\phi_1 + \phi_2))\,. \end{aligned}$$ □

Posledice. *Za* $0 \neq z = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) \in \mathbb{C}$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *važe sledeće formule:*

(i1) $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\,\sin(n\phi))\,,$

(i2) $z^{-n} = r^{-n}(\cos(n\phi) - i\,\sin(n\phi))\,,$

(i3) *ako je* $r = \|z\| = 1$ *onda važe i poznate Moavrove formule:*

$$(\cos\phi + i\,\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\,\sin(n\phi),$$

$$(\cos\phi - i\,\sin\phi)^n = \cos(n\phi) - i\,\sin(n\phi).$$

Dokaz. (i1) sledi lako indukcijom iz Propozicije za $z = z_1 = z_2$.

(i2) Primetimo da je,

$$\begin{aligned} z^{-1} \;=\; & \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\,\sin\phi)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi + i\,\sin\phi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi + i\,\sin\phi}\cdot\frac{\cos\phi - i\,\sin\phi}{\cos\phi - i\,\sin\phi} \\ =\; & r^{-1}(\cos\phi - i\,\sin\phi)\,, \end{aligned}$$

i primena formule (i1) na broj $z^{-n} = (z^{-1})^n$ uz korišćenje činjenice da je sinus neparna, a kosinus parna funkcija daje traženu formulu.

(i3) Moavrove formule su sada direktna posledica formula (i1) i (i2) za $\|z\| = 1$. □

Napomenimo da se kompleksni brojevi mogu predstaviti i u Eulerovom obliku, tj. važi

$$z = a + i\,b = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) = r\,e^{i\phi}\,.$$

1.41. n-ti koren iz kompleksnog broja. Neka je $z \in \mathbb{C}$, i

$$\omega^n = z = a + i\,b = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi).$$

Tada ω nazivamo n-tim korenom iz kompleksnog broja z. Kako je ω kompleksan broj možemo ga predstaviti u obliku $\omega = \rho\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$, a zatim primena Posledice (i1) iz prethodne tačke daje,

$$\omega^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha)) = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) \qquad \text{odakle je}$$

$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \phi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{tj.} \qquad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\,, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Zbog toga što je osnovni period funkcija sin i cos jednak 2π, iz prethodnog izraza za α_k sledi da je $\sin\alpha_0 = \sin\alpha_n = \cdots = \sin\alpha_{pn}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$, ili opštije $\sin\alpha_k = \sin\alpha_{n+k} =$

$\cdots = \sin\alpha_{pn+k}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$ i $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Analogne formule važe i za funkciju kosinus. Odakle, onda sledi da svaki kompleksan broj $z \neq 0$ ima tačno n različitih $n-$tih korena. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je $0 \neq z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$. Tada postoji tačno n kompleksnih brojeva $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ takvih da je $\omega_k^n = z$ za $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, i pri tome važi*

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) .$$

Primer. Odredite sve pete korene iz broja $z = 3 - i\,4$.
Na osnovu prethodne teoreme prvo imamo da je $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, tako da je

$$z = 5\left(\frac{3}{5} - i\,\frac{4}{5}\right) \quad\Longrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{3}{5}\,,\ \ \sin\alpha = -\frac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = -\arcsin\frac{4}{5}\,.$$

Sada na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da su peti koreni iz $3 - i\,4$:

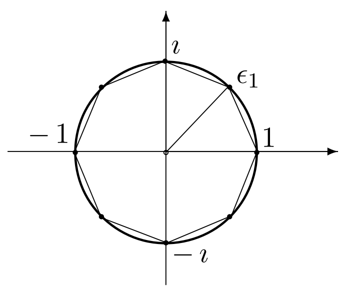
$$\omega_0 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha}{5} + i\sin\frac{\alpha}{5}\right),\ \omega_1 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi}{5}\right),\ \omega_2 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 4\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 4\pi}{5}\right),$$

$$\omega_3 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 6\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 6\pi}{5}\right), \omega_4 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 8\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 8\pi}{5}\right),$$

1.42. Sfera (krug) $\mathbf{S}^1$ i n−ti koreni iz jedinice. Neka je $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ jedinični krug u $\mathbb{R}^2$. Kako je očigledno skup $\mathbf{S}^1$ zatvoren za množenje kompleksnih brojeva (proizvod dva kompleksna broja modula 1 je opet kompleksni broj modula 1) i sadrži broj 1, kako su asocijativnost i komutativnost nasledne osobine (prenose se sa skupa na svaki njegov podskup) i kako je inverz kompleksnog broja modula 1 isti takav broj (vidi **1.41** Posledica (i2)), sledi da je $(\mathbf{S}^1, \cdot)$ podgrupa grupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Skup K_n je skup $n-$tih korena iz jedinice i važi, $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1\}$. Na analogan način kao i za krug može se proveriti da je K_n grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva. Nije teško videti da grupa K_n ima svoju realizaciju kao grupa rotacija ravni koja ostavlja fiksnim pravilni $n-$ugao. Dakle,

$$K_n = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \quad \text{gde je} \quad \varepsilon_k = \cos\phi_n + i\sin\phi_n,\ \phi_n = \frac{2\pi}{n}\,.$$



Slika 2. $n-$ti koreni iz 1 $(n = 8)$

Sada iz formule za množenje kompleksnih brojeva imamo sledeću propoziciju.

Propozicija. *U grupi $n-$tih korena iz jedinice K_n važe identiteti:*

(i1) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, za sve $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(i2) $\varepsilon_{n-k} = \overline{\varepsilon_k}$.

6. Elementi kombinatorike

1.42. Varijacije. Permutacije. Kombinacije. Neka je dat neki konačan skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Posmatrajmo skup

$$\mathsf{Var}_k(A) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_k) \subseteq A^k \mid b_i \neq b_j \text{ za } i \neq j\}.$$

Elementi skupa $\mathsf{Var}_k(A)$ zovu se varijacije bez ponavljanja (ili kraće varijacije), $k-$tog reda skupa A.

Teorema. *Broj elemenata skupa $\mathsf{Var}_k(A)$, jednak broju injekcija sa skupa $S_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ na skup A.*

Dokaz. Neka je $f : S_k \longrightarrow A$ '1–1', tada za izbor $f(1) = b_1$ imamo n mogućnosti. Sada kada smo izabrali $f(1) = b_1 \in A$, za izbor $f(2) = b_2$ imamo $n-1 = \mathsf{card}\,(S_k \setminus \{f(1)\})$ mogućnost, itd., tako da za izbor $f(k) = b_k$ preostaje $n-k+1 = \mathsf{card}\,(S_k \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(k-1)\})$ mogućnost. Kako su izbori za $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(k)$ nezavisni, broj svih injekcija sa S_k na A (odnosno $\mathsf{card}\,\mathsf{Var}_k(A)$) je $V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. □

U slučaju $k = n$ broj varijacije reda n na skupu od n elemenata jednak je broju bijekcija (= injekcija jer je A konačan) sa A na A. Kako se bijekcije nazivaju i permutacijama[18] i kako možemo izabrati $A = S_n$, vidimo da je broj svih permutacija (bijekcija) skupa od n elemenata P_n jednak

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!\ .$$

Po definiciji se uzima da je $0\,! = 1$.

Drugi sličan problem je problem određivanja broja svih $k-$članih podskupova skupa A (koji ima n elemenata), tj.

$$\mathsf{C}_k = \{B \subseteq A \mid \mathsf{card}\, B = k\}.$$

Svaki $k-$člani podskup od A zove se kombinacija $k-$tog reda skupa A. Da bismo odredili $\mathsf{card}\,(\mathsf{C}_k)$ potrebno je primetiti da svih $k\,!$ permutacija skupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ (uređenih $k-$torki) definišu isti skup B, tako da je taj broj C_k^n jednak

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{k\,!} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \binom{n}{k}.$$

Broj $\binom{n}{k}$ zove se binomni koeficijent.

1.43. Binomni koeficijenti. Neka od osnovnih svojstava binomnih koeficijenata su $(0 \leq k \leq n)$

$$\text{(i1)}\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{(i2)}\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \text{(i3)}\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz definicije binomnih koeficijenata.

[18] U slučaju da je A konačan skup.

(i3) sledi iz

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}+\frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k+1)\,!}=\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k+1)\,!}\\ &\times(n-k+1+k)=\frac{n\,!(n+1)}{k\,!\,(n-k+1)\,!}=\frac{(n+1)\,!}{k\,!\,(n-k+1)\,!}=\binom{n+1}{k}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Upravo dokazana formula (i3) poznata je kao i Pascalova[19] jednakost za binomne koeficijente.

1.44. Teorema (Binomna formula). Neka su $a,\, b\in\mathbb{R}$ proizvoljni realni brojevi, i n proizvoljan prirodan broj tada važi sledeća formula[20],

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k\\ &= a^n+\binom{n}{1}\,a^{n-1}\,b^1+\cdots+\binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}\,a^1\,b^{n-1}+b^n\,.\end{aligned}$$

Dokaz: Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n=1$ formula je tačna jer je $(a+b)^1=a^1+b^1$. Pretpostavimo da je binomna formula tačna za neki $n\in\mathbb{N}$, tada je

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n \overset{\text{(pi)}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k+1}\,b^k\\ &+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k+1}\,b^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\,a^{n-(k-1)}\,b^k\\ &= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}\ \text{(vidi }\mathbf{1.43}\text{ (i3))}}\,a^{n-k+1}\,b^k=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\,a^{(n+1)-k}\,b^k\,,\end{aligned}$$

dakle, formula je tada tačna i za $n+1$. $\square$

1.45. Neke posledice binomne formule. Ako u binomnu formulu prvo uvrstimo $a=b=1$, a zatim $a=1,\, b=-1$, dobijamo sledeća dva identiteta

$$\begin{aligned}(1+1)^n=2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,1^{n-k}\,1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,,\\ (1-1)^n=0^n=0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,1^{n-k}\,(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\,.\end{aligned}$$

Posledica. Kako je $\binom{n}{k}$ jednak broju $k-$članih podskupova skupa A koji ima n elemenata, vidimo da je ukupan broj svih podskupova skupa A, tj. broj elemenata partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ jednak $\mathsf{card}\,\mathcal{P}(A)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n\,.$

[19] Blaise Pascal, 1623–1662, francuski matematičar.

[20] Poznata kao binomna formula.

7. Zadaci

1.46. Neka su dati skupovi

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$, i $C = \{-1,0,1,2,3\}$.

(b) $A = [0,2)$, $B = (1,3] \cup \{5\}$ i $C = [0,1] \cup (2,4)$.

Odredite skupove

(i1) $A \cup B$, $A \cup C$, (i2) $A \cap B$, $B \cap C$, (i3) $X = A \cup B \cup C$, A^c u X,

(i4) $A \setminus B$, $B \setminus A$, (i5) $A \setminus C$, $B \setminus C$, (i6) $X \setminus B$, $X \setminus C$,

(i7) $A \triangle B$, $A \triangle C$, (i8) $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, (i9) $\mathcal{P}(A \cup B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$.

1.47. Pokažite da je $A \cup B = A$ ako i samo ako $B \subseteq A$.

1.48. Dokažite preostale jednakosti iz **1.4**.

1.49. Dokažite sve jednakosti iz **1.5**.

1.50. Neka su A i B proizvoljna dva skupa. Pokažite da je

(i1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, (i2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Dokaz: Pokažimo (i1). Dokaz je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \text{ i } X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ i } \mathcal{P}(B)$$
$$\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\,. \qquad \square$$

1.51. Dokažite (i2)-(i5) iz **1.7**.

1.52. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Pokažite da važi,

(i1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$, (i2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

(i3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.53. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $f : A \longrightarrow B$ neka funkcija. Pokažite da su ekvivalentni sledeći iskazi:

(i1) f je '1–1', (i2) f je 'na'. (i3) f je bijekcija.

1.54. Neka su date binarne relacije ρ, σ i τ na A. Pokažite da važi

(i1) $(\rho\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\sigma^{-1}$, (i2) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$,

(i3) $\rho(\sigma \cup \tau) = \rho\sigma \cup \rho\tau$, (i4) $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq \rho\sigma \cap \rho\tau\,.$

1.54. Neka su ρ i σ dve binarne relacije na skupu A. Dokažite

(i1) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$, (i2) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$,

(i3) $(\rho \setminus \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \setminus \sigma^{-1}$, (i4) $(\rho^c)^{-1} = (\rho^{-1})^c$.

1.55. Neka skupovi A i B imaju konačan broj elemenata. Pokažite

(i1) da važi formula, $\mathsf{card}\,(A \cup B) = \mathsf{card}\,A + \mathsf{card}\,B - \mathsf{card}\,(A \cap B)$.

(i2) da je $\mathsf{card}\,\mathcal{P}(A) = 2^{\mathsf{card}\,A}$, gde je $\mathcal{P}(A)$ (partitivni skup od A) skup svih podskupova skupa A.

1.56. Dokažite da je

(i1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k}\,,\,1\Big] = (0,1]\,,$ (i2) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} \Big[\frac{k-1}{k}\,,\,1\Big] = \{1\}\,.$

1.57. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $\|A\|= n$ i $\|B\|= m$. Koliko ima funkcija sa A u B? Koliko je među njima injekcija, surjekcija i bijekcija.

1.58. Neka je skup A konačan, tj. $\| A \|= m$. Koliko ima relacija na skupu A? Koliko je među njima refleksivnih, antirefleksivnih, simetričnih i antisimetričnih relacija?

Rešenje: Prema **1.19** svakoj relaciji na A odgovara tačno jedna tablica tipa $m\times m$, funkcije te relacije. Dakle, u tablici ima ukupno m^2 mesta, a na svakom može biti ili 1 ili 0. Prema tome, ukupan broj relacija je 2^{m^2}.

Da bi relacija ρ na A bila refleksivna u tablici njene funkcije (vidi **1.19**) na dijagonali moraju biti sve 1, a na sva preosta mesta nema nikakvih uslova. Dakle, ukupan broj svih takvih relacija je $2^{m\,(m-1)}$.

Analogno, kao i za refleksivne relacije njihov broj je $2^{m\,(m-1)}$.

Primetimo da uslov simetričnosti neke relacije ρ implicira da proizvoljno možemo izabrati vrednosti u $f_\rho(a_1,a_1)$, $f_\rho(a_2,a_1)$, $f_\rho(a_2,a_2)$, $\dots$, $f_\rho(a_m,a_1),\dots,f_\rho(a_m,a_m)$, i preostale vrednosti od $f_\rho(a_i,a_j)\,(i<j)$, su potpuno određene. Kako je broj uređenih parova (i,j) takvih da $i\geq j$, $i,j=1,\dots,m$ jednak $1+2+\cdots+m=m\,(m+1)/2$, broj traženih relacija je $2^{\frac{m\,(m+1)}{2}}$.

Za antisimetrične relacije analogno kao i za simetrične samo primetimo da je kod antisimetričnih relacija i dijagonala fiksirana, tako da je njihov ukupan broj $2^{\frac{m\,(m-1)}{2}}$. ♢

1.59. Dokažite da je skup $\mathcal{P}r$ svih prostih brojeva beskonačan.

Dokaz: Pretpostavimo da $\mathcal{P}r=\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$ konačan i da ima tačno k elemenata. Posmatrajmo broj $\Pi=p_1\cdot p_2\cdots p_k+1$, očigledno ovaj broj nije deljiv niti sa jednim prostim brojem p_i jer pri delenju sa svakim od njih daje ostatak 1. Prema definiciji ovaj broj deljiv je samo sa 1 i sa samim sobom, tj. on je prost što je kontradikcija sa pretpostavkom da su svi prosti brojevi elementi skupa $\mathcal{P}r=\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$. □

1.60. Nađite Euklidovim algoritmom $\mathsf{NZD}(a,b)$ ako su

(i1) $a=125, b=75$, (i2) $a=12600, b=23760$,

(i3) $a=5246, b=982$, (i4) $a=2250, b=2700$.

1.61. Dokažite da je $\mathsf{NZD}(a,b)\cdot\mathsf{NZS}(a,b)=a\cdot b$.

1.62. Neka je $a=p_{i_1}^{\alpha_1}\cdot p_{i_2}^{\alpha_2}\cdots p_{i_n}^{\alpha_n}$ i $b=q_{j_1}^{\beta_1}\cdot q_{j_2}^{\beta_2}\cdots q_{j_m}^{\beta_m}$. Odredite $\mathsf{NZS}(a,b)$ i $\mathsf{NZD}(a,b)$.

Rešenje: Ako sa $\mathcal{P}(a)=\{p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_n}\}$ i $\mathcal{P}(b)=\{p_{j_1},p_{j_2},\dots,p_{j_m}\}$ obeležimo skupove prostih brojeva koji učestvuju u rastavima brojeva a i b redom.
Ako je $\{p_1,p_2,\dots,p_k\}=\mathcal{P}(a)\cap\mathcal{P}(b)$ tada je $\mathsf{NZD}(a,b)=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}$ pri čemu je $p_i=p_{i_s}=p_{j_r}$ i $\gamma_t=\mathsf{min}(\alpha_{i_s},\beta_{j_r})$.
Slično, ako je $\{p_1,p_2,\dots,p_l\}=\mathcal{P}(a)\cup\mathcal{P}(b)$ tada je $\mathsf{NZS}(a,b)=p_1^{\delta_1}\cdot p_2^{\delta_2}\cdots p_l^{\delta_l}$ gde je $p_i=p_{i_s}$ ili $p_i=p_{j_r}$ i $\delta_t=\mathsf{max}(\alpha_{i_s},\beta_{j_r})$. ♢

1.62. Neka je $M\subseteq\mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

(i1) $n_0\in M$, (i2) $n\in M \implies n+1\in M$,

tada $M\supseteq\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq n_0\}$.

Dokaz: Neka je $\overline{M}=\{1,2,\dots,n_0-1\}$, tada iz Peanovih aksioma sledi da je $\overline{M}\cup M=\mathbb{N}$, tj. $M\supseteq\mathbb{N}\setminus\overline{M}$. □

1.63. Neka je $M\subseteq\mathbb{N}$ i neka važi

(i1) $1\in M$, (i2) $m\in M,\ \forall\, m\leq n \implies n+1\in M$,

tada je $M=\mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N}\setminus M\neq\emptyset$. Izaberimo minimalni element $n_0\in\mathbb{N}\setminus M$ (takav uvek postoji jer je $\mathbb{N}$ dobro uređen, pa svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element). Zbog (i1) $n_0\neq 1$, i primena svojstva (i2) za $m=n_0-1$ impliciraju $n_0\in M$ što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je pogrešna polazna pretpostavka $\mathbb{N}\setminus M\neq\emptyset$, dakle $M=\mathbb{N}$. □

1.64. Neka je $M\subseteq\mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

(i1) $1\in M,\ 2\in M$, (i2) $n, n-1\in M \implies n+1\in M$, tada $M = \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$, tada postoji minimalni element $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$. Zbog (i1) $n_0 \neq 1$, i $n_0 \neq 2$, ako je n_0 onda su zbog minimalnosti od n_0 brojevi $n_0 - 1$ i $n_0 - 2 \in M$ i primena svojstva (i2) implicira $n_0 \in M$ što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom. Dakle, $M = \mathbb{N}$. □

1.65. Dokažite da za svaki prirodan broj n važe sledeće jednakosti:

(i1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)$, (i2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2$,

(i3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, (i4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, k^2 = (-1)^{n-1}\,\frac{n\,(n+1)}{2}$,

(i5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)} = \frac{n}{2\,n+1}$, (i6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(n-k+1) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(n+2)$,

(i7) za $1 \neq x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, (i8) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n dvojki pod korenima}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Dokaz: (i1) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1/6\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)\}$.

(bi) $1^2 = 1 = \frac{1}{6}\, 1\,(1+1)\,(2\cdot 1+1) \implies 1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo redom,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{(pi)}}{=} \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)(n\,(2\,n+1) + 6\,(n+1)) = \frac{1}{6}\,(n+1)(2\,n^2+7\,n+6) \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)\,(n+2)\,(2\,n+3) = \frac{1}{6}\,(n+1)\,((n+1)+1)\,(2\,(n+1)+1),\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i2) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1/4\, n^2\,(n+1)^2\}$.

(bi) $1^3 = 1 = \frac{1}{4}\, 1^2\,(1+1)^2 \implies 1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(pi)}}{=} \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2+4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}\,(n+1)^2((n+1)+1)^2\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$. (i3) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} 1/(k\,(k+1)) = n/(n+1)\}$.

(bi) za $n = 1$ očigledno se leva i desna strana jednakosti podudaraju, tako da je $1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\,(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \overset{\text{pi}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \frac{n\,(n+2)+1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)} = \frac{n+1}{((n+1)+1)},\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i4), (i5) i (i7) analogno prethodnim zadacima (i1), (i2) i (i3). Za (i6) iskoristi formulu $\sum_{k=1} k = 1/2\, n\,(n+1)$ i (i1).

(i8) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{1+1}}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$, što je tačno.
Korak indukcije. Pretpostavimo da je gornja formula tačna za neki prirodan broj n, tada je

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{\text{n+1 dvojka pod korenima}}=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n dvojki pod korenima}}}\overset{\text{pi}}{=}\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=2\cos\frac{\pi}{2^{(n+1)+1}},$$

jer je $1+\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha$. Dakle, formula je tačna i za $n+1$ i onda AMI implicira da je formula tačna za sve prirodne brojeve. $\diamondsuit$

1.66. Pokažite da za $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ broj 2^{2^n} u dekadskom sistemu završava cifrom 6.

Dokaz: Neka je $M=\{n\in\mathbb{N}\mid 2^{2^n}\text{završava brojem } 6\}$. $2\in M$ jer je $2^{2^2}=16$. Pretpostavimo da je neki $n>1$ element iz M, tj. $2^{2^n}=10\cdot x+6, (x\in\mathbb{N})$. Sada imamo,

$$2^{2^{n+1}}=2^{2\cdot 2^n}=\left(2^{2^n}\right)^2=(10\cdot x+6)^2=100\cdot x^2+2\cdot 6\cdot 10\cdot x+36=10\cdot y+6,$$

pri čemu je $y=10\cdot x^2+12x+3$. Time je proveden korak indukcije i dokaz je gotov. $\square$

1.67. Dokažite da za svaki $n\in\mathbb{N}$ broj nastao dopisivanjem dekadskih zapisa brojeva 2^n i 5^n ima $n+1$ cifru.

Dokaz: Za $n=1$ radi se o broju 25 koji očigledno ima 2 cifre. Pretpostavimo sada da je tvrdnja istinita za neki $n\in\mathbb{N}$ i neka broj 2^n ima k cifara, a broj 5^n ima m cifara $(k+m=n+1)$. Tada imamo dve mogućnosti

$$\text{(i1)}\quad 10^{k-1}<2^n<5\cdot 10^{k-1}\qquad\text{i}\qquad\text{(i2)}\quad 5\cdot 10^{k-1}<2^n<10^k.$$

Potrebno je pokazati da broj nastao dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1} ima tačno $n+2=k+m+1$ cifru.
(i1) $2^{n+1}<10^k$ i broj 2^{n+1} ima k cifara. S druge strane je $2^n\cdot 5^n<5^{n+1}\cdot 10^{k-1}$, odakle sledi da je $10^{n-k+1}<5^{n+1}$, tj. broj 5^{n+1} ima barem $n+2-k$ cifri. Više ih ne može imati zbog $5^n<10^{n-k+1}\implies 5^{n+1}<5\cdot 10^{n-k+1}<10^{n-k+2}$. Tako da u ovom slučaju tvrdnja važi.
(i2) $5\cdot 10^{k-1}<2^n<10^k$, odake sledi da je $10^k<2^{n+1}$ i broj 2^{n+1} ima $k+1$ cifru. Iz druge nejednakosti sledi $5^{n+1}\cdot 10^{k-1}<10^n$, odakle je $5^{n+1}<10^{n-k+1}$ tako da brojevi 5^n i 5^{n+1} imaju isti broj cifara $m=n-k+1$. Dakle, ukupan broj cifara broja nastalog dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1}, i u ovom slučaju, je $n+2=k+m+1$.

1.68. Dokažite da za svaki prirodan broj n važe sledeće nejednakosti:

(i1) $\|\sin nx\|\le n\,\|\sin x\|$, (i2) za $\forall\beta\le -3$ važi $(1+\beta)^{2n-1}\le 1+(2n-1)\beta$,

(i3) $(2n)!<\dfrac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}$, (i4) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\le\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Dokaz: (i2) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo, $(1+\beta)^{2\cdot 1-1}=1+\beta\le 1+\beta=1+(2\cdot 1-1)\beta$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, sada imamo

$$\begin{aligned}(1+\beta)^{2n+1}&=(1+\beta)^2(1+\beta)^{2n}\overset{\text{(pi)}}{\le}(1+\beta)^2(1+(2n-1)\beta)=1+(2n+1)\beta\\&\quad+2(2n-1)\beta^2+\beta^2+(2n-1)\beta^3\le 1+(2n+1)\beta,\end{aligned}$$

jer je $2(2n-1)\beta^2+\beta^2+(2n-1)\beta^3\le 0$, za $x\le -3$. Pokažimo sada ovu nejednakost. Ako je $\beta=0$ onda nejednakost važi. Ako $\beta\ne 0$ tada je ova nejednakost ekvivalentna sa $(2n-1)\beta+4n-1\le 0$ ili $\beta\le(1-4n)/(2n-1)$. Poslednja nejednakost posledica je sledećeg niza ekviivalencija $(\forall n\in\mathbb{N})$,

$$2n-2\ge 0\iff 4n-1\le 6n-3\iff\frac{4n-1}{2n-1}\le 3\iff\beta\le -3\le\frac{4n-1}{2n-1}.$$

(i4) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $1/2\le 1/\sqrt{3\cdot 1+1}$, što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, pa imamo redom

$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{2n+1}{2n+3}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1}\overset{\text{(pi)}}{\leq}\frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+4}}\leq\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}\,,$$

jer je poslednja nejednakost ekvivalentna (koren je monotona funkcija pa možemo da kvadriramo poslednju nejednakost) sa

$$\begin{aligned}&(4n^2+4n+1)(3n+4)\leq(4n^2+8n+4)(3n+1) \iff\\ &12n^3+28n^2+19n+4\leq 12n^3+28n^2+20n+4 \iff n>0\,.\end{aligned}$$

1.69. Dokažite da za svaki prirodan broj n važi:

(i1) $\dfrac{n}{6}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n^3}{3}\in\mathbb{N}\,,$ (i2) $6\,\big|\,n(n+1)(4n+5),$

(i3) $9\,\big|\,n^3+(n+1)^3+(n+2)^3,$ (i4) $30\,\big|\,n^5+5n^3-6n,$

(i5) $3\,\big|\,5^n+2^{n+1},$ (i6) $64\,\big|\,3^{2n+3}+40n-27,$

(i7) $9\,\big|\,3\cdot4^{n+1}+10^{n-1}-4,\,,$ (i8) $17\,\big|\,3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}.$

Dz: (i1) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $1/6+1/3+1/2=1\in\mathbb{N}$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$ je $n/6+n^2/2+n^3/3=\alpha\in\mathbb{N}$, sada imamo,

$$\frac{n+1}{6}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}=\alpha+\frac{1}{6}+n+\frac{1}{2}+n^2+n+\frac{1}{3}\in\mathbb{N}\,.$$

(i2) Definišemo polinom $f(x)=x(x+1)(4x+5)$. Sada je tvrdnja ekvivalentna sa $6\,\big|\,f(n)$ za svaki $n\in\mathbb{N}$.
Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $f(1)=1\cdot(1+1)\cdot(4\cdot1+5)=18$ i $6\,\big|\,18$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$, $n\,\big|\,f(n)$, tj. $f(n)=6\alpha$ za neki $\alpha\in\mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned}f(n+1)&=(n+1)(n+2)(4n+9)=n(n+1)(4n+9)+2(n+1)(4n+9)\\&=n(n+1)(4n+5)+4n(n+1)+2(n+1)(4n+9)=f(n)+4n(n+1)\\&\quad+2(n+1)(4n+9)\overset{\text{pi}}{=}6\alpha+2(n+1)(6n+9)=6\alpha+6(n+1)(2n+3)\\&=6\underbrace{(\alpha+(n+1)(2n+3))}_{\in\mathbb{N}}\implies 6\,\big|\,f(n+1)\,.\end{aligned}$$

Korak indukcije u (i3) i (i4) sličan je istom od (i1), a korak indukcije u (i5)-(i7) sličan je koraku indukcije od (i8), tvrdnju koju ćemo sada dokazati.

(i8) Definišemo funkciju $f(x)=3\cdot5^{2x+1}+2^{3x+1}$. Sada je naša tvrdnja ekvivalentna sa $17\,\big|\,f(n)$ za svaki $n\in\mathbb{N}$.
Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $f(1)=3\cdot5^{21+1}+2^{31+1}=3\cdot125+16=391=17\cdot23$ i $17\,\big|\,f(1)$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$, $n\,\big|\,f(n)$, tj. $f(n)=17\alpha$ za neki $\alpha\in\mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned}f(n+1)&=(3\cdot5^{2n+3}+2^{3x+4}=75\cdot5^{2n+1}+8\cdot2^{3n+1}=8(3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1})\\&\quad+51\cdot5^{2n+1}\overset{\text{pi}}{=}8\cdot17\cdot\alpha+17\cdot5^{2n+1}=17\underbrace{(8\alpha+3\cdot5^{2n+1})}_{\in\mathbb{N}}\implies 17\,\big|\,f(n+1)\,.\end{aligned}$$

1.70. Dokažite da

(i1) $\forall n\geq5$, važi $2^n>n^2\,,$ (i2) $\forall n\geq10$, važi $2^n>n^3\,,$

(i3) $\forall n\geq2$, važi $\dfrac{4^n}{n+1}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\,,$

(i4) $\forall a,b\in\mathbb{R}^+$, $a\neq b$, i $n\geq2$, važi $(a+b)^n<2^n\,\dfrac{a^n+b^n}{2}\,.$

(i1) Baza indukcije. Za $n = 5$ imamo $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $4 < n \in \mathbb{N}$, $2^n > n^2$. sada imamo,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2\,n + 1 \overset{\text{pi}}{<} 2^n + 2\,n + 1 \le 2^{n+1}\,,$$

jer je $2\,n + 1 \le 2^n$, za svaki $n >\ge 3$, što ćemo pokazati takođe indukcijom. Za $n = 3$ tvrdnja važi jer je $2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$. Sada pretpostavimo da je ova nejednakost tačna za neki $3 \le n \in \mathbb{N}$ i imamo

$$2\,(n+1) + 1 = (2\,n + 1) + 2 \overset{\text{pi}}{<} 2^n + 2 < 2^n + 2^2 = 2^{n+1}.$$

Dakle, time je pokazano da za $3 \le n \in \mathbb{N}$ je $2\,n + 1 < 2^n$, a samim tim je dokazana naša tvrdnja.

(i2) analogno kao (i1).

(i4) Baza indukcije. Neka su $a,\, b \in \mathbb{R}^+$, $a \ne b$, tada za $n = 2$ imamo

$$0 < (a-b)^2 \iff (a+b)^2 < 2\,(a^2 + b^2) = 2^2\,\frac{a^2 + b^2}{2}\,.$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $2 \le n \in \mathbb{N}$ i sve $a,\, b \in \mathbb{R}^+$, $a \ne b$. Sada redom nalazimo,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n \overset{jer\ a+b>0}{<} (a+b)\,2^{n-1}\,(a^n + b^n) \le 2^n\,(a^{n+1} + b^{n+1})\,.$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned}(a+b)(a^n + b^n) \le 2\,(a^n + b^n) &\iff a^{n+1} - a^n\,b + b^{n+1} - a\,b^n \ge 0\\ &\iff (a-b)\,(a^n - b^n) > 0\,,\end{aligned}$$

što je tačno jer je stepena funkcija monotona.

1.71. Za $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ definišemo niz

$$a_1 = \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta), \quad a_2 = \frac{1}{2}\,(\beta + a_1), \quad \text{za } n > 2 \quad a_n = \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2})\,.$$

Pokažite da za svaki prirodan broj važi formula

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\beta\,.$$

Dokaz: Baza indukcije. Kako rekurentna formula uključuje dva susedna člana niza bazu je potrebno proveriti za $n = 1$ i $n = 2$.

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right)\beta = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,\beta = a_1\,,\\ n = 2 &\implies \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\beta = \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{9}{4}\,\beta = \frac{1}{4}\,\alpha + \frac{3}{4}\,\beta = a_2\,.\end{aligned}$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je data formula tačna za dva susedna prirodan broja $n-1$ i n, sada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_n) \overset{(\text{pi})}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1 - (-1)^{n-1}\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(1 - (-1)^n\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + (-1)^{n-1}\right)\beta\right.\\ &\left.+ \frac{1}{3}\left(2 + (-1)^n\right)\beta\right] = \frac{1}{3}\,\alpha\Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)\Big) + \frac{1}{3}\,\beta\Big(2 + \frac{1}{2}\\ &\times \Big(\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)\Big) = \frac{1}{3}\Big(1 - (-1)^{n+1}\Big)\alpha + \frac{1}{3}\Big(2 + (-1)^{n+1}\Big)\beta\\ \text{jer je} &\quad \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\,.\end{aligned}$$

1.72. Pokažite da važe sledeći identiteti,

(i1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\binom{n}{k} = 2^{n-1}\,n\,,$ (i2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\,\binom{n}{k} = 0\,,$

(i3) $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ m > n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{k} = \binom{m-1}{n}$,

(i4) $\forall\, n, k, m \in \mathbb{N},\ k,\, m \leq n, \qquad \sum_{j=0}^{k} \binom{n-m}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n}{k}$.

Uopštite (i1) i (i2) povećavajući stepen od k u sumama.

GLAVA 2

Vektori i analitička geometrija

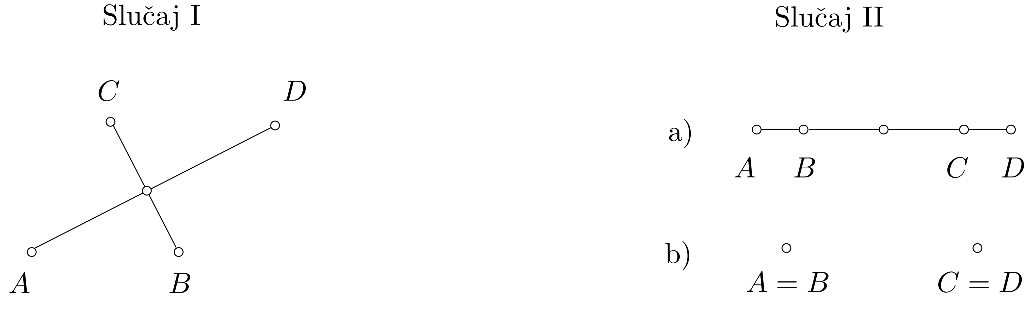
U ovoj glavi uvodimo pojam vektora, vektorskog prostora i dajemo njihove najjednostavnije primene u analitičkoj geometriji. Uvođenje vektora i njihova primena dovelo je do povezivanja starih matematičkih disciplina geometrije i algebre. Preciznije, vektori kao algebarski aparat omogućio je na početku lakše rešavanje poznatih geometrijskih (planimetrijskih i stereometrijskih) problema, a zatim je postao i obrazac za povezivanja nekih matematičkih disciplina. Jedna od tekovina uvođenja vektora su i koordinatni sistemi i koordinate. Danas je teško zamisliti i jednu naučnu disciplinu koja se bavi prirodnim naukama u kojoj se ne pojavljuju koordinate.

Izlaganje u ovoj glavi zasniva se uglavnom na knjizi N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić: *Analitička geometrija*, MF, 2003, kao i na nezavršenom materijalu *Linearna algebra*, autora.

1. Uvođenje vektora

2.1. Uvođenje vektora. Geometrija koja se uči u osnovnoj i srednjoj školi zasnovana je na pretpostavci da je prostor $\mathbb{E}$ u kojem živimo dobro aproksimiran Euklidskim prostorom, ili preciznije pretpostavljamo da je opisan aksiomama koje je ponudio D. Hilbert, krajem 19. i početkom 20. veka prilagođavajući Euklidovu aksiomatiku datu u "Elementima", savremenom matematčkom jeziku.

Pojam vektora. Na skupu $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, uređenih parova tačaka prostora $\mathbb{E}$ uvodimo relaciju $\sim$ na sledeći način: $(A, B) \sim (C, D)$ akko duži AD i BC imaju zajedničko središte (Slika 1). To zapisujemo ovako $(A, B) \sim (C, D)$.



Slika 1. Uvođenje vektora

Kako je u uređenom paru bitan redosled tačaka, uređene parove iz gornje definicije nazivamo i usmerenim dužima. Usmerena duž (A, B) određena je svojom početnom tačkom A i krajnjom tačkom B. Tako da se za usmerenu duž (A, B) često koristi oznaka $\overrightarrow{AB}$.

Poznato je da je četvorougao $ABCD$ paralelogram[1] ako i samo ako mu se dijagonale polove. Koristeći ovu činjenicu vidimo (vidi Sliku 1) da postoje dva tipa usmerenih duži (A, B) i (C, D) koje su u relaciji $\sim$: četvorougao $ABDC$ je paralelogram (nedegenerisani slučaj), tačke $ABDC$ pripadaju istoj pravoj (degenerisani slučaj) i zadovoljavaju uslov da se duži AD i BC polove.

Teorema 1. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ direktno sledi iz definicije. Tranzitivnost, videti npr. u knjizi N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić: *Analitička geometrija*' MF, 2003. □

Kao što znamo, osnovna osobina svake relacije ekvivalencije je da razbija skup na kojem je definisana na međusobno disjunktne klase ekvivalencije, tj. na podskupove čija je unija čitav skup i čiji preseci po parovima su prazni skupovi, vidi Uvod 1.17, tako da imamo sledeću definiciju:

svaka od klasa ekvivalencija na koje je skup uređenih parova tačaka (usmerenih duži) $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ *razbijen relacijom* $\sim$ *zove se* **vektor**.

Dakle, vektor definisan svojim predstavnikom usmerenom duži (A, B), je skup

$$[(A,B)] = \{(X,Y) \mid (X,Y) \sim (A,B)\}\,. \tag{12}$$

Kako je gornja oznaka glomazna koristimo oznaku $[(A, B)] = \mathbf{AB}$, da bismo naglasili razliku između usmerenih duži i vektora. Vektore ćemo obeležavati malim latiničnim slovima $x, y, a, b, \ldots$. Skup svih vektora obeležavamo sa $\mathcal{V}$, dakle,

$$\mathcal{V} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}/\sim = \{[(A,B)] \mid A, B \in \mathbb{E}\}. \tag{13}$$

Primetimo da smo sa $\mathbb{E}$ obeležili čitav prostor, ako sa $\mathbb{E}^1$ i $\mathbb{E}^2$ obeležimo redom sve tačke neke prave ili ravni tada relacija ekvivalencije $\sim$ ima smisla i na ovim skupovima i ona na isti način indukuje vektorske prostore $\mathcal{V}^1$ i $\mathcal{V}^2$.

2.2. Intenzitet, pravac i smer vektora. Kako je vektor jedna klasa ekvivalencije postavlja se pitanje čime je karakterisana ta klasa, tj. koja svojstva jednoznačno određuju vektor. Primetimo da su usmerene duži (A, B) i (C, D) u relaciji $\sim$ akko su nasuprotne strane paralelograma (ili degenerisanog paralelograma), tada lako možemo zaključiti:

(i) Rastojanje[2] između tačaka A i B, nazivamo dužinom, intenzitetom ili modulom vektora $\mathbf{AB}$ i obeležavamo ga sa $\|\mathbf{AB}\| = dis(A, B)$. Jasno je da svi predstavnici datog vektora imaju istu dužinu, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu dužinu ne mogu biti u istoj klasi.

(p) Pravu p određenu tačkama A i B $(A \neq B)$ i sve prave paralelne pravoj p zvaćemo pravcem vektora $\mathbf{AB}$. Primetimo da svi predstavnici datog vektora imaju isti pravac, kao i to da usmerene duži koje nemaju isti pravac ne mogu biti u istoj klasi. Primetimo da je pravac vektora zapravo jedna klasa ekvivalencije relacije 'biti paralelan' na skupu

[1] U označavanju temena poligona koristimo konvenciju da temena poligona obeležavamo u pozitivnom smeru tj. u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satovima starijim od 50 godina. Ovaj vremenski uslov je neophodan jer su se u zadnje vreme pojavili satovi čije se kazaljke kreću u suprotnom smeru od satova iz starih dobrih vremena.

[2] Rastojanje, tj. mera duži, uvedeno je u Euklidovim aksiomama.

svih pravih prostora $\mathbb{E}$. Vektore koji imaju isti pravac nazivamo kolinearnim, a one kojima su pravci paralelni nekoj ravni π, koplanarnim. Smatraćemo da je nula vektor kolinearan (ili koplanaran) sa svakim skupom kolinearnih (ili koplanarnih) vektora.

(s) Pod orijentacijom (ili smerom) vektora $\mathbf{AB}$ podrazumevamo smer prave p[3] određen početkom i krajem predstavnika $\overrightarrow{AB}$ na pravoj p. Primetimo da smer vektora ne zavisi od izbora predstavnika $\overrightarrow{AB}$, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu orijentaciju ne mogu biti u istoj klasi.

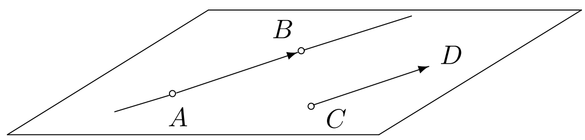
Lako se vidi da je svaki vektor jednoznačno određen svojim intenzitetom, pravcem i smerom.

2.3. Neki specijalni vektori. Vektor čiji je predstavnik usmerena duž $\overrightarrow{AA}$, kojoj se početak i kraj poklapaju, nazivamo nula vektorom i obeležavamo ga sa $\mathbf{0}$. Jasno je da vektor ima dužinu 0 ako i samo ako je on nula vektor. Nula vektor nema ni pravac ni smer. Za vektor $\mathbf{BA}$ kažemo da je suprotnosmeran vektoru $\mathbf{AB}$.

2.4. Linearne operacije u skupu vektora. Da bismo mogli definisati operacije na skupu vektora, neophodna nam je sledeća teorema, koja zapravo tvrdi da je prostor $\mathbb{E}$ homogen i da su sve tačke potpuno ravnopravne[4].

Teorema 1. *Ako je A proizvoljna tačka skupa $\mathbb{E}$, za svaki vektor $a \in \mathcal{V}$ postoji jedinstvena tačka $B \in \mathbb{E}$ takva da je $a = \mathbf{AB}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq \mathbf{0}$, jer u suprotnom stavimo $B = A$ i dokaz je gotov. Neka je a dat svojim predstavnikom $\overrightarrow{CD}$, tj. $a = \mathbf{CD}$. Ako tačka A pripada pravoj određenoj sa CD onda na toj istoj pravoj postoji tačno jedna tačka B takva da su rastojanja $dis(A, B)$ i $dis(C, D)$ jednaka i da se duži AD i BC polove. U slučaju da tačka A ne pripada pravoj CD (Slika 2) prvo zaključujemo da postoji (prema 5.-om Euklidovom postulatu) tačno jedna prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa pravom CD, a zatim da je na toj pravoj jedinstveno određena tačka B koja je teme paralelograma $ABDC$. Tako da je $(C, D) \sim (A, B)$, što zapravo znači da je $a = \mathbf{CD} = \mathbf{AB}$. □



Slika 2.

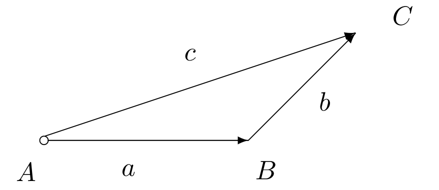
Primetimo da upravo dokazana teorema tvrdi da svaki vektor $a \in \mathcal{V}$ u proizvoljnoj tački $A \in \mathbb{E}$ ima tačno jednog predstavnika kojem je tačka A početak.

Teorema 1 pokazuje da sledeća definicija sabiranja vektora ima smisla.

[3] Za dva nenula vektora istog pravca određena svojim predstavnicima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ kažemo da su istog ili suprotnog smera ako su tačke B i C sa iste odnosno sa suprotne strane tačke A.

[4] Zbog čega bismo ovu teoremu mogli da nazovemo teorema potpune (totalne) demokratije u skupu $\mathbb{E}$. Istorijsko iskustvo pokazuje da se tako nešto gotovo nikad ne dešava u skupovima ljudi, jer tamo uvek postoje oni koji su malo 'ravnopravniji' ili 'jednakiji' od drugih.

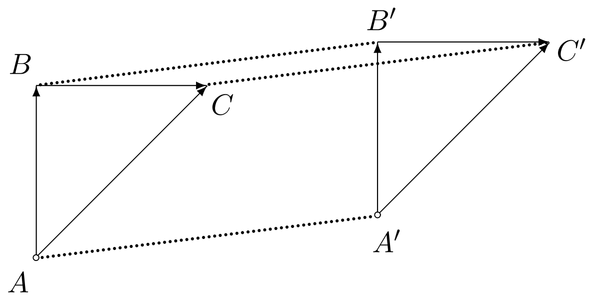
Neka je A proizvoljna tačka iz $\mathbb{E}$ i $a, b \in \mathcal{V}$, i neka su vektori a i b dati svojim predstavnicima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ onda je zbir vektora (Slika 3) a i b, vektor c čiji predstavnik je usmerena duž $\overrightarrow{AC}$.



Slika 3. Sabiranje vektora

Propozicija 2. *Zbir dva vektora ne zavisi od izbora njihovih predstavnika.*

Dokaz. Neka su a i $b \in \mathcal{V}$ dati redom svojim predstavnicima $a = \mathbf{AB} = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$ i $b = \mathbf{BC} = \mathbf{B}'\mathbf{C}'$. Tada su četvorouglovi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami (Slika 4) (ili degenerisani paralelogrami), te su duži AA' i CC' podudarne i paralelne. Stoga je $ACC'A'$ paralelogram, odnosno parovi (A, C) i (A', C') određuju isti vektor,



Slika 4. Nezavisnost sabiranja vektora od predstavnika

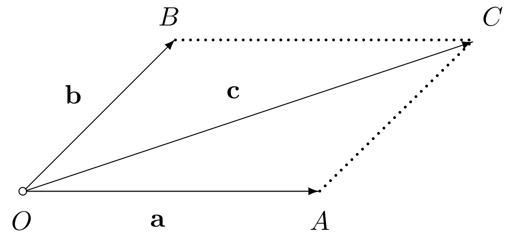
što je i trebalo proveriti. □

Primedba 1. Ideje iz dokaza prethodne Propozicije mogu se iskoristiti u dokazivanju tranzitivnosti relacije $\sim$.

Ako je $c = \mathbf{AC}$ zbir vektora $a = \mathbf{AB}$ i $b = \mathbf{BC}$, pisaćemo

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}.$$

Primedba 2. Gornja definicija sabiranja vektora zove se sabiranje vektora po zakonu trougla. Sabiranje vektora ponekad se definiše na sledeći način (Slika 5): neka je $O \in \mathbb{E}$ proizvoljna tačka i neka su a i b proizvoljni vektori iz $\mathbb{E}$ čiji su predstavnici usmerene duži $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Zbirom vektora a i b zovemo vektor c koji je određen svojim predstavnikom $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena tačka u $\mathbb{E}$, takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Ovaj način sabiranja vektora zove se sabiranje vektora po zakonu paralelograma.



Slika 5. Zakon paralelograma

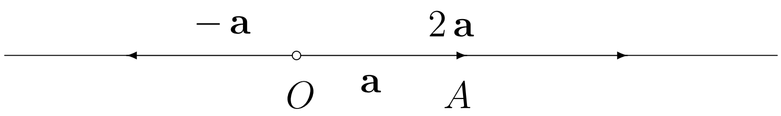
Lako se vidi da su sabiranja vektora po zakonu trougla i paralelograma ekvivalentna.

Množenje vektora skalarom. Množenje vektora skalarom (realnim brojem) je preslikavanje: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, kojim bilo kojem skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$ i bilo kojem vektoru $a \in \mathcal{V}$ dodeljujemo jedinstveni vektor $b = \alpha \cdot a$[5] $\in \mathcal{V}$ dat sa

(i) $\|b\| = \|\alpha\, a\| = |\alpha|\, \|a\|$,

(p) ako je $a \neq \mathbf{0}$ i $\alpha \neq 0$ tada vektori a i b imaju isti pravac, što ćemo zapisivati $p(b) = p(\alpha\, a) = p(a)$.

(s) Vektor $b\,(\neq \mathbf{0})$ je istosmeran ili suprotnosmeran vektoru $a\,(\neq \mathbf{0})$ u zavisnosti od toga da li je $\alpha > 0$ ili $\alpha < 0$, što zapisujemo $s(b) = s(\alpha\, a) = \operatorname{sgn}(\alpha)\, s(a)$.



Slika 6. Množenje vektora skalarom

2. Vektorski prostor

2.5. Vektorski prostor. Primetimo da je $-\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, što nam omogućuje da proizvod broja -1 i vektora a (Slika 6) obeležavamo sa $-a$ i pišemo $(-1)\,a = -a$. Zbir vektora a i $-b$ obeležavamo sa $a - b$ i nazivamo ga **razlikom vektora** a i b. Osnovna svojstva sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarom sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Neka su a, b i c proizvoljni vektori i neka su α, β realni brojevi, tada je:*

(S1) $a + (b + c) = (a + b) + c\,,$

(S2) $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a\,,$

(S3) $a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0}\,,$

(S4) $a + b = b + a\,,$

(M1) $\alpha\,(a + b) = \alpha\, a + \alpha\, b\,,$

(M2) $\alpha\,(\beta\, a) = (\alpha\,\beta)\, a\,,$

(M3) $(\alpha + \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a\,,$

(M4) $1 \cdot a = a.$

Dokaz. U dokazima osobina (S1)-(S4) i (M1) koristimo Teoremu 1 i Propoziciju 2, u dokazima osobina (M2) i (M3) proveri se da leva i desna strana jednakosti imaju isti intenzitet, pravac i smer, dok je dokaz osobine (M4) očigledan iz definicije. Dokažimo npr.

(S1)-(S4) Neka su A, B, C i D četiri tačke takve da je $a = \mathbf{AB}$, $b = \mathbf{BC}$ i $c = \mathbf{CD}$. Tada je

$$a + (b + c) = \mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD} = (a + b) + c.$$

(S2) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$a + \mathbf{0} = \mathbf{AB} + \mathbf{BB} = \mathbf{AB} = a, \quad \text{i} \quad \mathbf{0} + a = \mathbf{AA} + \mathbf{AB} = \mathbf{AB} = a.$$

(S3) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{0} = \mathbf{BB} = \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a}.$$

(S4) Neka su O, A i B tri tačke takve da je $\mathbf{OA} = a$ i $\mathbf{OB} = b$, i neka je C tačka takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Tada je

$$a + b = \mathbf{OA} + \mathbf{AC} = \mathbf{OC} = \mathbf{OB} + \mathbf{BC} = b + a.$$

Slično se provere i ostale osobine. □

[5] Tačku iz gornje oznake za množenje vektora skalarom ćemo izostavljati i pisati samo $b = \alpha\, a$

Svojstva (S1) – (S4) [6,7] i (M1) – (M4) koja važe na skupu svih vektora $\mathcal{V}$ bila su 'inspiracija' za sledeću definiciju pojma vektorskog prostora.

Dakle, za uređenu četvorku $V \equiv (V, +, \cdot, \mathbb{F})$ kažemo da ima strukturu **vektorskog prostora** nad poljem $\mathbb{F}$[8] ako je $(V, +)$[9] Abelova grupa i ako je definisano množenje vektora sa skalarima $\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$, tako da važe osobine (M1)–(M4).

Sledeća svojstva važe u svakom vektorskom prostoru

Teorema 2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, x neki vektor i α neki skalar. Tada važi:*

(i1) $\alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.

(i2) $0 \cdot x = 0$.

(i3) $\alpha \cdot 0 = 0$.

Ako je $\alpha \cdot x = 0$ tada je ili $\alpha = 0$ ili $x = 0$.

Dokaz. (i1) Primena aksiome (M2) kao i komutativnosti množenja skalara daje:

$$\alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = (\alpha(-1)) \cdot x = ((-1)\alpha) \cdot x = \begin{cases} (-1)(\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x). \\ ((-1\alpha)) \cdot x = (-\alpha) \cdot x. \end{cases}$$

Sada iz (i1) lako slede (i2) i (i3):

$$0 \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot x + (-(\alpha \cdot x)) = 0, \quad \text{i}$$

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + ((-\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot x + (-(\alpha \cdot x)) = 0.$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$, tada u polju $\mathbb{F}$ postoji inverz α^{-1} tako da redom imamo

$$x = 1 \cdot x = ((\alpha^{-1})\alpha) \cdot x = (\alpha^{-1})(\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1}) \cdot 0 \overset{(i3)}{=} 0.$$

Dakle, ako $\alpha \neq 0$ tada mora biti $x = 0$. □

2.6. Linearna kombinacija vektora i skup generatora. Neka je dat neki podskup B vektorskog prostora V, koji ne sadrži nula vektor. Kažemo da je $x \in V$ linearna kombinacija vektora iz B, ako postoje $m \in \mathbb{N}$, vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m \in B$ i skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$x = \alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_m\, a_m. \tag{14}$$

Od posebnog je interesa slučaj kada je svaki vektor $x \in V$ linearna kombinacija vektora iz skupa B. Tada kažemo da je B skup generatora [10] vektorskog prostora V.

2.7. Linearna nezavisnost. Neka je dat neki konačan podskup $B = \{a_1, \ldots, a_m\}$ vektorskog prostora V. Kažemo da je B linearno nezavisan ako jednačina linearne (ne)zavisnosti [11]:

$$\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_m\, a_m = 0, \tag{15}$$

[6] Skup sa operacijom koja zadovoljava svojstva (S1) – (S3) naziva se **grupa**, a ako još zadovoljava i (S4) onda se naziva komutativna ili Abelova grupa.

[7] Abel, Niels Henrik, 1802 – 1829, norveški matematičar.

[8] Definicija polja data je u tački **1.32**.

[9] Elemente skupa V nazivamo vektorima.

[10] Ili generišući skup.

[11] Nepoznate su $\alpha_i, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

ima samo trivijalno[12] rešenje: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Skup B je linearno zavisan ako nije linearno nezavisan, tj. ako jednačina (15) ima samo netrivijalno rešenje[13]. Ako je skup B beskonačan kažemo da je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

Primetimo da ako skup $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ sadrži nula vektor onda je on linearno zavisan jer ako je npr. $a_1 = 0$, imamo netrivijalnu linearnu kombinaciju nula vektora,

$$0 = 5 \cdot 0 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \cdots + 0 \cdot a_m .$$

Zbog toga uvek podrazumevamo da skup kojem ispitujemo linearnu nezavisnost ne sadrži nula vektor.

Ispitajmo geometrijski smisao linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti nekog skupa vektora prave, ravni ili prostora. Jasno, skup koji se sastoji iz samo jednog nenula vektora je linearno nezavisan.

Teorema 1. *Nenula vektori a i b su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni. Neka je $\mathbb{E}^1$ prava i neka je e_1 neki nenula vektor u $\mathcal{V}^1$, tada za proizvoljni vektor $x \in \mathcal{V}^1$ jedinstveno je određen skalar x_1 takav da je $x = x_1 e_1$.*

Dokaz. Sledi iz definicije kolinearnosti i množenja vektora sa skalarom □

U ravni situacija je nešto složenija što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka je $\mathbb{E}^2$ ravan onda u vektorskom prostoru $\mathcal{V}^2$ postoje dva linearno nezavisna vektora. Svaka tri vektora iz $\mathcal{V}^2$ su linearno zavisna. Neka su $e_1, e_2 \in \mathcal{V}^2$ dva linearno nezavisna vektora. Za svaki vektor $x \in \mathcal{V}^2$ jedinstveno su određeni skalari x_1 i x_2 takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.*

Dokaz. Kako u ravni postoje tri nekolinearne tačke O, A, B vektori $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$ su nekolinearni, pa samim tim i linearno nezavisni. Time je dokazan prvi deo teoreme.

Dokažimo i drugi. U tom cilju pretpostavimo, najpre, da su dva od vektora iz skupa $\{a, b, c\}$ neke ravni, kolinearna. Ako su to npr. vektori a i b tada su oni i linearno zavisni pa postoje brojevi α i β od kojih je bar jedan nije nula, takvi da je

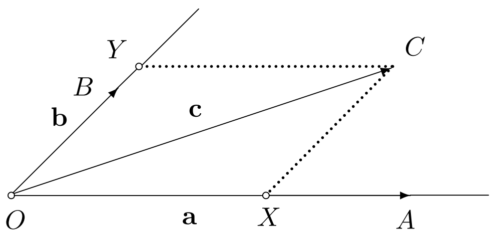
$$\alpha\, a + \beta\, b = \mathbf{0}, \qquad \text{tada je} \qquad \alpha\, a + \beta\, b + 0\, c = \mathbf{0},$$

pa su i vektori a, b, c linearno zavisni.

Pretpostavimo da nijedan par vektora iz skupa $\{a, b, c\}$ nije kolinearan. Obeležimo sa O proizvoljnu tačku ravni, sa A, B, C tačke te ravni takve da je $\mathbf{OA} = a$, $\mathbf{OB} = b$ i $\mathbf{OC} = c$ (što možemo zbog Teoreme 1 iz **2.4**) i sa X i Y tačke pravih OA i OB takve da je četvorougao $OXCY$ paralelogram (Slika 7). Budući da su vektori $\mathbf{OX}$ i $\mathbf{OY}$ kolinearni, redom, sa vektorima $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$, na osnovu Teoreme 1 postoje brojevi α i β takvi da je $\mathbf{OX} = \alpha\, a$ i $\mathbf{OY} = \beta\, b$. Otuda je

$$c = \mathbf{OC} = \mathbf{OX} + \mathbf{OY} = \alpha\, a + \beta\, b,$$

pa su vektori a, b, c linearno zavisni. Poslednji deo teoreme sledi iz upravo dokazanog, tj. ako izaberemo da je $a = e_1$, $b = e_2$ i $c = x$. Tada je i $\alpha = x_1$ i $\beta = x_2$. Jedinstvenost je očigledna. □



Slika 7. Razlaganje vektora u ravni

[12] koje uvek postoji zbog Teorema 2 (i2), **2.5**

[13] Barem jedan od skalara α_i, $i = 1, \ldots, m$ je različit od nule.

I na kraju razmotrimo dalje, linearnu zavisnost i linearnu nezavisnost vektora u prostoru.

Teorema 3. *Neka je $\mathbb{E}$ prostor onda u $\mathcal{V}^3 = \mathcal{V}$ postoje tri međusobno linearno nezavisna vektora. Svaka četiri vektora iz $\mathcal{V}$ su linearno zavisna. Neka su $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{V}$, tri linearno nezavisna vektora. Tada za svaki vektor $x \in \mathcal{V}$ jedinstveno su određeni skalari x_1, x_2 i x_3 takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.*

Dokaz. Prvo se pokaže pomoćni stav: *Vektori a, b i c su linearno zavisni akko su koplanarni,* a zatim se imitira dokaz Teoreme 2. □

3. Baza i dimenzija

2.8. Baza i dimenzija vektorskog prostora. Podskup B vektorskog prostora V koji je istovremeno skup generatora i koji je linearno nezavisan zove se baza vektorskog prostora.

U prethodnoj tački Teoreme 1, 2 i 3 zapravo tvrde da vektorski prostori $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2$ i $\mathcal{V}^3$ imaju bazu, koje se sastoje redom od jednog, dva ili tri vektora. Iz konstrukcija baza vektorskih prostora $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2$ i $\mathcal{V}^3$ vidi se da je broj vektora u njihovim bazama uvek isti što je naznačeno u njihovim oznakama. Ovo nije slučajno jer važi fundamentalna teorema o bazi vektorskog prostora.

Teorema 1. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada važi,*

(i1) *postoji neka baza B vektorskog prostora V.*

(i2) *ako su B_1 i B_2 dve proizvoljne baze vektorskog prostora V onda postoji bijekcija $f : B_1 \longrightarrow B_2$.*

Primetimo da tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak' [14] broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, dimenzija vektorskog prostora V je kardinalni broj neke njegove baze. Kažemo da je V konačnodimenzioni vektorski prostor ako ima neku bazu koja ima konačno mnogo elemenata. U ovom tekstu pretpostavljamo da su svi vektorski prostori konačnodimenzioni.

2.9. Vektorski prostor $\mathbb{F}^n$. Ako sa $\mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \big| \, x_i \in \mathbb{F}\}$, označimo skup svih uređenih n-torki sa elementima iz polja $\mathbb{F}$. Tada važi:

Teorema 1. $(\mathbb{F}^n, +, \cdot, \mathbb{F})$ *je vektorski prostor uz operacije sabiranja i množenja sa skalarom date sa:*

(s) $x + y = (x_1, x_2, .., x_n) + (y_1, y_2, .., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, .., x_n + y_n),$

(m) $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n).$

Specijalno vektorski prostori su $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \ \mathbb{C}^n$.

Dokaz. Lako se provere aksiome (S1)–(S4) i (M1)–(M4). □

[14] tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

Kanonska baza. Vektorski prostor $\mathbb{F}^n$ ima jednu istaknutu bazu[15], koju nazivamo kanonska baza, i koju čine vektori $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,0), \dots e_n = (0,0,0,\dots,1)$. Lako se proverava da je skup $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$ skup generatora, neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ tada imamo

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(1,0,\dots,0) = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \dots + x_n\, e_n.$$

i da je linearno nezavisan

$$\begin{aligned} 0 &= (0,0,\dots,0) = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \dots + \alpha_n\, e_n = \alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \qquad \text{odakle sledi: } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

2.10. Matrice. Neka je

$$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) = A \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

skup svih realnih matrica tipa $m \times n$, tj. matrica sa m vrsta i n kolona. Skup $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ postaje realni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz iste operacije kao i $\mathbb{R}^n$. Preciznije, $\forall\, A, B \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ i $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

(s) $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$,

(m) $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda\, a_{ij})$.

Analogna tvrđenja važe i za matrice nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}$, tako su npr. $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{Q})$ i $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ su vektorski prostori nad $\mathbb{Q}$, i $\mathbb{C}$ redom. Dakle, kao vektorski prostor $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ je izomorfan sa $\mathbb{R}^{m\,n}$, jer u svakoj matrici ima $m\,n$ mesta. Kanonsku bazu u $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ čine matrice $\{E_{ij}, i = 1, \dots, m;\ j = 1 \dots, n\}$, pri čemu je E_{ij} matrica koja na preseku $i. - te$ vrste i $j.-$te kolone ima 1, a svi ostali elementi te matrice su 0.

Množenje matrica. Neka su matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{np}(\mathbb{R})$ i $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{pm}(\mathbb{R})$ onda je formulom

$$(16) \qquad A \cdot B = C = (c_{ij}) \quad \text{gde je} \quad (C)_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{ik}\, (B)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}.$$

definisan proizvod matrica A i B i matrica C je element skupa $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Primer. Pomnožite matrice

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} =$ proizvod nije definisan jer prva matrica ima 2 kolone, a druga 1 vrstu.

(2) $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 0\cdot 5 \\ 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

(3) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

[15] čiji vektori $n - torke$ imaju najjednostavnij koordinate.

Da bismo prilikom množenja matrica izbegli ispitivanje da li je množenje dobro definisano, u daljnjem se ograničavamo na izučavanje skupa kvadratnih matrica, tj. matrica $\mathbb{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Množenje matrica ima sledeća svojstva.

Teorema 1. *Neka su A, B, C proizvoljne matrice iz $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ i neka je λ realan broj. Tada važi*

(as) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(ne) *Postoji matrica $I = \mathrm{diag}[1, 1, \ldots, 1]$, koja na glavnoj dijagonali ima 1, a svi ostali elementi su 0*[16] *takva da je $A \cdot I = I \cdot A = A$ za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

(di) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{i} \quad (A + B) \cdot C = A \cdot B + B \cdot C.$

Dokaz. Pokazaćemo svojstva asocijativnosti matričnog množenja (as) i distributivnost (di), tako što ćemo pokazati da se proizvoljni matrični elementi leve i desne strane jednakosti podudaraju. Za (ne) lako se proveri da jedinična matrica I ima potrebna svojstva.

$$\begin{aligned}
((A \cdot B) \cdot C)_{ij} &= \sum_l (A \cdot B)_{il}\,(C)_{lj} = \sum_l (\sum_k a_{ik}\,b_{kl})\,c_{lj} = \sum_{l,k} a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_l b_{kl}\,c_{lj} \right) \\
&= \left(\sum_k a_{ik} \left(\sum_l b_{kl}\,c_{lj} \right) \right) = \sum_k a_{ik}\,(B \cdot C)_{kj} = (A \cdot (B \cdot C))_{ij}\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((A + B) \cdot C)_{ij} &= \sum_l (A + B)_{il}\,(C)_{lj} = \sum_l (a_{il} + b_{il})\,c_{lj} = \sum_l (a_{il}\,c_{lj} + b_{il}\,c_{lj}) = \sum_l a_{il} c_{lj} + \sum_l b_{il}\,c_{lj} \\
&= (A \cdot C)_{ij} + (A \cdot C)_{ij} = (A \cdot B + A \cdot C)_{ij}.
\end{aligned}$$

Druga distributivnost, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, dokazuje se analogno prvoj. Primetimo da svojstva (as) i (di) važe i u opštijem slučaju kada množenje matrica ima smisla. Svojstvo (ne) nema smisla ako matrice nisu kvadratne. □

Primedba. (i) Postoje kvadratne ne-nula matrice koje s obzirom na operaciju množenja matrica nemaju inverznu matricu, npr. matrica

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nema inverz jer kada} \\ \text{bi ga imala, imali bismo} \end{array} \right\} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a to je nemoguće jer matrični element jedinične matrice I_2 na mestu $(2, 2)$ je broj 1, a matrični element proizvoda matrice B_2 i bilo koje druge matrice na tom mestu ima uvek 0.

Množenje matrica nije komutativno jer je npr. za $c \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, skup kvadratnih matrica, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, nije grupa s obzirom na množenje matrica, ali ako iz skupa $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ izbacimo sve elemente (poput matrice B) koji nemaju inverz, dobijamo podskup koji je grupa[17] s obzirom na množenje matrica kao grupovnu operaciju. Ova grupa zove se opšta linearna grupa i obeležava se sa $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i predstavlja jednu od najvažnijih grupa u matematici.

---

[16] U slučaju $n = 3$ vidi primer (3).

[17] koja nije komutativna osim u slučaju kada je $n = 1$.

Matrica B_2 ima još jednu osobinu koju nemaju brojevi, naime $B_2 \neq 0$, ali $B_2^2 = 0$. Kažemo da je matrica A nilpotentna ako je $A \neq 0$, ali postoji prirodan broj k takav da je $A^k = 0$. Dakle, matrica B_2 je nilpotentna.

4. Koordinate

2.11. Koordinate vektora. Koristeći sada fundamentalnu Teoremu o bazi vektorskog prostora dolazimo do definicije veoma važnog pojma koordinata vektora. Neka je $B = (e_1, \ldots, e_m)$, baza *realnog* vektorskog prostora V^m i ako je $x \in V^m$ proizvoljan vektor tada postoje jedinstveni skalari, $x_1, \ldots, x_m$ takvi da je

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m. \tag{17}$$

Realni brojevi $x_1, \ldots, x_m$ zovu se koordinate vektora x u bazi B.

Kako je u bazi bitan poredak vektora, tj. koordinate vektora x zavise o redosledu elemenata u bazi, koordinate zapisujemo kao uređene $m-$torke tj. koordinate vektora x zapisujemo kao $(x_1, \ldots, x_m)$. Iz istog razloga i baze zapisujemo kao uređene $m-$torke. Primetimo da kada izaberemo bazu B dobro je definisano preslikavanje $\kappa_B : V^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, formulom $\kappa_B(x) = (x_1, \ldots, x_m)$. Preslikavanje κ_B zove se koordinatizacija ili koordinatno preslikavanje i ono zavisi od unapred odabrane baze. Sledeća teorema daje osnovne osobine svake koordinatizacije.

Teorema 1. *Neka je $B = (e_1, \ldots, e_m)$, baza realnog vektorskog prostora V^m. Tada:*

(i1) κ_B je bijekcija.

(i2) $\kappa_B(x + y) = \kappa_B(x) + \kappa_B(y), \quad x, y \in V.$

(i3) $\kappa_B(\alpha\, x) = \alpha\, \kappa_B(x), \quad x \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka su $x = \sum_{i=1}^m x_i\, e_i$ i $y = \sum_{i=1}^m y_i\, e_i$.

(i1) ako je $\kappa_B(x) = \kappa_B(y)$, tada je

$$\kappa_B(x) = (x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m) = \kappa_B(y) \quad x_i = y_i, \ \ i = 1, \ldots, m, \qquad \text{tj. preslikavanje } \kappa_B \text{ je '1-1'}.$$

Da bismo pokazali da je preslikavanje κ_B 'na' i tako završili dokaz ove tvrdnje, za vektor $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ uočimo vektor $x = z_1\, e_1 + z_2\, e_2 + \cdots + z_m\, e_m \in V^m$ za kojeg očigledno važi da $\kappa_B(x) = z$.

(i2) je posledica niza jednakosti

$$\begin{aligned}\kappa_B(x+y) &= \kappa_B\left(\sum_{i=1}^m x_i\, e_i + \sum_{i=1}^m y_i\, e_i\right) = \kappa_B\left(\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)\, e_i\right) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = \kappa_B(x) + \kappa_B(y).\end{aligned}$$

(i3) sledi iz

$$\kappa_B(\alpha\, x) = \kappa_B\left(\sum_{i=1}^m \alpha\, x_i\, e_i\right) = \kappa_B\left(\sum_{i=1}^m (\alpha\, x_i)\, e_i\right) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_m) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \alpha\, \kappa_B(x).$$

Time je dokaz završen. □

Svojstva (i2) i (i3) iz prethodne teoreme su veoma važna jer ona pokazuju da je preslikavanje κ_B kompatibilno sa strukturama vektorskih prostora na V^m i $\mathbb{R}^m$.

Neka su V i U vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, tada preslikavanje, $A : V \longrightarrow U$, za koje važi:

(a) $A(x+y) = A(x) + A(y), \quad x, y \in V,$

(h) $A(\alpha\, x) = \alpha\, A(x), \quad x \in V,\ \alpha \in \mathbb{F},$

nazivamo linearni operator ili linearno preslikavanje. Ako je linearno preslikavanje još i bijekcija onda kažemo da je izomorfizam vektorskih prostora V i U. Sada je na prirodan način definisana relacija 'biti izomorfan' na skupu svih konačnodimenzionih prostora nad $\mathbb{F}$: *dva vektorska prostora V i U nad istim poljem su izomorfna ako postoji barem jedan izomorfizam A sa V u U.* Oznaka koju koristimo za upravo pomenutu relaciju je $\cong$. Da su dva vektorska prostora izomorfna zapravo znači da su im elementi i operacije obeleženi drugim slovima. Važi i sledeća:

Teorema 2. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu svih konačnodimenzionih prostora nad poljem $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Potrebno je pokazati da je relacija $\cong$ refleksivna, simetrična i tranzitivna. Za refleksivnost je dovoljno primetiti da je identičko preslikavanje, $I(x) = x$, bijekcija i da je linearno.

Simetričnost. Neka je $V \cong U$ tada postoji izomorfizam $A : V \longrightarrow U$. Tvrdimo da je inverzno preslikavanje $A^{-1} : U \longrightarrow V$ takođe izomorfizam, pa je $U \cong V$, tj. relacija $\cong$ je simetrična. Jasno, preslikavanje A^{-1} je bijekcija, pokažimo da je i linearno. Neka je $A(v) = x, A(u) = y$, tako da je $A^{-1}(x) = v, A^{-1}(y) = u$, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tada imamo:

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha\, x + \beta\, y) &= A^{-1}(\alpha\, A(v) + \beta\, A(u)) = A^{-1}(A(\alpha\, v + \beta\, u)) = (A^{-1} \circ A)(\alpha\, v + \beta\, u)) = \alpha\, v + \beta\, u \\ &= \alpha\, A^{-1}(x) + \beta\, A^{-1}(y). \end{aligned}$$

Tranzitivnost. Neka je $V \cong U$ i $U \cong V$ tada postoje izomorfizmi $A : V \longrightarrow U$ i $B : U \longrightarrow W$. Tranzitivnost relacije pokažaćemo ako pokažemo da je $C = B \circ A : V \longrightarrow W$ izomorfizam vektorskih prostora V i W. Da bismo to uradili prvo primetimo da je C bijekcija jer je kompozicija dve bijekcije (A i B), pa je potrebno još proveriti da je kompozicija linearnih preslikavanja (A i B) linearna, što sledi iz:

$$\begin{aligned} C(x+y) &= (B \circ A)(x+y) = B(A(x+y)) = B(A(x) + A(y)) = B(A(x)) + B(A(x)) \\ &= (B \circ A)(x) + (B \circ A)(y) = C(x) + C(y) \\ C(\alpha\, x) &= (B \circ A)(\alpha\, x) = B(A(\alpha\, x)) = B(\alpha\, A(x)) = \alpha\, B(A(x)) = \alpha\, (B \circ A)(x) = \alpha\, C(x). \end{aligned}$$

Time je dokaz teoreme gotov. □

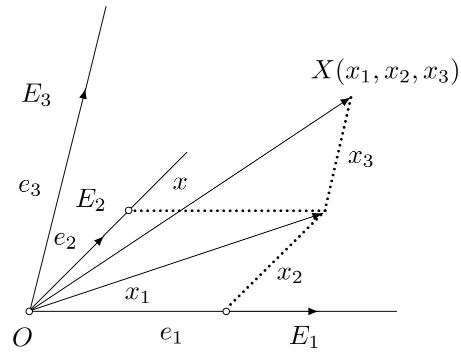
Kao što znamo svaka relacija ekvivalencije razbija skup na kojem je definisna na međusobno disjunktne skupove - klase ekvivalencije. Postavlja se pitanje svojstava koje karakterišu klasa ekvivalencije, kao i pronalaženje reprezenta klase koji je najpogodniji za računanje. Za razliku od vektora, koji je takođe klasa ekvivalencije relacije $\sim$, i koji je karakterisan sa tri osobine intenzitet, pravac i smer (vidi **2.2**), izomorfni vektorski prostori karakterisani su sa samo dimenzijom, jer važi:

Teorema 3. *Vektorski prostori V i U nad istim poljem su izomorfni akko imaju istu dimenziju.*

Dokaz. Ako je $\dim V = \dim U = n$ tada su odgovarajuće koordinatizacije izomorfizmi V i $\mathbb{F}^n$, odnosno U i $\mathbb{F}^n$ na osnovu Teoreme 1, a kako je relacija $\cong$ relacija ekvivalencije (Teorema 2) onda zbog simetričnosti i tranzitivnosti sledi da je $V \cong U$. Drugi smer može se naći u nekoj standardnoj knjizi iz linearne algebre. □

Iz Teoreme 1 i Teoreme 3 vidimo da su vektorski prostori $\mathbb{F}^n$ predstavnici klasa ekvivalenije relacije $\cong$, i oni su najpogodniji za razna izračunavanja, te je tako teorija konačnodimenzionih prostora nad poljem $\mathbb{F}$ svedena na proučavanje vektorskih prostora $\mathbb{F}^n$.

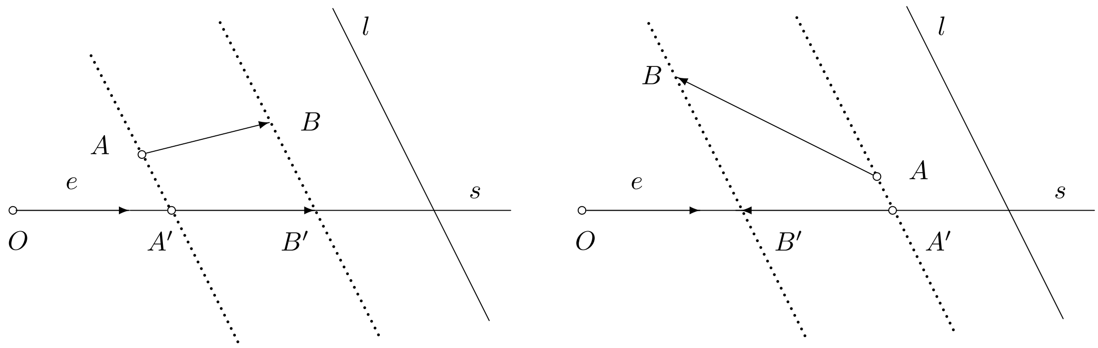
2.12. Koordinate tačaka. Koristeći sada pojam koordinata vektora uvodimo pojam koordinata tačaka u prostoru $\mathbb{E}$. Prvo izaberimo neku tačku $O \in \mathbb{E}$ i $e = (e_1, e_2, e_3)$ bazu vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Tada proizvoljnoj tački $X \in \mathbb{E}$ (Slika 8) pridružimo jedinstven vektor $x = \mathbf{OX}$ koji nazivamo vektorom položaja ili radijus vektorom tačke X. Dakle, za datu tačku O postoji bijekcija između vektora prostora $\mathcal{V}$ i tačaka prostora $\mathbb{E}$. Zbog toga koordinate vektora x u bazi e vektorskog prostora $\mathcal{V}$, nazivamo koordinatama tačke X u odnosu na tačku O i bazu e. Skup koji se sastoji iz tačke O i baze $e = (e_1, e_2, e_3)$ zovemo koordinatni sistem u $\mathbb{E}$, i obeležavamo ga sa (O, e). Napomenimo da se analogno uvode koordinatni sistemi na pravoj $\mathbb{E}^1$ i ravni $\mathbb{E}^2$ samo što se u tim slučajevima baza vektorskih prostora $\mathcal{V}^1$ i $\mathcal{V}^2$ sastoje od jednog $(e = (e_1))$ odnosno dva $(e = (e_1, e_2))$ vektora. Ako sa x_1, x_2 i x_3 obeležimo ose određene vektorima e_1, e_2 i e_3 i tačkom O, koordinatni sistem na pravoj($\mathbb{E}^1$) obeležavamo i sa $O\mathsf{x}_1$; u ravni($\mathbb{E}^2$) sa $O\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2$ i u prostoru($\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}$) sa $O\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3$. Tačku O nazivamo koordinatnim početkom, a ose x_1, x_2, x_3 koordinatnim osama. Ako su x_1, ili x_1 i x_2, ili x_1 i x_2 i x_3 koordinate tačke X u koordinatnom sistemu neke prave, ravni ili prostora, tu tačku ćemo obeležavati i sa $X(x_1)$, ili $X(x_1, x_2)$, ili $X(x_1, x_2, x_3)$, ili jednostavno sa (x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), bez bojazni da može doći do zabune budući da na isti način obeležavamo i vektore.



Slika 8. Koordinate tačke

5. Paralelno projektovanje

2.13. Paralelno projektovanje. Poznato je da na pravoj postoje dva usmerenja (levo i desno). Pod osom podrazumevamo pravu na kojoj je uvedena orijentacija izborom predstavnike nekog (nenula) vektora, koji je sadržan na datoj pravoj. Neka



Slika 9. Paralelna projekcija

su u ravni dati vektori $\mathbf{AB}$, osa s određena jediničnim vektorom e[18] i prava l koja nije paralelna osi. Paralelnom projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l

[18] Takav vektor ose možemo uvek izbrati, jer ako e nije jediničan vektor tada posmatramo vektor $e' = e/\|e\|$, koji ima intenzitet jednak 1.

nazivamo vektor $\mathbf{A'B'}$ čija temena su tačke A' i B' u kojima prave kroz tačke A i B paralelne pravoj l seku osu s. Kako je vektor $\mathbf{A'B'}$ kolinearan sa vektorom ose e, postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbf{A'B'} = \alpha\, e$. Broj α nazivamo paralelnom skalar – projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l i obeležavaćemo ga ponekad sa $\alpha = \mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}$. Tako da imamo (Slika 9),

$$\mathbf{A'B'} = (\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB})\, e. \tag{18}$$

Od posebnog je interesa slučaj kada je prava l normalna na osu s i tada govorimo o ortogonalnoj projekciji (druge projekcije nazivamo kosim). Tada iz oznake za paralelnu – skalar projekciju izbacujemo oznaku za pravu l, tj. pišemo $\mathbf{pr}_s\mathbf{AB}$. Primetimo da ja paralelna projekcija na osu u uskoj vezi sa paralelnom projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na vektor e ose s. Na potpuno analogan način uvodimo pojmove projekcije vektora $\mathbf{AB}$ i skalar – projekcije vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ. Oznake koje koristimo za paralelnu skalar – projekciju su $\mathbf{pr}_s^\lambda\mathbf{AB}$. Ako je λ ravan normalna na s, projekcije nazivamo ortogonalnim ili normalnim i za paralelnu skalar – projekciju koristimo oznaku $\mathbf{pr}_s\mathbf{AB}$.

Ispitajmo sada neke osnovne osobine paralelnog projektovanja. No, pre nego što to učinimo napomenimo da uglom koji zahvataju vektori $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$ nazivamo ugao AOB, a uglom koji neki vektor zahvata sa osom nazivamo ugao koji zahvataju taj vektor i jedinični vektor te ose.

Slika 10. **Slika 11.**

Teorema 1. *Ako vektor* $\mathbf{AB}$ *ravni ili prostora sa osom* s *zahvata ugao* w*, tada je*

$$\mathbf{pr}_s\mathbf{AB} = \|\mathbf{AB}\| \cos w. \tag{19}$$

Dokaz. Ako je $AB \parallel s$ ili $AB \perp s$ tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom. Zato pretpostavimo da je ugao w oštar ili tup. Neka je A proizvoljna tačka ose s i sa B' obeležimo podnožje normale iz tačke B na osu s. Ugao kod temena A trougla ABB' jednak je uglu w ako je oštar, ili ga, u suprotnom, dopunjava do opruženog ugla. U prvom slučaju vektor $\mathbf{AB'}$ je istosmeran osi s (Slika 10) pa je

$$\mathbf{pr}_s\mathbf{AB} = \|\mathbf{AB'}\| = \|\mathbf{AB}\| \cos w.$$

U drugom slučaju $\mathbf{AB'}$ je suprotnosmeran osi s (Slika 11), pa je po definiciji,

$$\mathbf{pr}_s\mathbf{AB} = -\|\mathbf{AB'}\| = -\|\mathbf{AB}\| \cos(\pi - w) = \|\mathbf{AB}\| \cos w. \tag{20}$$

□

U vektorskim prostorima veoma su važna preslikavanja koja se dobro ponašaju prema sabiranju vektora i množenju vektora sa skalarom. Sledeće teoreme pokazuju da paralelna projektovanja vektora imaju tu osobinu.

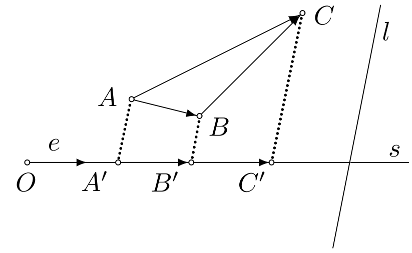
Teorema 2. *Za svaka dva vektora* **AB** *i* **BC** *ravni, svaku osu s te ravni i svaku pravu l koja nije paralelna osi s, važi relacija*

$$\mathbf{pr}_s^l\,(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}) = \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{AB} + \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{BC}. \tag{21}$$

Dokaz. Ako sa A', B', C' obeležimo presečne tačke pravih kroz A, B, C paralelnih pravoj l, sa osom s (Slika 12) i neka je e jedinični vektor ose s, biće

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{pr}_s^l\,(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})\big)\,e &= (\mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{AC})\,e = \mathbf{A'C'}\\ &= \mathbf{A'B'}+\mathbf{B'C'}\\ &= (\mathbf{pr}_s^l\,A\mathbf{B} + \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{BC})\,e,\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. □



Slika 12. Projektovanje zbira vektora

Primetimo da u dokazu prethodne teoreme ne bi bilo nikakvih promena ako bismo pretpostavili da su **AB** i **BC** vektori u prostoru i da je u pitanju paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.

Dokaz sledeće teoreme neposredno sledi iz poznate Talesove [19] teoreme i ostavljamo ga čitaocu. Napomenimo da ista teorema važi i ako je **AB** vektor u prostoru, a zadata je paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.

Teorema 3. *Za svaki vektor* **AB** *ravni, svaku osu s, svaku pravu l koja joj nije paralelna i svaki realan broj α važi relacija*

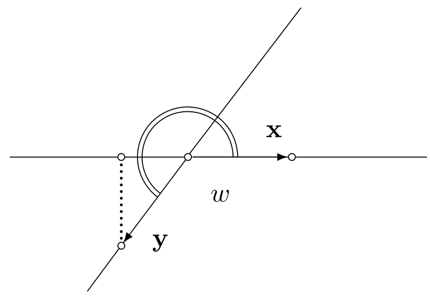
$$\mathbf{pr}_s^l(\alpha\,\mathbf{AB}) = \alpha\,\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}.$$

6. Skalarni proizvod

2.14. Skalarni proizvod. Kako je za svaki vektor dobro definisan intenzitet (dužina), i kako su za sve vektore osim nula vektora dobro definisani pravac i smer, pod uglom između nenula vektora x i y podrazumevamo manji od dva ugla koja grade pozitivni delovi osa određenih tim vektorima, vidi Sliku 13. Prema tome ugao između dva vektora pripada segmentu $[\,0,\pi\,]$.

Skalarni ili **unutrašnji** proizvod vektor je binarna operacija $\;\cdot : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\;$ definisana na sledeći način: za $x, y \in \mathcal{V}$

$$x\cdot y = \|x\|\,\|y\|\cos w, \tag{22}$$



Slika 13. Skalarni proizvod

gde je w ugao između vektora x i y (Slika 13).
Za skalarni proizvod se koriste i druge oznake: $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$. Vektorski prostor $\mathcal{V}$ snabdeven skalarnim proizvodom označavaćemo sa $\mathcal{V}_e$.

Iz definicije neposredno sledi da je

$x\cdot y = 0\quad$ akko je ispunjena najmanje jedna od relacija $\quad x=\mathbf{0},\quad y=\mathbf{0},\quad w=\pi/2.$

[19] $\tau\alpha\lambda\epsilon\sigma$, Tales iz Mileta, 624 – 546 (?), grčki matematičar.

Od posebnog interesa je poslednji slučaj i tada za dva (nenula) vektora kažemo da su **ortogonalni** ako je ugao koji oni grade $\pi/2$. Ako sada iskoristimo Teoremu 1 iz prethodne tačke imamo,

$$\|x\|\,\cos w = \mathbf{pr}_y\, x \quad \text{i} \quad \|y\|\,\cos w = \mathbf{pr}_x\, y, \quad \text{pa je} \quad x\cdot y = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\, y = \|y\|\,\mathbf{pr}_y\, x.$$

Sada ćemo iskoristiti ovaj zapis skalarnog proizvoda preko projekcija vektora u sledećoj Teoremi u kojoj su date najvažnije osobine skalarnog proizvoda.

Teorema 1. *Neka su $x, y, z \in \mathcal{V}$ proizvoljni vektori i α neki realan broj tada je*

(E1) $x\cdot y = y\cdot x$,

(E2) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,

(E3) $(\alpha\, x)\cdot y = \alpha\,(x\cdot y)$,

(E4) $x\cdot x \ge 0$,

(E5) $x\cdot x = 0$, ako i samo je $x = \mathbf{0}$.

Dokaz. Svojstva (E1), (E4) i (E5) slede neposredno iz definicije skalarnog proizvoda.
(E2) Ako je $x=\mathbf{0}$ tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom. Pretpostavimo, stoga, da je $x\neq\mathbf{0}$. Tada je

$$x\cdot(y+z) = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\,(y+z) = \|x\|\,(\mathbf{pr}_x\, y + \mathbf{pr}_x\, z) = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\, y + \|x\|\,\mathbf{pr}_x\, z = x\cdot y + x\cdot z.$$

(E3) Ako je $y=\mathbf{0}$ tvrđnja se dokazuje neposrednom proverom. Pretpostavimo stoga da je $y\neq\mathbf{0}$. Tada je

$$(\alpha\, x)\cdot y = \|y\|\,\mathbf{pr}_y\,(\alpha\, x) = \alpha\,\|y\|\,\mathbf{pr}_y\, x = \alpha\,(x\cdot y).$$ □

Svaki vektorski prostor $\mathcal{V}_e$ u koji je uvedena operacija $\cdot$ sa osobinama (E1) – (E5) naziva se **euklidski** [20] **vektorski prostor**.
Sada imamo sledeću karakterizaciju jednakosti dvaju vektora preko skalarnog proizvoda.

Propozicija 2. Neka su $x, y \in \mathcal{V}$. Tada je $x = y$ akko za svaki vektor $z\in\mathcal{V}$ važi $x\cdot z = y\cdot z$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da iz $(x-y)\cdot z = \mathbf{0}$, za svaki vektor z sledi da je $x = y$[21]. To postaje očigledno kada izaberemo $z = x - y$, i tada je $(x-y)\cdot(x-y) = \|x-y\|^2 = 0$. □

2.15. Skalarni proizod u koordinatama. Nađimo sada skalarni proizvod dva vektora u funkciji njihovih koordinata. U tom cilju izaberimo [22] najpre međusobno normalne jedinične vektore (e_1, e_2, e_3) za bazu prostora $\mathcal{V}$. Tada su skalarni proizvodi vektora e_1, e_2, e_3 dati sledećom tabelom:

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

. Uvodeći simbol δ_{ij} na sledeći način

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

nalazimo da je

$$e_i\cdot e_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Upravo uvedeni simbol δ_{ij} poznat je kao Kronekerov (Kroneckerov) δ_{ij} simbol [23] ili kraće Kroneckerov δ. Neka su

$$x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\, e_i, \qquad y = y_1\, e_1 + y_2\, e_2 + y_3\, e_3 = \sum_{j=1}^{3} y_j\, e_j,$$

---

[20] $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\delta\eta\zeta$, Euclid 330 – 275, grčki matematičar.
[21] jedini vektor normalan na sve vektore je nula vektor.
[22] Postojanje takve baze sledi iz geometrijskih razloga.
[23] Kronecker Leopold, 1823 – 1891, nemački matematičar.

dva proizvoljna vektora prostora $\mathcal{V}$, na osnovu Teoreme 1. imamo,

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\, e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} y_j\, e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i\, y_j\, (e_i \cdot e_j) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i\, y_j\, \delta ij$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3. \tag{23}$$

Primetimo da je upravo dokazana formula za skalarni proizvod tako jednostavna jer je baza ortonormirana, tj. važi $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. Ako je $a = (a_1, a_2, a_3)$ neka baza koja nije ortonormirana onda bi formula za skalarni proizvod u koordinatama bila funkcija najviše od 6 skalarnih proizvoda baznih vektora: $\alpha_{ij} = a_i \cdot a_j$, $1 \leq i \leq j \leq 3$.

Primedba. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo generalisati formulu (23) na sledeći način: za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definišemo

$$x \cdot y = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i. \tag{24}$$

Nije teško proveriti da za preslikavanje $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ važe svojstva (E1)-(E5), tj. da je ono skalarni proizvod na $\mathbb{R}^n$, koji se zove standardni skalarni proizvod. U tom skalarnom proizvodu kanonska baza je ortonormirana.

2.16. Skalarni proizvod i geometrija. Navedimo kako se neke geometrijske veličine mogu izračunati koristeći skalarni proizvod.

(1*) Intenzitet ili norma vektora $x = \sum_i x_i\, e_i$ jednaka je

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i,j} \delta_{ij}\, x_i\, x_j} = \sqrt{\sum_i x_i\, x_i}\,.$$

Svaki vektor $x \neq \mathbf{0}$ može se normirati, tj. može mu se dodeliti kolinearan jedinični vektor[24] x_o. Zaista, $x_o = \frac{x}{\|x\|}$.

(2*) Kosinus ugla w koji zahvataju vektori $x = \sum_i x_i\, e_i$ i $y = \sum_i y_i\, e_i$ dat je formulom

$$\cos w = \frac{x \cdot y}{\|x\|\, \|y\|} = \frac{\sum_i x_i\, y_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2}\sqrt{\sum_i y_i^2}}\,.$$

(3*) Ako je x jedinični vektor, tada je njegova i.–ta koordinata x_i jednaka kosinusu ugla α_i koji vektor x gradi sa vektorom e_i baze, tj. $x_i = x \cdot e_i = \|x\|\, \|e_i\| \cos\alpha_i = \cos\alpha_i$. Kako je $x \cdot x = 1$, važi

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

(4*) Skalar–projekcija vektora $x = \sum_i x_i\, e_i$ na vektor $a = \sum_i a_i\, e_i$ data je formulom

$$\mathbf{pr}_a\, x = \frac{a \cdot x}{\|a\|} = \frac{\sum_i a_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}}\,.$$

[24] Naziva se i ort vektora x.

(5*) Ortogonalnost i linearna nezavisnost. Ako je $W = \{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonalan skup, tj. skup u kojem nema nula vektora i čiji vektori su međusobno ortogonalni ($\langle v_j\,,\, v_i\rangle = 0$, za $i \neq j$). Tada iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,$$

nakon skalarnog množenja redom vektorima v_i $(i = 1, \dots, k)$ dobijamo:

$$0 = \langle 0, v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k\,,\, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \langle v_j\,,\, v_i\rangle$$
$$= \alpha_i \langle v_i\,,\, v_i\rangle \implies \alpha_i = 0 \text{ jer je } v_i \neq 0,\ i = 1, \dots, k.$$

Dakle, ortogonalnost skupa W implicira njegovu linearnu nezavisnost.

2.17. Bunjakovski – Cauchy (Koši) – Scwartzova (Švarcova) nejednakost. U svakom euklidskom[25] prostoru veoma važnu ulogu ima funkcija, $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, definisana formulom: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Ova funkcija naziva se norma vektora v, ona je dobro definisana zbog aksiome (E4). U svakom euklidskom prostoru može se dobro definisati i pojam ugla, jer važi sledeća nejednakost.

Teorema 1. *Za bilo koja dva vektora u, v euklidskog vektorskog prostora V važi nejednakost:*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|, \tag{25}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori v i w linearno zavisni. Ova nejednakost poznata je kao Bunjakowski – Cauchy (Koši) – Scwartzova (Švarcova) nejednakost.

Dokaz. Primetimo prvo da ako je neki od vektora u ili v jednak 0 tada nejednakost očigledno važi. Zato pretpostavimo da $u \neq 0 \neq v$ i za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

$$0 \leq \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v\rangle + \lambda^2 \|v\|^2 = \{\text{ako izaberemo } \lambda = -\tfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\} =$$
$$= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}, \quad \text{odakle je} \quad \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \quad \text{tj.} \quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|.$$

Iz prve nejednakosti u izvođenju odmah sledi da jednakost važi akko $u + \lambda v = 0$, tj. ako su u i v linearno zavisni. □

Iz upravo dokazne nejednakosti sledi da postoji jedinstveni ugao $\theta \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|},$$

i tada ugao θ proglasimo uglom $\angle(u, v)$ između vektora u i v.

Posledica 2. *(Nejednakost trougla) Za bilo koja dva vektora u, v euklidskog vektorskog prostora V važi nejednakost:*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \tag{26}$$

[25] Vektorsi prostor snabdeven sa skalarnim proizvodom, za kojeg važe osobine (E1)–(E4) iz Teoreme 1, **2.14.**

Dokaz.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \{\text{zbog Teoreme 1 imamo } \langle u,v\rangle \le \|v\|\,\|w\|\}\\ &\le \|u\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2\,, \quad \text{odakle je} \quad \|v+w\| \le \|v\| + \|w\|.\end{aligned}$$

Primetimo da jednakost u nejednakosti važi akko su u i v linearno zavisni i imaju isti smer. □

2.18. Gramm (Gram) – Schmidtov (Šmitov) postupak ortogonalizacije.

U tački **2.15** susreli smo se sa pojmom ortonormirane baze. Baza e, je **ortonormirana** ako važi:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall\, i,j = 1,2,3$$

A priori nije jasno da li takva baza postoji. Pozitivan odgovor na ovaj problem daje Gramm (Gram) – Schmidtov (Šmitov) postupak ortogonalizacije. Radi se o algoritmu kojim se proizvoljnoj bazi f dodeljuje ortonormirana baza e i to na sledeći način:

(i1) 1. korak: uzmemo 1. vektor stare baze $f_1 \in f$ i definišemo 1. vektor nove baze formulom:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}\,, \tag{$*1$}$$

(i2) 2. korak: uzmemo 2. vektor stare baze $f_2 \in f$ i definišemo prvo vektor

$$v_2 = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle\, e_1\,, \tag{$*2$}$$

a zatim vektor v_2 normiramo i dolazimo do 2. vektora nove baze:

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}\,,$$

(i3) 3. korak: uzmemo 3. vektor baze $f_3 \in f$ i definišemo vektor

$$v_3 = f_3 - \langle f_3, e_1\rangle\, e_1 - \langle f_3, e_2\rangle\, e_2\,, \tag{$*3$}$$

a zatim vektor v_3 normiramo i dolazimo do 3. vektora nove baze:

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}\,.$$

U prvom koraku smo samo normirali vektor e_1. U drugom koraku prvo primetimo da vektor v_2 ne može biti $\mathbf{0}$ vektor, jer kad bi bio, tada iz (*1) i (*2) sledi da su f_2 i f_1 linearno zavisni, što je nemoguće jer oni pripadaju bazi f pa moraju biti linearno nezavisni[26]. Ako sada relaciju (*2) pomnožimo skalarno sa e_1 imamo

$$\langle v_2, e_1\rangle = \langle f_2 - \langle f_2, e_1\rangle\, e_1, e_1\rangle = \langle f_2, e_1\rangle - \langle f_2, e_1\rangle\langle e_1, e_1\rangle = \langle f_2, e_1\rangle - \langle f_2, e_1\rangle = 0,$$

jer je e_1 jedinični vektor. Kako je vektor v_2 kolinearan sa e_2 sledi da je i $\langle e_2, e_1\rangle = 0$. Dakle, u drugom koraku smo konstruisali vektor v_2 koji je normalan na vektor e_1, a onda smo ga još normirali i dobili vektor e_2. U trećem koraku, na sličan način vidimo da je vektor $v_3 \neq \mathbf{0}$, jer $v_3 = \mathbf{0}$ implicira, (*1)-(*3) da su vektori f_1, f_2 i f_3, linearno zavisni, što je nemoguće jer oni čine bazu f pa moraju biti linearno nezavisni. Ako sada relaciju (*3) pomnožimo redom skalarno sa e_1 i e_2 imamo

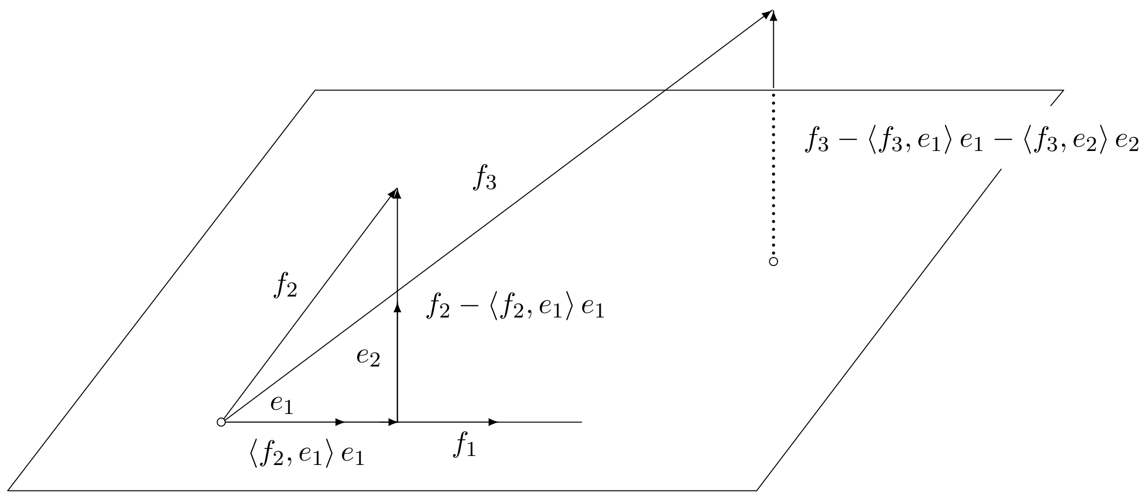
[26] Svaki podskup linearno nezavisnog skupa i sam je linearno nezavisan.

$$\begin{aligned}\langle v_3, e_1\rangle &= \langle f_3 - \langle f_3, e_1\rangle e_1 - \langle f_3, e_2\rangle e_2, e_1\rangle = \langle f_3, e_1\rangle - \langle\langle f_3, e_1\rangle e_1, e_1\rangle - \langle\langle f_3, e_2\rangle e_2, e_1\rangle = \langle f_3, e_1\rangle \\ &\quad - \langle f_3, e_1\rangle \langle e_1, e_1\rangle - \langle f_3, e_2\rangle \langle e_2, e_1\rangle = \{\text{Kako je } \langle e_2, e_1\rangle = 0 \text{ i } \langle e_1, e_1\rangle = 1\ \} = \langle f_3, e_1\rangle - \langle f_3, e_1\rangle = 0, \\ \langle v_3, e_2\rangle &= \langle f_3 - \langle f_3, e_1\rangle e_1 - \langle f_3, e_2\rangle e_2, e_2\rangle = \langle f_3, e_2\rangle - \langle\langle f_3, e_1\rangle e_1, e_2\rangle - \langle\langle f_3, e_2\rangle e_2, e_2\rangle = \langle f_3, e_2\rangle \\ &\quad - \langle f_3, e_1\rangle \langle e_1, e_2\rangle - \langle f_3, e_2\rangle \langle e_2, e_2\rangle = \{\text{Kako je } \langle e_2, e_1\rangle = 0 \text{ i } \langle e_2, e_2\rangle = 1\ \} = \langle f_3, e_2\rangle - \langle f_3, e_2\rangle = 0,\end{aligned}$$

Kako je vektor v_3 kolinearan sa e_3 sledi da je i $\langle e_3, e_1\rangle = \langle e_3, e_2\rangle = 0$. Dakle, u trećem koraku smo konstruisali vektor v_3 koji je normalan na vektore e_1, e_2 i onda ga još normiramo i dobijamo treći vektor nove baze e_3.

Primetimo da se ovaj postupak može primeniti u bilo kom konačnodimenzionom euklidskom vektorskom prostoru[27].

Geometrijska interpretacija Gram-Šmitovog postupka. Ako uzmemo u obzir formulu za ortogonalnu skalar-projekciju iz **2.16**, formula iz (4*), lako prepoznajemo da izraz $\langle f_2, e_1\rangle e_1$ predstavlja ortogonalnu projekciju vektora f_2 na vektor e_1, tako da desna strana formule (2*) zapravo pokazuje da od vektora f_2 oduzimamo njegovu ortogonalnu projekciju na vektor e_1. Ono što nam preostaje (a to je vektor v_2) je normalno na prvi vektor e_1 nove baze. Slično, izrazi $\langle f_3, e_1\rangle e_1$ i $\langle f_3, e_2\rangle e_2$ predstavljaju, redom, ortogonalne projekcije vektora f_3 na vektore e_1 i e_2, tako da desna strana formule (3*) zapravo pokazuje da od vektora f_3 oduzimamo njegove ortogonalne projekcije na vektore e_1 i e_2, pa ono što nam preostaje (a to je vektor v_3) je normalno na prva dva vektora e_1, e_2 nove baze.



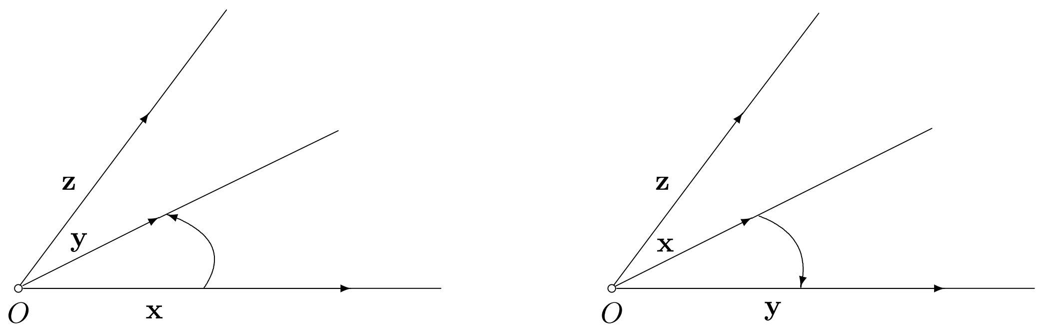
Slika 14. Geometrijski smisao Gram – Schmidtovog postupka

2.19. Orijentacija. Pojam orijentacije u nekom prostoru tačaka povezan je sa izborom vektorskog dela koordinatnog sistema. Kao što znamo na pravoj kada izaberemo koordinatni početak postoje dva smera levo i desno. Izaberemo vektor x koordinatne ose Ox tako da je kraj vektora x desno od njegovog početka i tu bazu proglasimo pozitivnom. Ako sada izaberemo neki drugi koordinatni sistem na istoj pravoj $O'y$, tada je on takođe pozitivan akko je $y = \alpha\, x$, za $\alpha > 0$. U suprotnom, tj. ako je $\alpha < 0$ kažemo da je koordinatni sistem $O'y$ negativno orijentisan. U ravni postupamo

[27] tj. ako baza f ima više od tri elementa možemo ga nastaviti na analogan način.

na isti način, izaberemo neki koordinatni sistem Oxy takav da se od vrha vektora x krećemo prema vrhu vektora y, u uglu $\angle(x,y)$ kojeg oni grade, u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu i njega proglasimo za pozitivan (Slika 15). Ako sada izaberemo neki drugi koordinatni sistem $O'x'y'$, on će biti pozitivan ako se od vrha vektora x' krećemo prema vrhu vektora y', u uglu $\angle(x',y')$, u istom smeru kao što se od vrha vektora x krećemo prema vrhu vektora y, u uglu $\angle(x,y)$. Ako se pomenuti smerovi ne podudaraju onda kažemo da je koordinatni sistem $O'x'y'$ suprotno orijentisan od koordinatnog sistems Oxy.

U prostoru takođe postupamo na analogan način, tj. izborom odgovarajuće baze. Za trojku linearno nezavisnih vektora[28] (x,y,z) kažemo da je pozitivno orijentisana (ili kraće pozitivna) ako bi prsti desne šake pokazivali kretanje od vrha prvog vektora x, u uglu $\angle(x,y)$ ka vrhu drugog vektora y(u ravni koja je određena njima), tada bi palac desne šake pokazivao onu stranu ravni određene vektorima x i y u kojoj se nalazi vrh vektora z[29], vidi Sliku 15. Ako je (x,y,z) pozitivno orijentisan reper[30] onda su (y,x,z) i $(x,-y,z)$ negativno orijentisani reperi. Primetimo da se cikličnom zamenom vektora nekog repera ne menja orijentacija baze, tj. reperi $(x,y,z),(y,z,x)$ i (z,x,y) imaju istu orijentaciju.



Slika 15. Pozitivni i negativni reper

7. Vektorski i mešoviti proizvod

2.20. Vektorski i mešoviti proizvod. Vektorski ili spoljašnji proizvod vektora je binarna operacija $\times : \mathcal{V}_e \times \mathcal{V}_e \longrightarrow \mathcal{V}_e$, kojom bilo kojem paru vektora x i y dodeljujemo vektor $x \times y$ (Slika 16) koji ima sledeća svojstva:

(i) Intenzitet. $\|x \times y\| = \|x\|\,\|y\| \sin w$, gde je $w = \angle(x,y)$; drugim rečima intenzitet vektora $x \times y$ jednak je površini paralelograma koji je određen vektorima x i y. Ako je intenzitet vektorskog proizvoda 0 tada se pravac i smer ne definišu.

(p) Pravac. Vektor $x \times y$ je normalan na svaki od vektora x i y,

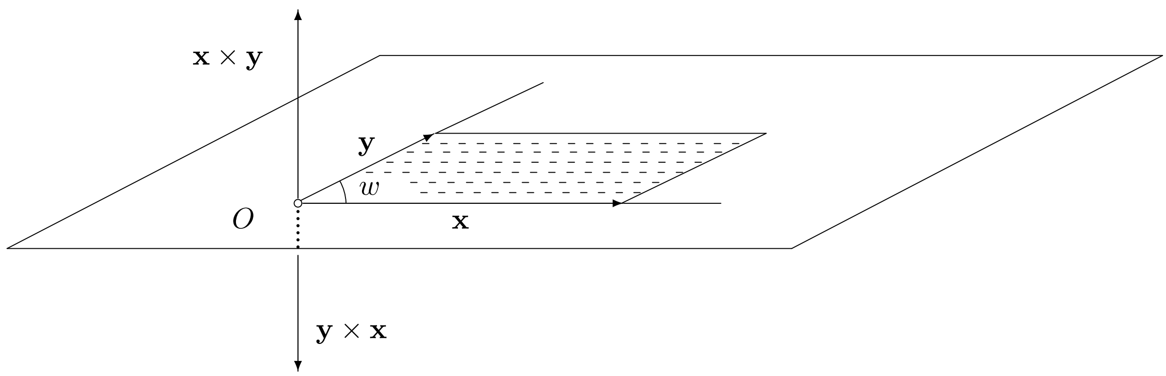
(s) Smer. Uređena trojka vektora $(x, y, x \times y)$ pozitivno je orijentisana.

---

[28] koji tako čine bazu prostora $\mathcal{V}$.

[29] Baza (x,y,z) ne mora biti ortonormirana, pa nam je potrebno preciziranje.

[30] Reper je sinonim za bazu ili za koordinatni sistem.



Slika 16. Vektorski proizvod

Mešoviti proizvod je preslikavanje, $[\cdot,\cdot,\cdot] : \mathcal{V}_e \times \mathcal{V}_e \times \mathcal{V}_e \longrightarrow \mathbb{R}$, definisano formulom

$$[x, y, z] = (x \times y) \cdot z. \tag{27}$$

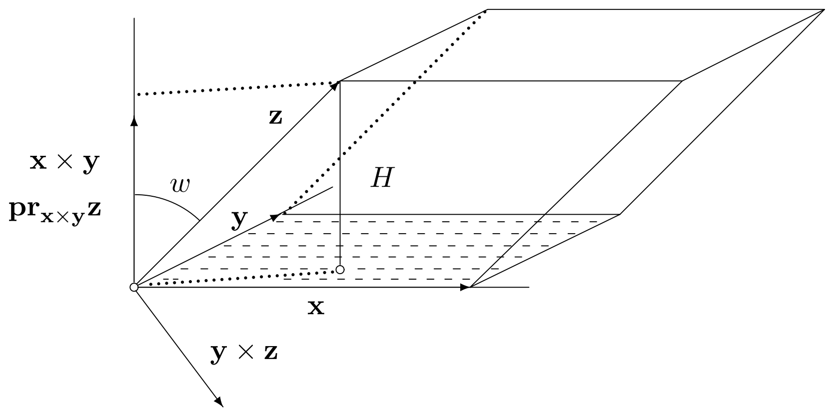
Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda data je u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $[x, y, z]$ jednaka je zapremini paralelepipeda određenog vektorima x, y i z.*

Dokaz. Neka vektori x i y određuju bazu paralelepipeda[31] čija je površina B (vidi Sliku 17). Primetimo da se tada odgovarajuća visina H dobija ortogonalnim projektovanjem vektora z na vektor $x \times y$. Odatle je zapremina paralelepipeda V

$$V = B\,H = \|x \times y\|\,\big|\mathbf{pr}_{x\times y} z\big| = \|x \times y\|\,\big|\|z\| \cos w\big| = \big|(x \times y) \cdot z\big| = \big|[x, y, z]\big|,$$

pri čemu su korišćene osnovne osobine skalarnog i vektorskog množenja. □



Slika 17. Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda

Osnovne osobine vektorskog i mešovitog proizvoda sakupljena su u sledećoj Teoremi.

Teorema 2. *Neka su x, y, z, v proizvoljni vektori prostora $\mathcal{V}_e$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ tada je*

[31] grč. *parallelepipedon, parallelos* naporedan, *epipedon* ravan.

(L1) $x \times y = -(y \times x)$,

(L2) $(\alpha x) \times y = \alpha(x \times y)$,

(L3) $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$,

(P1) $[x, y, z] = -[y, x, z]$,

(P2) $[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y]$,

(P3) $[\alpha x, y, z] = \alpha[x, y, z]$,

(P4) $[x + y, z, v] = [x, z, v] + [y, z, v]$.

Dokaz. Svojstva (L1), (L2), (P1) i (P3) dokazuju se direktno koristeći definicije vektorskog i mešovitog proizvoda kao i osobine skalarnog proizvoda date u Teoremi 1, **2.14**. Kako je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora x, y i z jednaka zapremini paralelepipeda razapetog nad tim vektorima, imamo

$$\big|[x, y, z]\big| = \big|[y, z, x]\big| = \big|[z, x, y]\big|.$$

Da bismo završili dokaz svojstva (P2) potrebno je dokazati da isto orijentisani reperi imaju isti znak mešovitog proizvoda. Primetimo da je dovoljno pokazati jednakost $[x, y, z] = [y, z, x]$.
Pretpostavimo npr. da je $[x, y, z] > 0$. Iz dokaza prethodne Teoreme 1 vidimo da je ugao $\angle(x \times y, z)$ oštar, tj. da su vektori $x \times y$ i z sa iste strane ravni određene vektorima x i y. Tada su i vektori $y \times z$ i x sa iste strane ravni određene vektorima y i z (Slika 17), pa je i ugao $\angle(y \times z, x)$ oštar, tj. $[y, z, x] > 0$. Time je pokazano svojstvo (P2). Pokažimo sada osobinu (P4),

$$[x + y, z, v] = [z, v, x + y] = (z \times v) \cdot (x + y) = (z \times v) \cdot x + (z \times v) \cdot y[z, v, x] + [z, v, y] = [x, z, v] + [y, z, v].$$

Za dokaz preostalog svojstva (L3) iskoristimo Propoziciju 2, **2.14**, po kojoj je dovoljno proveriti da je

$$[(x + y) \times z] \cdot v = \big[(x \times z) + (y \times z)\big] \cdot v,$$

za proizvoljan vektor v, a to se svodi na upravo dokazano svojstvo (P4). □

2.21. Vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama. Ako je (e_1, e_2, e_3) ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathcal{V}_e$ tada su vektorski prozvodi vektora baze zadati sledećim tabelama

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	$\mathbf{0}$	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	$\mathbf{0}$	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	$\mathbf{0}$

,

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	$\mathbf{0}$	$-e_3$	e_2
e_2	e_3	$\mathbf{0}$	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	$\mathbf{0}$

,

pri čemu se prva tabela odnosi na slučaj kada je baza (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana, a druga, kada je ta orijentacija negativna. Sada imamo,

Teorema 1. *Neka je (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathcal{V}_e$ i neka su dati vektori, $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$ i $z = \sum_i z_i e_i$. Tada važe sledeće formule:*

(vp) $\quad x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$

(mp) $\quad [x, y, z] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3.$

Dokaz. Ako iskoristimo Teoremu 2, **2.20**. imamo

$$x \times y = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j (e_i \times e_j) = \left\{ \begin{array}{l} \text{iz prve tabele pročitamo izraze } e_i \times e_j \\ \text{vidimo da od 9 članova preostane 6 i to} \\ \text{nakon grupisanja uz vektore } e_i \end{array} \right\}$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3\ y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3,$$

$$[x, y, z] = (x \times y) \cdot z = ((x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3\ y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3) \cdot (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$$

$$= \{\text{jer je baza ortonormirana}\} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3\ y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3,$$

Time je dokaz teoreme završen. □

8. Determinanta

2.22. Determinanta matrice. Determinanta je funkcija, $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, koju definišemo induktivno na sledeći način:

$$n = 1 : \qquad \det[a_{11}] = a_{11}$$

$$n = 2 : \qquad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n = 3 : \qquad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\, M_{11} - a_{12}\, M_{12} + a_{13}\, M_{13}$$

gde su: $M_{11} = \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{12} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ i $M_{13} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

$\vdots \quad \vdots$

Pretpostavimo da znamo izračunati determinantu matrice reda $k > 3$. Tada definišemo

$$n = k : \qquad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} = a_{11}\, M_{11} - a_{12}\, M_{12} + \cdots + (-1)^{1+k} M_{1k}$$

gde su M_{ij} determinante matrica reda $k-1$ koje se iz matrice A dobijaju izbacivanjem $i.$–te kolone i $j.$–te vrste i nazivaju se minore matrice A i ponekad se obeležavaju sa $\Delta_{ij}(A)$.

Determinantu matrice A možemo shvatiti kao i funkciju njenih vrsta a_i ($a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$) ili kolona a^j ($a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$), tj. pišemo

$$\det A = \det[a_1, a_2, \dots, a_n] = \det[a^1, a^2, \dots, a^m]\,.$$

Ove oznake koristimo u sledećoj teoremi u kojoj su popisana osnovna svojstva determinante.

Teorema 1. *Neka je data matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

(i1) *determinante matrice A i njoj transponovane matrice A^τ su jednake,* $\det A = \det[\, a_1, a_2, \dots, a_n\,] = \det[\, a^1, a^2, \dots, a^n\,] = A^\tau$.

(i2) *ako neku kolonu (vrstu) matrice A pomnožimo sa skalarom onda je determinanta te matrice jednaka proizvodu datog skalara i determinante polazne matrice A, tj. preciznije* $\det[\, a_1, a_2, \dots, \lambda\, a_i, \dots, a_n\,] = \lambda \det[\, a_1, a_2, \dots, \lambda\, a_i, \dots, a_n\,] = \lambda \det A$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Specijalno, vidimo da je* $\det(\lambda\, I_n) = \lambda^n$.

(i3) *ako je $A = [\, a_1, a_2, \dots, a_n\,]$ matrica i b proizvoljni vektor ($\in \mathbb{R}^n$) tada za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ važi*

$\det[\,a_1, a_2, \ldots, a_i + b, \ldots, a_n\,] = \det[\,a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\,] + \det[\,a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, a_n\,].$

Analogna tvrdnja važi i za kolone.

(i4) *Ako u nekoj matrici zamenimo dve susedne vrste (kolone) onda determinanta menja znak, ili preciznije* $\forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *važi,*

$\det[\,a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\,] = -\det[\,a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n\,].$

(i5) *Ako je neka vrsta (kolona) matrice* A *nula vektor (tj. sastoji se od samih nula) onda je* $\det A = 0$

(i6) *Ako matrica* A *ima barem dve proporcionalne vrste (kolone) onda je* $\det A = 0$.

(i7) *Dodavanje linearne kombinacije vrsta (kolona) nekoj drugoj vrsti (koloni) matrice ne menja njenu determinantu ili preciznije (za vrste), ako je* $b = \sum_{j \neq i} \alpha_j\, a_j$, *tada je*

$\det[\,a_1, a_2, \ldots, a_i + b, \ldots, a_n\,] = \det[\,a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\,] = \det A.$

(i8) *Binet*[32]*- Cauchyjeva*[33] *teorema. Za bilo koje dve matrice* A *i* $B \in \mathbb{M}_n$ *važi formula:*

$$\det A\, B = \det A \cdot \det B.$$

Determinanta se pojavljuje u mnogim problemima, tako npr. važi i

Teorema 2. *Matrica* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *ima inverz akko* $\det A \neq 0$.

2.23. Determinanta i vektorski i mešoviti proizvod. Determinanta nam omogućuje da vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama zapišemo na jednostavniji način. Preciznije, Teoremu 1, **2.21** možemo prepisati na sledeći način.

Teorema 1. *Neka je* (e_1, e_2, e_3) *pozitivno orijentisana ortonormirana baza vektorskog prostora* $\mathcal{V}_e$ *i neka su dati vektori,* $x = \sum_i x_i\, e_i$, $y = \sum_i y_i\, e_i$ *i* $z = \sum_i z_i\, e_i$. *Tada važe sledeće formule:*

$$\text{(vp)} \qquad x \times y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(mp)} \quad [x, y, z] = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

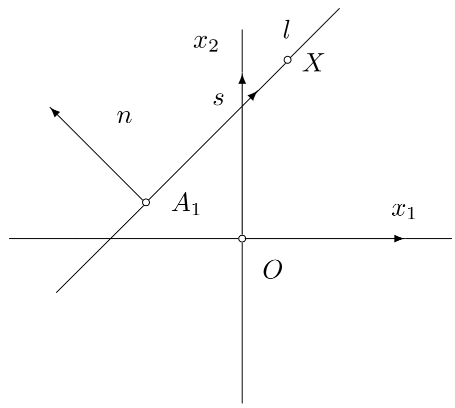
9. Linearna analitička geometrija ravni

2.24. Jednačine prave u ravni. Neka je zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem (O, e_1, e_2), i u njime određenoj ravni, $\mathbb{E}^2$, prava l. Prema Euklidovim aksiomama svaka prava jednoznačno je određena sa svoje dve različite tačke A_1 i A_2, koje određuju

[32] Binet, francuski matematičar

[33] Cauchy, francuski matematičar

i vektor $s = \mathbf{A_1A_2}$ čijem smeru pripada i data prava l. Dakle, ako nam je dat vektor $s \neq \mathbf{0}$ tada se njegov pravac sastoji iz beskonačnog broja paralelnih pravih. Da bismo odabrali jednu od njih npr. l, potrebno je da izaberemo još jednu njenu tačku recimo A_1. Dakle, na jeziku vektora prava je jednoznačno određena vektorom s, kojeg nazivamo vektor pravca prave l, i jednom svojom tačkom A_1. Primetimo da će tačka $X \in \mathbb{E}^2$ pripadati pravoj l akko su vektori $\mathbf{A_1X}$ i s kolinearni (linearno zavisni), tj.



Slika 18. Jednačina prave kroz O

(28) $\quad X \in \mathbb{E}^2 \iff \mathbf{A_1X} = \lambda\, s$

za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Dakle, (28) predstavlja parametarsku jednačinu prave u vektorskom obliku. Broj λ je parametar i svakom $\lambda \in \mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka na pravoj l, koju ćemo ponekad zapisivati kao $l(\lambda)$ kada znamo A_1 i s, jer je $l(\lambda)$ funkcija i od A_1 i s, tj. $l(\lambda, A_1, s)$. Primetimo da vektorska jednačina (28) ne zavisi o dimenziji, tako je vektorska jednačina prave u euklidskom prostoru $\mathbb{E}^m$ data sa (28). Jednačinu (28) sada možemo napisati i koordinatno: neka su date tačke $A_1 = (y_1, y_2)$, $A_2 = (z_1, z_2)$, $X = (x_1, x_2)$, tada je $s = (\xi_1, \xi_2) = (z_1 - y_1, z_2 - y_2)$ i $\mathbf{A_1X} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$

$$(29) \qquad \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda\,\xi_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda\,\xi_2 \end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda\,\xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda\,\xi_2. \end{aligned}$$

Ili opštije u prostoru tačaka[34] $\mathbb{E}^m$,

$$(30) \qquad \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda\,\xi_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda\,\xi_2 \\ &\vdots \\ x_m - y_m &= \lambda\,\xi_m \end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda\,\xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda\,\xi_2. \\ &\vdots \\ x_m &= y_m + \lambda\,\xi_m, \end{aligned}$$

gde je $A_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ i $s = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$.

Budući je $\mathbb{E}^2$ dvodimenzion, vidimo da za dati vektor s pravca prave l postoji jedinstveni pravac koji je normalan na pravac vektora s. Sada, obeležimo sa n neki vektor čiji je pravac normalan na pravac vektora s, vidi Sliku 18. Vektor n nazivamo vektorom normale prave l. Primetimo da je prava l određena vektorom n i proizvoljnom tačkom prave A_1, jer važi:

$$X \in l \iff \mathbf{A_1X} \perp n \iff \mathbf{A_1X} \cdot n = 0 \iff a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) = 0,$$

gde je $A_1 = (y_1, y_2)$, $X = (x_1, x_2)$, i $n = (a_1, a_2)$. Jednačinu iz poslednje ekvivalenciju možemo prepisati, i kao

$$(31) \qquad a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + b = 0,$$

[34] Prostor tačaka zove se afini prostor.

gde je $b = -n \cdot \mathbf{OA_1} = -(a_1\,y_1 + a_2\,y_2)$. Prethodna jednačina zove se opšta jednačina prave, zato jer se svakoj pravoj iz $\mathbb{E}^2$ može dodeliti jednačina oblika (31)[35]. Primetimo da se parametarska jednačina prave (28), eliminacijom parametra λ može svesti na opštu jednačinu prave (samo u dimenziji $m = 2$). Koristićemo sledeće oznake za pravu l[36] da istaknemo kako je zadata: $l = l(s, A_1)$ (vektorom pravca i jednom svojom tačkom), $l = l(A_1, A_2)$ (dve svoje tačke) ili $l = l(n, A_1)$ (vektorom normale i jednom svojom tačkom).

Sada se postavlja prirodno pitanje šta se dobija generalizacijom metode primenjene u izvođenju opšte jednačine prave u višim dimenzijama. U izvođenju opšte jednačine prave ključna stvar bila je egzistencija jedinstvenog pravca n normalnog na vektor prave s. Dakle, ako je dimenzija m prostora tačaka $\mathbb{E}^m$ veća od dva tada postoji jedinstveni pravac koji je normalan na ravan dimenzije $(m-1)$[37]. Ravni prostora $\mathbb{E}^m$ dimenzije $(m-1)$ zovu se hiperravni prostora $\mathbb{E}^m$. Iz ovog razmatranja sledi da jednačina (31), njene prve dve ekvivalencije, predstavlja jednačinu hiperravni u prostoru $\mathbb{E}^m$. Preciznije, za $A_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ i $n = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ imamo da je sa

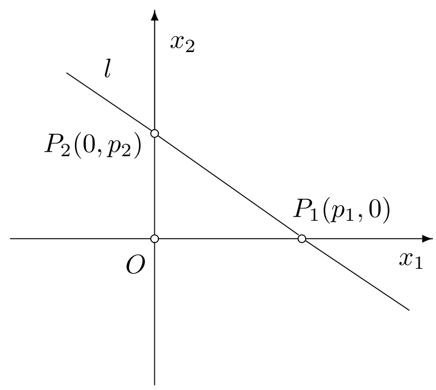
$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_m\,x_m + b = 0, \tag{32}$$

gde je $b = -n \cdot \mathbf{OA_1} = -(a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + \cdots + a_m\,y_m)$, data opšta jednačina hiperravni u $\mathbb{E}^m$. U slučaju kada je $m = 3$, jednačina (32) predstavlja opštu jednačinu ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$.

Prava u ravni može se odrediti raznim geometrijskim uslovima. Svaki od njih određuje odgovarajući oblik jednačine prave. Analizirajmo to na sledećim primerima.

Prava je određena zadavanjem presečnih tačaka prave sa osama. Jednačina prave koja seče ose x_1 i x_2 u tačkama $P_1(p_1, 0)$ i $P_2(0, p_2)$, $p_1 \cdot p_2 \neq 0$, biće

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1. \tag{33}$$



Slika 19. Segmentni oblik jednačine prave

Ako je $a_2 \neq 0$, jednačina (31) ekvivalentna je sledećoj jednačini

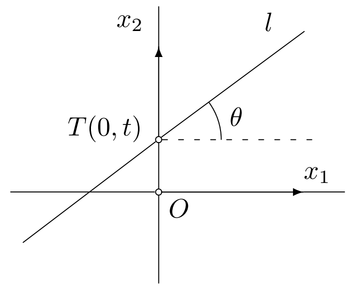
$$x_2 = -\frac{a_1\,x_1 + b}{a_2} = k\,x_1 + t. \tag{34}$$

[35] Izraz sa leve strane jednačine (31) zove se linearni polinom u dve promenljive.

[36] Korisno prilikom rešavanja zadataka.

[37] Ravan dimenzije $k\,(k < m)$ u prostoru $\mathbb{E}^m$ je njegov podskup, koji generiše $k-$dimenzioni vektorski prostor s obzirom na relaciju $\sim$ iz tačke **2.1**

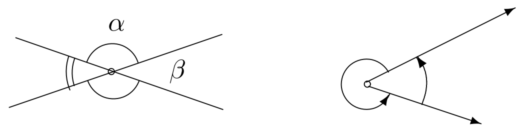
Na taj način svakoj vrednosti promenljive x_1 dodeljena je vrednost promenljive x_2 (Slika 20). Tada je $k = -a_1/a_2 = \tan\theta$, koeficijent pravca prave l, gde je θ ugao koji gradi prava l sa pozitivnim delom ose x_1 i $t = -b/a_2$ određuje presek prave l i x_2 ose. Za jednačinu prave (34) kažemo da je u eksplicitnom obliku. Ako je data jednačina $F(x_1, x_2) = 0$ ili $x_2 = f(x_1)$, tada se tačke čije koordinate zadovoljavaju zadatu jednačinu mogu odrediti dodeljivanjem vrednosti promenljive x_2 svakoj vrednosti promenljive x_1.



Slika 20. Eksplicitni oblik jednačine prave

2.25. Ugao između dve prave u ravni. Neka su l i p dve prave iste ravni date svojim jednačinama (64), koje se seku, obrazuju četiri ugla, od kojih su po dva nasuprotna jednaka i zbir bilo koja dva ugla α i β, koji nisu nasuprotna je π. Pod uglom između pravih l i p podrazumevamo manji od α i β, dakle,

$\angle(l,p) = \min\{\alpha, \beta\}$, odakle je jasno



Slika 21. Ugao između dve prave

$\angle(l,p) \in [0, \pi/2]$. Kako mi želimo ugao $\angle(l,p)$ svesti na ugao između njihovih vektora normala (ili vektora pravaca) i kako je kosinus negativan na intervalu $(\pi/2, \pi)$, dobijamo da je

$$\cos\angle(l,p) = \frac{|\, n_1 \cdot n_2 \,|}{\|n_1\|\|n_2\|} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \angle(l,p) = \arccos\frac{|\, n_1 \cdot n_2 \,|}{\|n_1\|\|n_2\|}\ .$$

2.26. Rastojanje tačke i prave u ravni. U ravni $\mathbb{E}^2$ rastojanje između tačaka A i B dato je sa $dis(A,B) = \|\mathbf{AB}\|$. Kao i mnogo puta dosada mi želimo dobar koncept[38], u ovom slučaju rastojanje između dve tačke, proširiti na rastojanje između dva neprazna skupa $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{E}^2$. To radimo na sledeći prirodan način:

$$dis(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf\{\, dis(A,B) \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}. \tag{35}$$

Ova definicija je prirodna i dobra jer svaki podskup od $\mathbb{R}$ koji je odozdo ograničen ima u skupu $\mathbb{R}$ infimum. Iz gornje definicije je jasno da ako je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ tada je $dis(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$. Postavlja se pitanje da li može biti $dis(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$, a da su skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ disjunktni. Odgovor je potvrdan, jer npr. za $\mathcal{A} = [0,1)$ i $\mathcal{B} = [1,2]$ važi da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ i $dis(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$.

Primenimo sada našu definiciju rastojanja na slučaj kada je $\mathcal{A} = \{A\}$ jedna tačka i kada je $\mathcal{B} = l$ data prava ravni $\mathbb{E}^2$.

S obzirom na naše geometrijsko iskustvo očekujemo da se najkraće rastojanje od tačke do prave ostvaruje normalom iz tačke na tu pravu.

[38] Jedna od važnijih metoda u matematici.

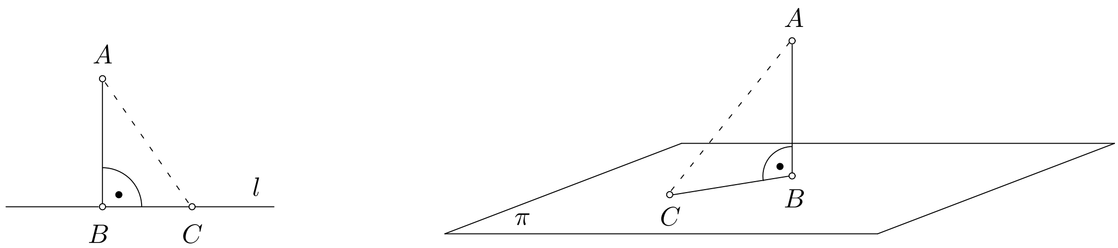
Propozicija 1. *(1) Neka je data tačka A i prava l i neka je B podnožje normale iz A na pravu l i neka je C proizvoljna tačka prave l. Tada je*

$$dis(A,B) \leq dis(A,C), \quad \text{odnosno} \quad dis(A,l) = \|\mathbf{AB}\|\,.$$

(2) Ako je $A=(y_1,y_2)$ i $l\ldots.$ $\;a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + b = 0$, tada je

(36) $$dis(A,l) = dis(A,B) = \frac{|\;a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + b\;|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,.$$

Dokaz. (1) Uočimo trougao $\triangle\,ABC$ (Slika 22), s obzirom da je $AB \perp l$ trougao $\triangle\,ABC$ je pravougli.



Slika 22. Rastojanje tačka do prave i ravni

Primenom Pitagorine teoreme[39] je

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 - \|CB\|^2 \leq \|AC\|^2.$$

(2) Na osnovu upravo dokazane tvrdnje (1), potrebno je naći tačku B koja je presek prave p, određene vektorom normale $n=(a_1,a_2)$ prave l i tačke $A=(y_1,y_2)$, i prave l.

(37) Parametarske jednačine prave p su: $\quad x_1 = y_1 + \lambda\,a_1, \quad x_2 = y_2 + \lambda\,a_2.$

Ako ih zamenimo u opštu jednačinu prave l, dobijamo redom

$$0 = a_1\,(y_1+\lambda\,a_1) + a_2\,(y_2+\lambda\,a_2) + b = \lambda\,(a_1^2+a_2^2) + a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + b \quad \text{odakle je} \quad \lambda_0 = -\,\frac{a_1\,y_1+a_2\,y_2+b}{a_1^2+a_2^2}\,.$$

Dakle, tački B odgovara parametar λ_0, a tački A parametar 0, tj. $p(\lambda_0)=B$ i $p(0)=A$. Sada nalazimo,

$$\begin{aligned} dis(A,B) &= \sqrt{(y_1+\lambda_0\,a_1-y_1)^2+(y_2+\lambda_2\,a_2-y_2)^2} = \sqrt{\lambda_0^2(a_1^2+a_2^2)} = |\lambda_0|\,\sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ &= \frac{|a_1\,y_1+a_2\,y_2+b|}{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2} = \frac{|a_1\,y_1+a_2\,y_2+b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

Primetimo da analogna propozicija sa isto takvim dokazom važi i u slučaju rastojanja tačke i ravni[40].

2.27. Jednačina kruga. Odredimo sada jednačinu kruga u Dekartovom koordi-

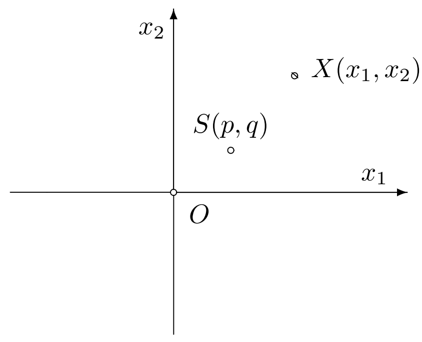
[39] Pitagora, 580 − 500, grčki matematičar, filosof, ...
[40] Štaviše i hiperravni u prostoru $\mathbb{E}^m$, $m > 2$.

natnom sistemu $O\,e_1\,e_2$. Prvo, iz Pitagorine teoreme sledi da je rastojanje $dis(P,Q)$ između tačaka $P(p_1,p_2)$ i $Q(q_1,q_2)$ u Dekartovom koordinatnom sistemu dato sa

$$dis^2(P,Q) = (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2.$$

Tačka $X(x_1,x_2)$ pripada krugu sa središtem $S(p,q)$, poluprečnika r ako i samo ako je $\|\mathbf{SX}\| = r$, te je njegova jednačina (Slika 23)

$$(x_1-p)^2 + (x_2-q)^2 = r^2.$$



Slika 23. Jednačina kruga

Iz prethodne jednačine dobijamo da je

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2\,p\,x_1 - 2\,q\,x_2 + c = 0,$$

jednačina kruga sa centrom u (p,q), kad god je $p^2+q^2 \geq c$.

Skup svih tačaka ravni (u kojoj je zadat koordinatni sistem $O\,e_1\,e_2$), na jediničnom rastojanju od O je krug čija je jednačina

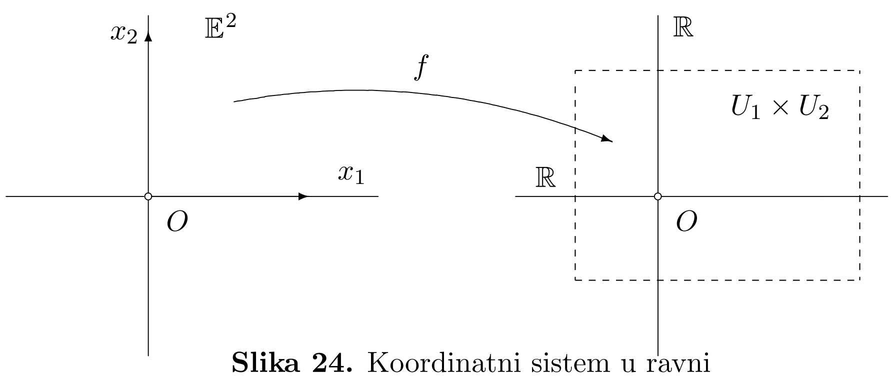
$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Kao što je moguće pravu zadati parametarskim jednačinama, isto je moguće učiniti i sa krugom. Postoji mnogo parametrizacija kruga, npr. krug sa središtem O ima npr. sledeću prirodnu parametrizaciju

$$x_1 = \cos\theta, \qquad x_2 = \sin\theta, \qquad \theta \in [\,0, 2\,\pi)$$

10. Koordinatni sistemi u ravni

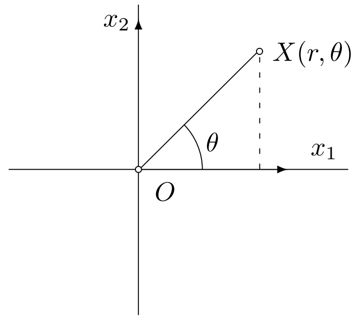
2.28. Polarni koordinatni sistem. Uvođenje Dekartovih koordinata predstavlja



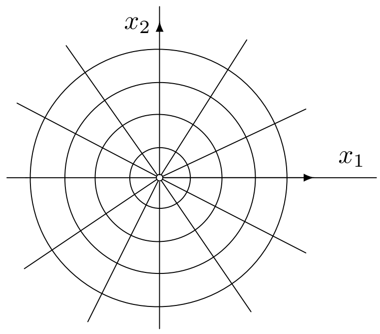
Slika 24. Koordinatni sistem u ravni

bijekciju ravni $\mathbb{E}^2$ i skupa $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, kojom svakoj tački $X \in \mathbb{E}^2$ dodelimo tačno jedan uređeni par brojeva – koordinata (x_1,x_2). Postavlja se prirodno pitanje da li je moguće uvesti neke druge koordinate, tj. naći intervale $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}$, takve da je ravan, $\mathbb{E}^2$, u bijekciji sa $U_1 \times U_2$. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan jer proizvoljna bijekcija $f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow U_1 \times U_2$ definiše jedan koordinatni sistem (Slika 24). Ponekad se dozvoljava da je funkcija f bijekcija na $\mathbb{E}^2 \setminus \mathbb{D}$, pri čemu je $\mathbb{D}$ neki jednostavni podskup od $\mathbb{E}^2$ (npr.

tačka, prava i slično). Za tačke skupa $\mathbb{D}$ obično nije dobro definisana neka od koordinata, ali u tom slučaju tačke ovog skupa mogu se jednostavno kontrolisati preko preostale koordinate. Za takve funkcije koristimo termin "skoro bijekcije". Na proizvoljni koordinatni sistem možemo gledati kao na uređenu trojku (U_1, U_2, f), pri čemu je f bijekcija (ili "skoro bijekcija"). Skup $\{(U_1, U_2, f) \mid f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow U_1 \times U_2,\ f \text{ je bijekcija}\}$ ima mnogo elemenata, od posebnog su interesa jednostavni elementi tog skupa. Sledeći sistem po jednostavnosti bazira se na trigonometrijskoj interpretaciji kompleksnog broja i taj sistem poznat je i kao **polarni koordinatni sistem**. Definišimo sada polarni sistem. Izaberimo tačku $O \in \mathbb{E}^2$, koju zovemo **polarnim središtem ili polom**, i polupravu x_1 kojoj je početak tačka O, koja se naziva **osom polarnog koordinatnog sistema ili polarnom osom**. Tačka X, različita od pola jednoznačno je određena rastojanjem $r > 0$ od pola i uglom θ koji vektor $\mathbf{OX}$ zaklapa sa jediničnim vektorom x_1 ose (Slika 25). Uređeni par (r, θ) nazivamo **polarnim koordinatama** tačke X. Tačka (r, θ) se poklapa sa svakom od tačaka $(r, \theta + 2\,n\,\pi)$, $n = 1, 2, \ldots$. Da bismo dobili jedinstvenost, tj. da bi svakoj tački ravni odgovarao tačno jedan uređeni par koordinata, r mora uzimati vrednosti u skupu $U_1 = [\,0, +\infty)$, a koordinata θ u skupu $U_2 = [\,0, 2\,\pi)$ ili nekom drugom poluzatvorenom intervalu dužine $2\,\pi$. Mali problem nastaje sa polom jer je za njega $r = 0$, a ugao θ nije definisan (primer "skoro bijekcije").



Slika 25. Polarni koordinatni sistem



Slika 26. Koordinatne linije polarnog sistema

Primetimo da su sledeće koordinatne linije $X_1(a) = \{X(r, \theta) \mid r = a,\ \theta \in U_2\}$ krugovi, a $X_2(\alpha) = \{X(r, \theta) \mid \theta = \alpha,\ r \in U_1\}$ poluprave sa početkom u tački O (vidi Sliku 26). Nađimo sada vezu između koordinata neke tačke u pravouglom Dekartovom sistemu i polarnom sistemu čiji se pol poklapa sa početkom Dekartovog koordinatog sistema, a polarna osa se poklapa sa x_1 osom pravouglog Dekartovog sistema.

Ako neka tačka ima koordinate (r, θ) u polarnom sistemu tada su njene koordinate u Dekartovom sistemu jednoznačno određene formulama (Slika 25),

$$x_1 = r \cos\theta, \qquad x_2 = r \sin\theta. \tag{38}$$

Obratne veze, tj. prelazak iz pravouglog koordinatnog sistema u polarni koordinatni sistem date su (za $x_1 \neq 0$) formulama,

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \tag{39}$$

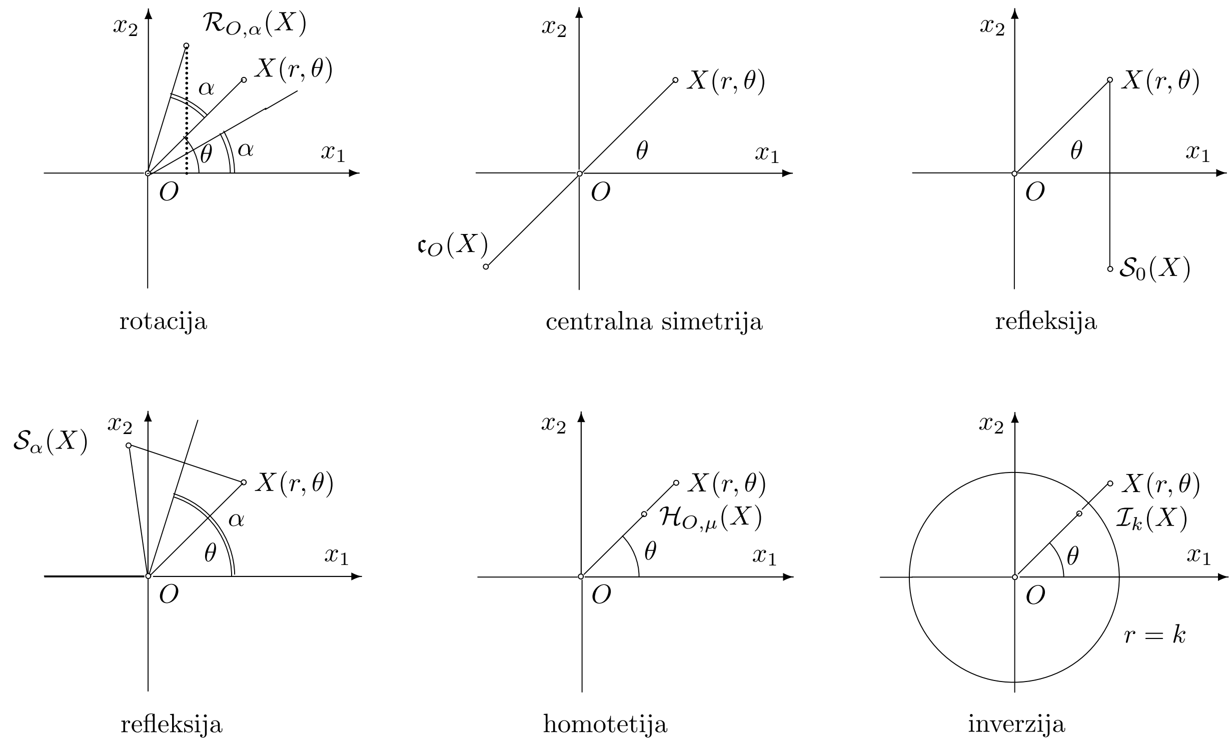
Primetimo da transformacione formule (39) nisu jednoznačne, jer treba voditi računa o kvadrantu u kojem se nalazi tačka.

Ako umesto tačke uzmemo jednačinu neke krive u Dekartovom pravouglom sistemu, tada se njena jednačina u polarnom sistemu dobija zamenom datom u (38). Na primer, Dekartova jednačina $x_1^2 + x_2^2 = 1$ jediničnog kruga, u polarnim koordinatama je jednostavnija jer iz

$$(r\ \cos\theta)^2 + (r\ \sin\theta)^2 = 1 \quad \text{sledi} \quad r = 1.$$

Primetimo da je jednačina kruga, poluprečnika r_0 sa centrom u polu, u polarnom sistemu linearna, $f(r,\theta) = r - r_0 = 0$. Dakle jednostavnija je od njegove jednačine u pravouglom Dekartovom sistemu, jer je ovaj sistem prilagođen geometriji kruga. Polarni sistem pojavio se prvo u astronomiji, a zatim u fizici i mehanici pri tretiranju kružnih kretanja nebeskih tela i materijalnih tačaka.

2.29. Geometrijske transformacije ravni. Preslikavanja ravni $\mathbb{E}^2$ na samu sebe nazivamo geometrijskim transformacijama ravni. One geometrijske transformacije koje



Slika 27. Neke transformacije ravni

ostavljaju invarijantnom neku tačku O te ravni mogu se obično jednostavnije predstaviti u polarnom koordinatnom sistemu, ako za središte polarnog koordinatnog sistema izaberemo tačku O. Na primer, tačka (r,θ) preslikava se u tačku (vidi Sliku 27)

$(r, \theta + \alpha)$	rotacijom, $\mathcal{R}_{O,\alpha}$,
$(r, \theta + \pi)$	centralnom simetrijom, $\mathcal{C}_O$,
$(r, -\theta)$	refleksijom u odnosu na pravu x_1, $\mathcal{S}_0$,

$(r, 2\,\alpha-\theta)$	refleksijom u odnosu na pravu $\theta=\alpha$, $\mathcal{S}_\alpha$,
$(\mu r,\,\theta)$	homotetijom, $\mathcal{H}_{O,\mu}$,
$(k^2/r,\,\theta)$	inverzijom u odnosu na krug $r=k$, $\mathcal{I}_k$, .

Stoga polarne kordinate mogu pomoći da se jednostavnije dođe do formula tih geometrijskih transformacija u Dekartovim koordinatama. Na primer, rotacija $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ (Slika 27) kojom se tačka sa koordinatama (x_1,x_2) preslikava u $(\bar x_1,\bar x_2)$ zadata je izrazima

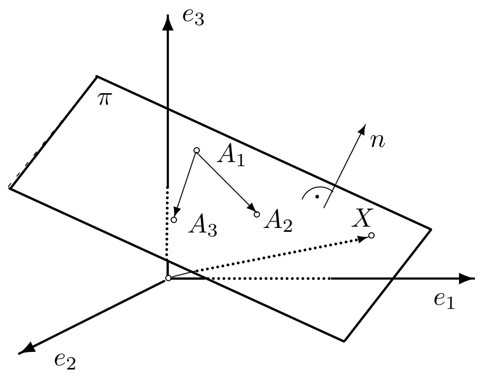
$$\bar x_1 = r\cos(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha) = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,$$

$$\bar x_2 = r\sin(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\cos\alpha) = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha.$$

Ovo pokazuje da su polarne koordinate posebno pogodne za opisivanje pojava sa rotacionim, kružnim kretanjima, simetrijama, tj. sa geometrijskim transformacijama i kretanjima u čijoj je osnovi krug.

11. Linearna analitička geometrija prostora

2.30. Ravan i prava u prostoru. Neka je dat Dekartov pravougli koordinatni sistem (O,e_1,e_2,e_3) u prostoru $\mathbb{E}^3$, i ravan π. Prema Euklidovim aksiomama svaka ravan jednoznačno je određena sa svoje tri nekolinearne tačke A_1, A_2 i A_3, koje određuju i vektore $s_1 = \mathbf{A_1A_2}$ i $s_2 = \mathbf{A_1A_2}$. Vektorski prostor $\overrightarrow{\pi} = \mathcal{L}(s_1,s_2)$ zove se pravac ravni π. Dakle, pravac ravni π sastoji se iz beskonačnog broja paralelnih ravni. Da bismo odabrali jednu od njih npr. π, potrebno je da izaberemo još jednu njenu tačku, recimo A_1. Dakle, na jeziku vektora ravan je jednoznačno određena svojim pravcem (dvodimenzioni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$), i jednom svojom tačkom A_1. Primetimo da će tačka $X\in\mathbb{E}^3$ pripadati ravni π akko su vektori $\mathbf{A_1X}, s_1$ i s_2 koplanarni (linearno zavisni), tj.



Slika 28. Ravan

$$(40)\quad X\in\mathbb{E}^3 \iff \mathbf{A_1X} = \lambda_1\, s_1 + \lambda_2\, s_2$$

za neke $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Dakle, (40) predstavlja parametarsku jednačinu prave u vektorskom obliku. Brojevi λ_1 su parametri i svakom uređenom paru $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka ravni π. Jednačinu (40) sada možemo napisati i koordinatno. Neka su date koordinate tačaka

$$A_1=(y_1,y_2,y_3),\quad A_2=(z_1,z_2,z_3),\quad A_3=(w_1,w_2,w_3),\quad X=(x_1,x_2,x_3)$$

$$\text{tada je}\quad s_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(z_1-y_1,z_2-y_2,z_3-y_3),$$

$$(41)\qquad s_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(w_1-y_1,w_2-y_2,w_3-y_3),$$

$$\mathbf{A_1X}=(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3.)$$

Sada dobijamo parametarsku jednačinu ravni,

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda_1\,\xi_1 + \lambda_2\,\eta_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda_1\,\xi_2 + \lambda_2\,\eta_2 \\ x_3 - y_3 &= \lambda_1\,\xi_3 + \lambda_2\,\eta_3 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda_1\,\xi_1 + \lambda_2\,\eta_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda_1\,\xi_2 + \lambda_2\,\eta_2 \\ x_3 &= y_3 + \lambda_1\,\xi_3 + \lambda_2\,\eta_3 \end{aligned} \tag{42}$$

Prethodno izvođenje parametarskih jednačina ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$ može se direktno uopštiti na slučaj proizvoljne $k-$dimenzione ravni u $\mathbb{E}^m$, $1 \leq k < m$. Dakle, ako je π neka $k-$dimenziona ravni u $\mathbb{E}^m$, tada je ona određena svojim pravcem $\overrightarrow{\pi}$, i jednom svojom tačkom $A_1 \in \pi$. Pravac $\overrightarrow{\pi}$, $k-$ ravni π je vektorski prostor dimenzije k, čija se neka baza sastoji od k linearno nezavisnih vektora $s_1, s_2, \dots, s_k$. Prema tome, možemo pisati $\pi = A_1 + \overrightarrow{\pi} = A_1 + \mathcal{L}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Jasno, tačka $X \in \mathbb{E}^m$ pripada ravni π akko su vektori $\mathbf{A_1X}, s_1, s_2, \dots, s_k$ linearno zavisni, tj.

$$X \in \mathbb{E}^m \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{A_1X} = \lambda_1\,s_1 + \lambda_2\,s_2 + \cdots \lambda_k\,s_k \quad , \tag{43}$$

za neke parametre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Sada analogno slučaju ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$ možemo vektorsku jednačinu (43) raspisati po koordinatama, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

Opšta jednačina ravni. Jednačinu ravni π možemo izvesti ako znamo jednu njenu tačku $A_1 = (y_1, y_2, y_3)$ i njen vektor normale $n = (a_1, a_2, a_3)$. Postupak je potpuno analogan izvođenju jednačine prave l u ravni, koja je određena jednom svojom tačkom A_1 i svojim vektorom normale n, vidi **2.24**. Tako da formula (32), u slučaju ravni u prostoru prima oblik,

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + b = 0, \tag{44}$$

pri čemu je $b = -\,a_1\,y_1 - a_2\,y_2 - a_3\,y_3$. Jednačinu (44) nazivamo opšta jednačina ravni. Primetimo da opštu jednačinu ravni možemo predstaviti i u vektorskom obliku,

$$0 = (\mathbf{OX} - \mathbf{OA_1}) \cdot n = \mathbf{OX} \cdot n + b = 0 \qquad \text{gde je } b = -\mathbf{OA_1} \cdot n, \text{ konstanta.}$$

Prethodna jednačina ravni zove se opšta jednačina jer se svaka ravan u nekom datom Dekartovom sistemu opisuje jednačinom oblika (44).

Postavlja se pitanje kako da iz parametarske jednačine ravni (42) eliminišemo parametre i dobijemo opštu jednačinu ravni. Da bismo to uradili dovoljno je primetiti da su vektori $\mathbf{OA_1}$, s_1 i s_2 linearno zavisni, pa je zapremina paralelepipeda određenog njima jednaka 0[41]. Ako su nam koordinate vektora $\mathbf{OA_1}$, s_1 i s_2 dati sa (41) tada imamo da je

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{OA_1}, s_1, s_2] &= \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \\ z_1 - y_1 & z_2 - y_2 & z_3 - y_3 \\ w_1 - y_1 & w_2 - y_2 & w_3 - y_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + b\,. \end{aligned} \tag{45}$$

[41] jer ovaj paralelepiped nema visinu.

gde je

$$a_1 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \quad b = -(a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + a_3\, y_3).$$

Kao i kod jednačine prave u ravni, uvedimo sledeće oznake koje sugerišu sa kojim je elementima određena neka ravan π: $\pi(A_1, A_2, A_3)$(sa svoje tri nekolinearne tačke), $\pi(A_1, n)$(svojom tačkom i vektorom normale) ili $\pi(A_1, s_1, s_2)$(svojom tačkom i dva nekolinearna vektora(bazom svog pravca)).

Jednačina prave u prostoru. Jednačinu prave l možemo izvesti ako znamo jednu njenu tačku $A_1 = (y_1, y_2, y_3)$ i njen vektor pravca $l = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Postupak je potpuno analogan izvođenju jednačine prave l u ravni, koja je određena jednom svojom tačkom A_1 i svojim vektorom pravca l, vidi **2.24**. Tako da jednačine (46), u slučaju prostoru primaju oblik,

$$\text{(46)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda\, \xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda\, \xi_2 \\ x_3 &= y_3 + \lambda\, \xi_3 \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \lambda = \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}\,.$$

Poslednji zapis[42] parametarskih jednačina prave zove se i kanonski oblik jednačine prave u prostoru.

2.31. Mimoilazne prave. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u prostoru mogu biti u jednom od četri položaja:

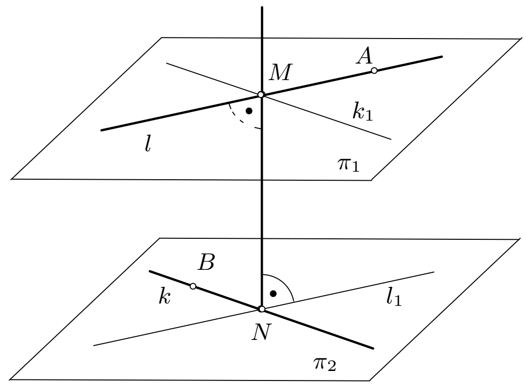
(po) podudaraju se,
(pa) paralelne su i ne seku se,
(s) seku se,
(m) mimoilazne su, tj. ne seku se i nisu paralelne.

Poslednji slučaj, slučaj mimoilaznih pravih je najinteresantniji. Mimoilazne prave imaju sledeću osobinu.

Propozicija. *Neka su l i k dve mimoilazne prave. Tada postoji tačno jedna prava koja ih seče i normalna je na njih. Pomenutu jedinstvenu pravu nazivamo zajednička normala pravih l i k.*

[42] Radi se samo o zapisu u obliku razlomka, jer neki od imenilaca može biti jednak i 0.

Dokaz. Neka su prave $l = l(A,u)$ i $k = k(B,v)$ određene svojim vektorima pravca i tačkom. Tada su određene i dve paralelne ravni $\pi_1 = \pi_1(A,u,v)$ i $\pi_2 = \pi_2(B,u,v)$, od kojih prva sadrži pravu l i sa pravom k nema zajedničkih tačaka, a druga sadrži pravu k i sa pravom l nema zajedničkih tačaka. Posmatrajmo sada ortogonalne projekcije, $pr_1 : l \longrightarrow \pi_2$ i $pr_2 : k \longrightarrow \pi_1$. Neka su $l_1 = pr_1(l) \subseteq \pi_2$ i $k_1 = pr_1(k) \subseteq \pi_1$ prave koje su slike polaznih pravih l i k pri ovim ortogonalnim projekcijama. Kako prave l i k nemaju proporcionalne vektore pravca, neće ih imati niti prave l_1 i k_1, tako da zaključujeno da se prave l i k_1, odnosno k i l_1 seku. Obeležimo sa M i N redom tačke preseka pravih l i k_1 odnosno k i l_1, tada prava određena tačkama M i N ima sve tražene osobine, dakle ona je zajednička normala pravih l i k. □

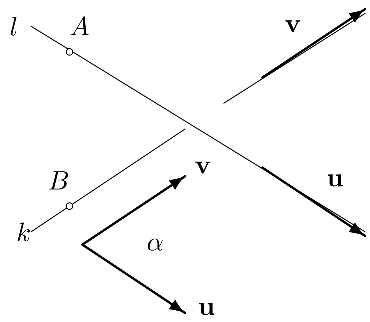


Slika 29. Zajednička normala mimoilaznih pravih

Postojanje zajedničke normale može se utvrditi i analitičkom (koordinatnom) metodom rešavanjem odgovarajućeg sistema linearnih jednačina.

2.32. Uglovi između pravih i ravni. Ugao je jedan od osnovnih pojmova u geometriji. Podsetimo se prvo definicija ugla između pravih, između prave i ravni, i na kraju ugla između dve ravni. Određivanje ovih uglova svodimo na određivanje uglova između nekih vektora kojima su prave ili ravni određene. Postavlja se pitanje kako da izračunamo pomenute uglove iz poznatih jednačina pravih i ravni.

Ugao između pravih. Neka su prave $l = l(A,u)$ i $k = k(B,v)$ određene svojim vektorima pravca i tačkom, (Slika 30). Ugao α je neorijentisani ugao između pravih l i k, $\alpha = \angle(l,k) \in [0, \pi/2]$. Tako da je



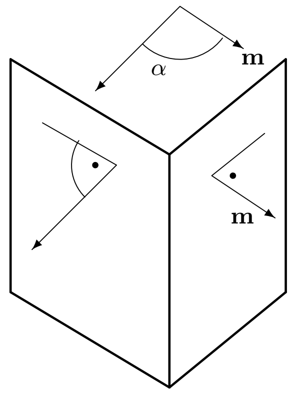
Slika 30. Ugao između pravih

(47)
$$\cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\,\|v\|} \quad \text{ili u koordinatama} \quad \cos\alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}},$$

pri čemu je $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Ugao između dve ravni. Neka su date ravni π i σ, koje se seku i ravan τ koja je normalna na presečnu pravu ravni π i σ. Neka su l i k presečne prave ravni τ sa π i σ redom. Tada pod uglom α između ravni l i k podrazumevamo ugao

$$\angle(\sigma, \tau) = \angle(l, k).$$



Slika 31. Ugao između ravni

Neka su date ravni $\pi = \pi(A, n)$ i $\sigma = \sigma(B, n)$ redom svojim jednačinama:

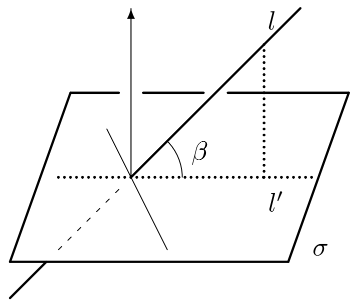
$$r \cdot n + b_1 = 0 \quad \text{i} \quad r \cdot m + b_2 = 0,$$

(Slika 31). Tada je $\gamma = \angle(\pi, \sigma) \in [0, \pi/2]$, neorijentisani ugao između dve ravni, ako je

$$\cos\gamma = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\,\|n_2\|} \quad \text{ili u koordinatama} \quad \frac{|n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\,\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}\,.$$

Ugao između prave i ravni. Posmatrajmo sada pravu $l = l(A, s)$ i ravan $\pi = \pi(B, n)$ zadatu jednačinom $r \cdot n + b = 0$, (Slika 32). Neorijentisani ugao između prave i ravni definišemo na sledeći način

$$\angle(l, \pi) = \min_{k \subset \pi} \angle(l, k).$$



Slika 32. Ugao između prave i ravni

Važi sledeća Propozicija, koja daje i praktični algoritam za izračunavanje ugla između prave i ravni i koju navodimo bez dokaza.

Propozicija. *Neka je l' normalna projekcija prave l na ravan π tada je*

$$\angle(l, \pi) = \angle(l, l')\,.$$

Sada $\beta = \angle(l, \pi) \in [0, \pi/2]$, možemo izračunati koristeći jednačinu ravni i prave,

$$\sin\beta = \frac{|s \cdot n|}{\|s\|\,\|n\|} \quad \text{ili u koordinatama} \quad \sin\beta = \frac{|\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2 + \xi_3 n_3|}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\,\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\,.$$

2.33. Rastojanje tačke i ravni. U svakom euklidskom prostoru $\mathbb{E}^n$ rastojanje između tačaka A i B dato je sa $dis(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$, tako da možemo primeniti koncept opisan u tački **2.26**: *Rastojanje tačke i prave u ravni.*

Iz dokaza Propozicije 1. u **2.26**, jasno je da važi sledeće analogno tvrđenje, Slika 22.

Propozicija 1. *(1) Neka je data tačka A i ravan π i neka je B podnožje normale iz A na ravan π i neka je C proizvoljna druga tačka sa te prave. Tada je*

$$dis(A,B) \leq dis(A,C), \quad \text{odnosno} \quad dis(A,\pi) = \|\mathbf{AB}\|.$$

(2) Ako je $A = (y_1, y_2, y_3)$ i $\pi \ldots\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b = 0$, tada je

$$dis(A,\pi) = dis(A,B) = \frac{|\, a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b \,|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\,.$$

2.34. Rastojanja tačke i prave u prostoru. I u ovom slučaju primenjujemo koncept rastojanja između dva podskupa euklidskog prostora uveden u tački **2.26.** Sada ga samo primenimo na tačku A i pravu $l = l(B,s)$.

Propozicija 1. *Rastojanje tačke A i prave l dato je sa*

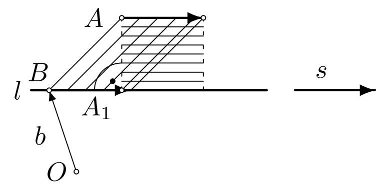
$$d(A,l) = \frac{1}{\|s\|}\big\|(a-b) \times s\big\|\,,$$

pri čemu su $a = \mathbf{OA}$ i $b = \mathbf{OB}$ vektori položaja tačaka A i B.

Dokaz. Posmatrajmo paralelogram čije su strane određene vektorima $\mathbf{BA}$ i s (Slika 33). Njegovu površinu, $\mathcal{P}$, izražavamo na sledeća dva načina:

$$\mathcal{P} = d(A,l)\,\|s\| \quad \text{i} \quad \mathcal{P} = \|((a-b) \times s\|, \tag{48}$$

na osnovu definicije površine paralelograma i definicije vektorskog proizvoda. Iz ovih jednakosti sledi rezultat. □



Slika 33. Rastojanje tačke i prave u prostoru

Ako su tačke A, B i vektor s dati redom svojim Dekartovim koordinatama $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda formula (48) u razvijenom obliku postaje

$$d(A,l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_3 - b_3 \\ \xi_1 & \xi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\,.$$

2.35. Rastojanje između pravih. U tački **2.31**: *Mimoilazne prave*, opisali smo četiri moguća položaja u kojima mogu biti dve prave u prostoru. Ako se prave seku ili se podudaraju onda je, jasno, njihovo međusobno rastojanje jednako 0. Ako su prave paralelne i ne seku se, tada je njihovo međusobno rastojanje jednako rastojanju između presečnih tačaka pravih i ravni koja je normalna na obe prave. Tako da nam preostaje slučaj mimolilaznih pravih. U dokazu Propozicije 1, **2.31**, dokazali smo egzistenciju zajedničke normale mimoilaznih pravih l i k, što nam je od velike pomoći i u dokazu sledeće propozicije.

Propozicija 1. *Neka su l i k mimoilazne prave i tačke $M \in l$ i $N \in k$ takve da je prava MN zajednička normala pravih l i k. Za proizvoljne tačke $X \in l$ i $Y \in k$ je*

$$\|\mathbf{MN}\| \leq \|\mathbf{XY}\|, \quad \textit{odnosno}, \quad dis(l,k) = \inf_{X \in l, Y \in k} dis(X,Y) = \|\mathbf{MN}\|.$$

Dokaz. Kako je $\mathbf{MN}$ upravno na $\mathbf{XM}$ i $\mathbf{YN}$ to je

$$\|\mathbf{XY}\|^2 = \langle \mathbf{XY}, \mathbf{XY} \rangle = \langle \mathbf{XM} + \mathbf{NY} + \mathbf{MN}, \mathbf{XM} + \mathbf{NY} + \mathbf{MN} \rangle = \|\mathbf{XM} + \mathbf{NY}\|^2 + \|\mathbf{MN}\|^2,$$

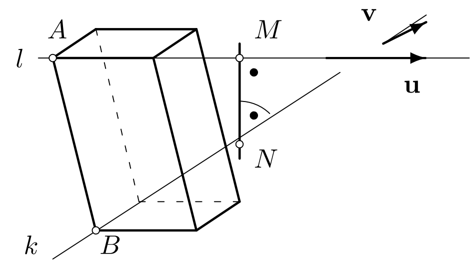
te je $\qquad \|\mathbf{XY}\|^2 \geq \|\mathbf{MN}\|^2,$

a to je i trebalo pokazati. □

Iz prethodne propozicije[43] možemo zaključiti da je rastojanje između mimoilaznih pravih zapravo jednako rastojanju između paralelnih ravni u kojima se nalazi po jedna od pravih l i k. Tako da se rastojanje mimoilaznih pravih svodi na rastojanje presečnih tačaka paralelnih ravni sa nekon pravom normalnom na te dve ravni. U sledećoj propoziciji dajemo rastojanje u funkciji parametara kojima su date prave l i k bez računanja konkretnih tačaka preseka.

Propozicija 2. *Neka su date prave $l = l(A, u)$ i $k = k(B, v)$ jednom svojom tačkom i vekorom pravca. Tada je rastojanje između mimoilaznih pravih l i k dato formulom*

$$d(l,k) = \frac{\big|[\mathbf{AB}, u, v]\big|}{\|u \times v\|}. \tag{49}$$



Slika 34. Rastojanje izmedju l i k

Dokaz. Posmatrajmo paralelepiped određen vektorima $\mathbf{AB}$, u i v. Koristeći geometrijsku interpretaciju mešovitog proizvoda (čija apsolutna vrednost je jednaka zapremini paralelepipeda razapetog sa ta tri vektora, njegova zapremina je $V = |[\mathbf{AB}, u, v]|$. Ako izaberemo bazu paralelepipeda razapetu vektorima u i v, površine B, to je zapremina $V = B \cdot d(l,k) = d(l,k) \cdot \|u \times v\|$, zbog definicije vektorskog proizvoda. Odavde sledi tražena formula. □

Posledica ovog dokaza je da $[\mathbf{AB}, u, v]$ ne zavisi od izbora tačaka A i B pravih l i k redom.

Ako su a i b vektori položaja tačaka A i B onda se (49) zapisuje u obliku

$$d(l,k) = \frac{\big|[b-a, u, v]\big|}{\|u \times v\|}.$$

Konačno formulu (49) možemo izraziti u koordinatama polaznih elemenata. Ako su prave l i k određene jednačinama,

$$l: \quad \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}, \qquad k: \quad \frac{x_1 - b_1}{v_1} = \frac{x_2 - b_2}{v_2} = \frac{x_3 - b_3}{v_3},$$

[43] ali već i iz dokaza Propozicije 1, **2.31.**

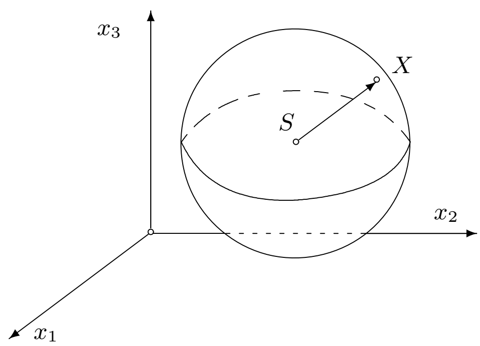
onda je

$$
(50) \qquad d(l,k) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2}}.
$$

2.36. Jednačina sfere. Kao što nam je poznato sfera je skup tačaka prostora, $\mathbb{E}^3$, koje su jednako udaljene od jedne tačke S, koju nazivamo središtem ili centrom sfere (Slika 35).

Budući da je rastojanje $dis(X,S)$ između bilo koje dve tačke $X(x_1,x_2,x_3)$ i $S(s_1,s_2,s_3)$ jednako intenzitetu vektora $\mathbf{XS}$, biće

$$
\begin{aligned}
dis^2(X,S) &= \|\mathbf{XS}\|^2 = \delta_{ij}(x_i - s_i)(x_j - s_j) \\
&= (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2.
\end{aligned}
$$



Slika 35. Jednačina sfere

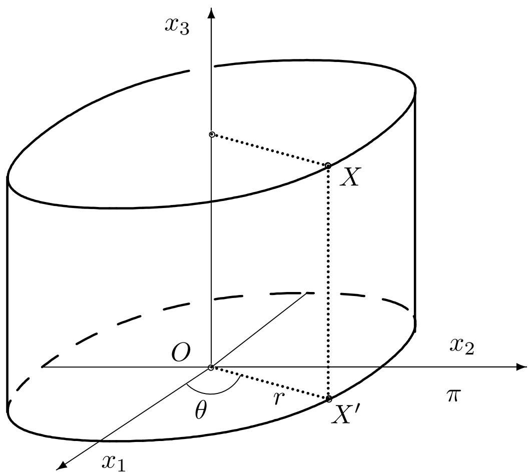
Stoga je jednačina sfere sa središtem u tački S i poluprečnika r,

$$
(51) \qquad (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 = r^2.
$$

12. Koordinatni sistemi u prostoru

2.37. Cilindrični (cilindarski) i sferni koordinatni sistem. Sve ono što je rečeno o suštini koordinatnog sistema u ravni važi i za prostor, samo što je u prostoru situacija malo komplikovanija jer imamo posla sa jednom dimenzijom više. Dakle, koordinatni sistem u $\mathbb{E}^3$ je uređena četvorka (U_1, U_2, U_3, f), pri čemu je $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow U_1 \times U_2 \times U_3$, bijekcija (ili "skoro bijekcija"), a U_1, U_2 U_3 su intervali u $\mathbb{R}$. Sledeći koordinatni sistem po jednostavnosti, nakon Dekartovog, je cilindrični (cilindarski) koordinatni sistem, koji je dobijen iz polarnog sistema dodavanjem jedne dimenzije. Sistem je dobio ime po jednoj od klasa koordinatnih površi, koje su cilindri.

Definišimo sada cilindrični koordinatni sistem. Prvo izaberemo tačku O koja je koordinatni početak, i osu x_1 koja sadrži tačku O, a zatim osu x_3 koja je normalna na osu x_1 i sadrži tač-



Slika 36. Cilindrične koordinate

ku O (vidi Sliku 36). U ravni, π, kojoj je vektor normale jednak vektoru pravca ose x_3 uvedemo polarne koordinate. Tada je svaka tačka X, prostora $\mathbb{E}^3$ jednoznačno određena uređenom trojkom (r, θ, x_3) pri čemu je r rastojanje ortogonalne projekcije, X', tačke X na ravan π do tačke O; ugao θ je ugao koji zaklapaju jedinični vektor e_1 ose x_1 i vektor $\mathbf{OX'}$; a x_3 je rastojanje tačke X do ravni π, tj. $\|XX'\|$. Uređena trojka (r, θ, x_3) zove se **cilindarskim ili cilindričnim koordinatama** tačke X. Primetimo da je u ovom slučaju $U_1 = [\,0, +\infty)$, $U_2 = [\,0, 2\,\pi)$ i $U_3 = (-\infty, +\infty)$, i da za sve tačke x_3 ose nije dobro definisan ugao θ, jer je njihova projekcija na ravan π koordinatni početak, a za tu tačku nije definisan ugao θ.

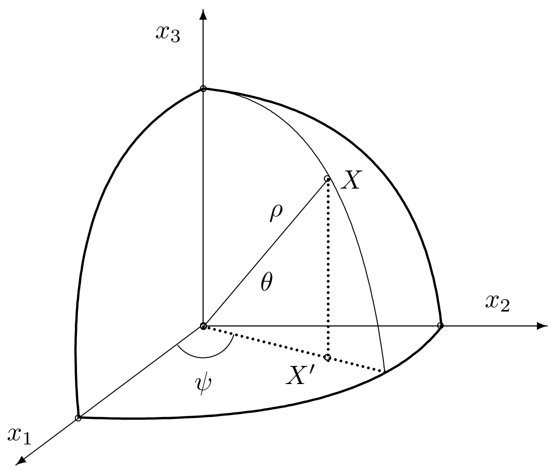
Sada lako nalazimo veze između koordinata neke tačke u Dekartovom i cilindarskom sistemu, koji su postavljeni tako da imaju isti koordinatni početak, tačku O, i da im se ose x_1 i x_3 podudaraju. Ako tačka X ima koordinate (x_1, x_2, x_3) u pravouglom Dekartovom sistemu onda su njene koordinate u cilindarskom sistemu, za $x_1 \neq 0$, date formulama:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{x_2}{x_1}, \qquad x_3 = x_3. \tag{52}$$

Obratno ako tačka X ima cilindarske koordinate (r, θ, x_3) onda su njene Dekartove koordinate određene jednoznačno, tj. date su formulama:

$$x_1 = r\,\cos\theta, \qquad x_2 = r\,\sin\theta, \qquad x_3 = x_3. \tag{53}$$

Sferni koordinatni sistem. Koordinatni sistem koji je prilagođen geometriji sfere zove se **sferni koordinatni sistem**. Analogno kao i polarni koordinatni sistem sferni sistem definišemo istim izborom elemenata koordinatnog sistema, tj. koordinatnog početka i osa x_1 i x_3. Tada je svaka tačka X prostora $\mathbb{E}^3$ jednoznačno određena uređenom trojkom (ϱ, θ, ψ) gde je ϱ rastojanje tačke X do koordinatnog početka, uglom $\theta \in [\,-\pi/2, \pi/2\,]$ koji vektor $\mathbf{OX}$ zaklapa sa svojom normalnom projekcijom $\mathbf{OX'}$ na koordinatnu ravan Ox_1x_2, i uglom $\psi \in (\,-\pi, \pi\,]$ koji vektor $\mathbf{OX'}$ zaklapa sa x_1 osom (Slika 37). Uređena trojka (ϱ, θ, ψ) zove se **sferne koordinate** tačke X. Tačku O zovemo **središtem sfernog koordinatnog sistema**, a uglove θ i ψ, redom, **Eulerovom sfernom širinom i dužinom**. Za tačku O nisu definisani uglovi θ i ψ.



Slika 37. Sferni koordinatni sistem

Sada lako nalazimo veze između koordinata neke tačke u Dekartovom i sfernom sistemu, koji su postavljeni tako da imaju isti koordinatni početak, tačku O, i da im se ose x_1 i x_3 podudaraju. Ako tačka X ima koordinate (ϱ, θ, ψ) u sfernom sistemu onda su njene koordinate u Dekartovom date formulama:

$$x_1 = \varrho\,\cos\theta\,\cos\psi, \qquad x_2 = \varrho\,\cos\theta\,\sin\psi, \qquad x_3 = \varrho\,\sin\theta. \tag{54}$$

Obratno ako tačka X ima Dekartove koordinate (x_1, x_2, x_3) onda su njene sferne koordinate, ako je $x_1 \neq 0$, određene sa:

$$\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \tag{55}$$

Dakle, ako je u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu neka površ zadata jednačinom $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, tada se jednačina te površi u sfernim koordinatama dobija zamenama datim relacijama (54).

Na primer, Dekartova jednačina, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, jedinične sfere sa središtem O, u sfernim koordinatama je jednostavnija jer iz

$$(\varrho \cos\theta \cos\psi)^2 + (\varrho \cos\theta \sin\psi)^2 + (\varrho \sin\theta)^2 = 1 \quad \text{odakle je} \quad \varrho = 1.$$

13. Konusni preseci

2.37. Konusni preseci. Neka su u prostoru date dve različite prave i i s koje se nalaze u istoj ravni. Tada se one mogu seći u jednoj tački O ili mogu biti paralelene. Posmatrajmo skup, $\mathcal{K}$, svih slika tačaka prave i pri rotacijama sa osom s. U slučaju kada se prave i i s seku u jednoj tački O, $\mathcal{K}$, je prav kružni konus, a u slučaju kada se prave i i s ne seku, $\mathcal{K}$, je prav kružni cilindar. Kada je $\mathcal{K}$ konus tačku O zvaćemo temenom tog konusa, pravu s njegovom osom, a slike prave i u rotacijama oko prave s, njegovim izvodnicama. Presek proizvoljne ravni Ω i konusa $\mathcal{K}$ nazivamo konusnim presekom. Ako je ravan Ω normalna na s i ne sadrži tačku O, konusni presek je krug. Lako se dokazuje da postoji sfera koja dodiruje konus u tačkama toga kruga. Za takvu sferu kažemo da je upisana u konus.

Ako ravan Ω sadrži O, njen presek sa konusom može da bude ili samo tačka O, ili jedna izvodnice (prava), ili dve izvodnice tog konusa. U generičkom slučaju kada ravan Ω ne sadrži O i nije normalna na s, konusni presek nazivamo konikom. Ostale konusne preseke ćemo zvati i degenerisanim konikama.

2.38. Ekscentricitet konike. Dokažimo najpre teoremu kojom se karakterišu konike.

Teorema 1. *Za svaku koniku $\mathcal{K}$ u ravni Ω postoji tačka F i prava d takva da je odnos rastojanja proizvoljne tačke konike $\mathcal{K}$ do F i do d konstantan.*

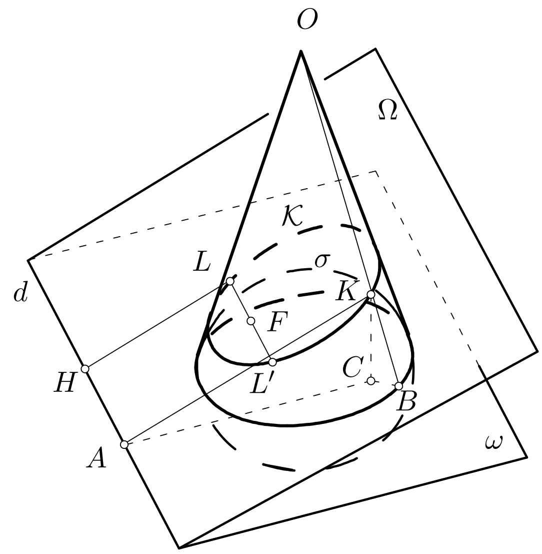
Dokaz. Neka je σ jedna od sfera upisanih (Dandelinove sfere) u dati konus koja dodiruje ravan Ω u tački F (Slika 38), i neka je ω ravan kojoj pripada krug dodira k konusa i sfere σ. Neka je zatim, prava d presek ravni Ω i ω, K proizvoljna tačka konike $\mathcal{K}$, A podnožje normale iz K na pravu d, B presek izvodnice OK i ravni ω, i C podnožje normale iz K na ravan ω. Ako obeležimo sa α ugao koji zaklapaju ravni ω i Ω, a sa β ugao koji grade prava KB i ravan ω, biće

$$KB = \frac{KC}{\sin\beta}, \quad \text{i} \quad KA = \frac{KC}{\sin\alpha}.$$

Kako su tangentne duži KB i KF iz tačke K na sferu σ, međusobno podudarne, biće

$$\frac{KF}{KA} = \frac{KB}{KA} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = e. \tag{56}$$

Time je teorema dokazana. □



Slika 38. Ekscentricitet konike

Primedba. Važi i obrat tvrdnje iz iskaza ove teoreme, tj. skup tačaka u ravni Ω za koje je odnos rastojanja do neke tačke i prave u ravni konstantan jeste konusni presek.

Tačku F nazivamo žižom ili fokusom konike $\mathcal{K}$, pravu d njenom vodiljom ili direktrisom. Odnos e, rastojanja bilo koje tačke konike od fokusa i direktrise zvaćemo ekscentricitetom te konike.

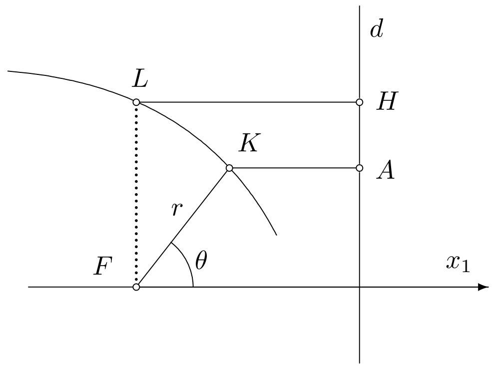
Koniku nazivamo elipsom ako je $e < 1$ $(\alpha < \beta)$, hiperbolom ako je $e > 1$ $(\alpha > \beta)$, a parabolom ako je $e = 1$ $(\alpha = \beta)$.

2.39. Jednačine konika. Izvedimo sada jednačinu konusnog preseka u polarnom koordinatnom sistemu koristeći ekscentricitet e i dužinu tetive paralelne sa direktrisom kroz fokus (Slika 39).

Tetiva LL' konike kroz fokus, paralelna direktrisi naziva se latus rectum, i njenu dužinu označimo sa $2\,l$. Tada je

$$l = FL = e\,LH,$$

gde je H podnožje normale iz L na d. U polarnom koordinatnom sistemu kome je središte F, a osa prava x_1 koja sadrži F i normalna je na direktrisu d (koja je desno od tačke F (kao na Slici 39)), za tačku K sa iste strane prave d kao i fokus F biće



Slika 39. Polarna jednačina konike

$$r = FK = e\,KA = e\,(LH - r\cos\theta) = l - e\,r\cos\theta, \tag{57}$$

pa je

$$r\,(1 + e\cos\theta) = l \qquad \text{ili za } 1 + e\cos\theta \neq 0\,, \qquad r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \tag{58}$$

polarna jednačina konike $\mathcal{K}$.

Izvedimo sada jednačine konika u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji je centar u fokusu a osa x_1 normalna na direktrisu (Slika 39).
Kvadriranjem leve i desne strane jednačine (57) dobija se jednačina konike u Dekartovim koordinatama

$$x_1^2 + x_2^2 = (l - e\,x_1)^2. \tag{59}$$

Primetimo da na osnovu ove jednačine možemo da zaključimo da krug može biti shvaćen i kao elipsa kojoj je $e = 0$.

Ako je $e \neq 1$, deljenjem sa $1-e^2$ leve i desne strane jednačine (59) i zamenom $l/(1-e^2)$ sa a, dobija se da je

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = l\,a - 2\,e\,a\,x_1, \qquad \text{pa je stoga,} \qquad (x_1 + e\,a)^2 + \frac{a}{l}\,x_2^2 = (l + e^2\,a)\,a = a^2,$$

tj.

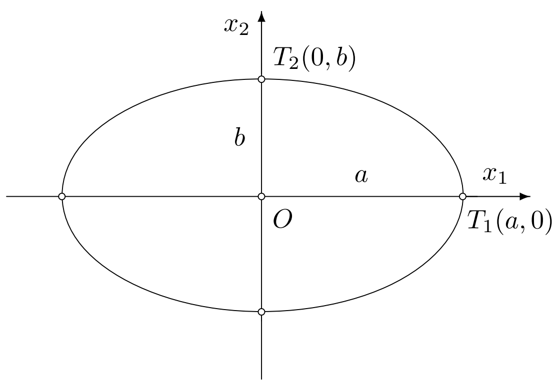
$$\frac{(x_1 + e\,a)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{l\,a} = 1.$$

Translacijom koordinatnog početka u tačku $(-\,e\,a, 0)$ iz prethodne jednačine dobijamo jednačinu

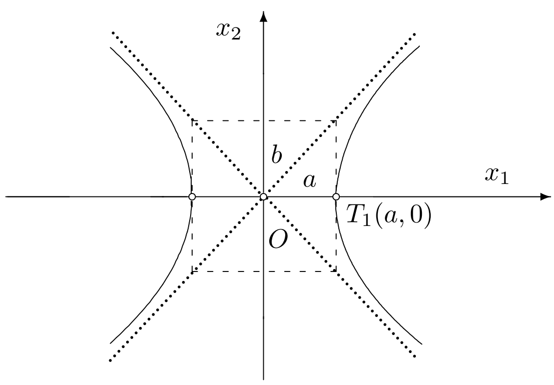
$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \tag{60}$$

gde je $b^2 = |l\,a| = |1 - e^2|\,a^2$, tako da je $l\,a = \pm\,b^2$ pri čemu se bira znak $+$ ili $-$ u zavisnosti od toga da li je $e < 1$ ili $e > 1$.

Veličine a i b se nazivaju poluosama elipse i hiperbole, i njihovo geometrijsko značenje sugerisano je Slikama 40 i 41.



Slika 40. Elipsa



Slika 41. Hiperbola

Dve grane hiperbole $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$, pripadaju paru unakrsnih uglova određenih pravama zadatim jednačinom

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 0.$$

Dve prave,

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0,$$

nazivamo asimptotama hiperbole (Slika 41).

Ako je $e = 1$ tada se jednačina (58) svodi na

$$x_2^2 = 2\,l\left(\frac{l}{2} - x_1\right),$$

pa se refleksijom u odnosu na pravu $x_1 = l/4$, iz nje dobija standardna jednačina parabole (Slika 42)

$$x_2^2 = 2\,l\,x_1. \tag{61}$$

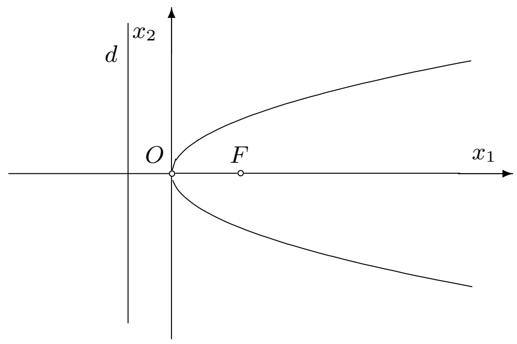
Jednačine (60) i (61) nazivamo i kanonskim jednačinama konika.

Ističemo i najjednostavnije parametarske jednačine konika:

elipse: $x_1 = a\cos t,\quad x_2 = b\sin t,\ t \in [\,0, 2\,\pi\,)$;

parabole: $x_1 = 2\,l\,t^2,\quad x_2 = 2\,l\,t,\ t \in \mathbb{R}$;

hiperbole: $x_1 = a\,\cosh t,\ x_2 = b\,\sinh t,\ t \in \mathbb{R}$.



Slika 42. Parabola

Kretanje planeta. U astronomiji je poznato da je putanja planete u polarnom koordinatnom sistemu, $r = f(\theta)$, određena diferencijalnom jednačinom

$$f^{-1} + \frac{d^2(f^{-1})}{d\,\theta^2} = \text{konst}\,.$$

Rešavanjem jednačine dobija se $f^{-1} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta + \gamma$, odnosno promenom polarne ose,

$$f(\theta) = \frac{1}{\alpha\cos\theta + \gamma}\,.$$

Dakle, putanje planeta, kometa i asteroida su u prvoj aproksimaciji konike u čijem se jednom fokusu nalazi sunce.

2.40. Osnovna geometrijska svojstva konika. Analizirajmo sada jednačine konike u polarnom i Dekartovom koordinatnom sistemu, kako bismo analizom tih jednačina dobili neka važna geometrijska svojstva konika.

Budući da se jednačina konike (58) ne menja ako θ zamenimo sa $-\theta$, konika je osno simetrična u odnosu na polarnu osu x_1. Kada je $\theta = 0$, onda je $r = l/(1+e)$, a kada je $\theta = \pi$, onda je $r = l/(1-e)$, pa konika seče x_1-osu u dvema tačkama, osim kada je $e = 1$.

Ako je $e < 1$ iz polarne jednačine konike sledi da je za sve vrednosti θ, r konačno i pozitivno pa je stoga, elipsa zatvorena kriva. Ako je $e = 1$, r je i dalje konačno i pozitivno za sve vrednosti θ osim za $\theta = \pi$. Stoga parabola nije zatvorena jer je vrednost r nedefinisana za $\theta = \pi$. Ako je $e > 1$, i kako je $r \geq 0$ vidimo da za $\cos\theta$ manji ili jednak od $-1/e$ ne postoje tačke krive (jer bi za takve tačke bilo $r < 0$), odakle zaključujemo da ni hiperbola nije zatvorena kriva. Primetimo da jednu granu hiperbole date jednačinom (58) dobijamo ako ugao θ uzima vrednosti u $[0, 2\pi) \setminus [\alpha, 2\pi - \alpha]$, gde je $\alpha = \arccos(-1/e)$.

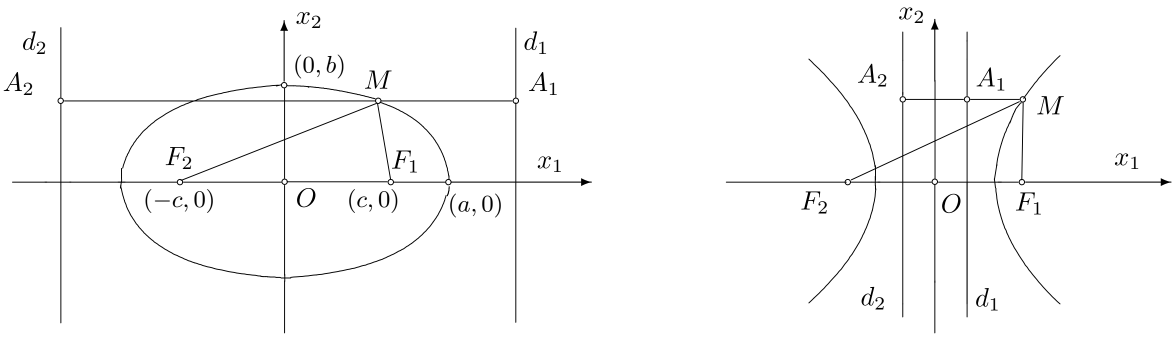
Sličnom analizom iz kanonskih jednačina konika u Dekartovom sistemu, prvo primetimo da se jednačine elipse i hiperbole neće promeniti ako promenimo znak promenljive x_1 ili x_2. Odatle sledi da su elipsa i hiperbola simetrične u odnosu na ose x_1 i x_2. Stoga se koordinatni početak naziva u ovom slučaju i centrom ili središtem konike.

2.41. Fokusne osobine konika. Budući da su elipsa i hiperbola koje su date svojim kanonskim jednačinama, simetrične u odnosu na ose x_1 i x_2, one će biti i centralnosimetrićne u odnosu na koordinatni početak. Stoga one imaju dva fokusa i dve direktrise. Kod elipse fokusi su između direktrisa, a kod hiperbole (vidi Sliku 43) direktrise su između fokusa. Ako su F_1 i d_1 fokus i direktrisa ustanovljeni Teoremom 1 iz **2.38**: *Ekscentricitet konika*, a F_2 i d_2 njihove centralno simetrične slike u odnosu na koordinatni početak, M proizvoljna tačka elipse ili hiperbole, i A_1 i A_2 podnožja normala iz M na prave d_1 i d_2, biće

$$MF_1 = e\,MA_1 \quad \text{i} \quad MF_2 = e\,MA_2,$$

(62) pa je, za elipsu $$MF_1 + MF_2 = e\,(MA_1 + MA_2) = e\,A_1A_2,$$

a za hiperbolu $$\big|MF_1 - MF_2\big| = e\,\big|MA_1 - MA_2\big| = e\,A_1A_2.$$



Slika 43. Fokusne osobine elipse i hiperbole

Time smo dokazali,

Teorema 1. *Zbir rastojanja svake tačke elipse do njenih fokusa, i apsolutna vrednost razlike rastojanja svake tačke hiperbole do njenih fokusa su konstante.*

Pokažimo kako se koristeći prethodnu teoremu mogu odrediti ekscentricitet elipse i hiperbole kao i položaj njihovih žiža iz njihovih kanonskih jednačina, tj. na osnovu njihovih poznatih poluosa.

Pretpostavimo da je $a > b$. Obeležimo sa c rastojanje fokusa elipse ili hiperbole od koordinatnog početka. Primenimo formule (62) na tačke $(a, 0)$ i $(0, b)$, gde su a i b dužina poluosa elipse. Tako dobijamo da je zbir rastojanja fokusa elipse do pomenutih tačaka

$$e\,A_1A_2 = a - c + a + c = 2\,a, \qquad e\,A_1A_2 = 2\sqrt{b^2+c^2}. \tag{63}$$

Odavde odmah sledi da je

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Podsetimo se da smo u cilju dobijanja kanonskih jednačina elipse i hiperbole translirali središte koordinatnog sistema iz fokusa u tačku $(-\,e\,a, 0)$. Stoga je tačka $(e\,a, 0)$ fokus elipse (ili hiperbole) u koordinatnom sistemu u kojem njihove jednačine imaju kanonski oblik. Dakle $(c, 0) = (e\,a, 0)$, pa je

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Na isti način dobijaju se odgovarajuće jednakosti za hiperbolu

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{i} \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Osobine ustanovljene u prethodnoj teoremi su dobro poznate karakterizacije elipse i hiperbole što se vidi iz sledeće teoreme.

Teorema 2. *Geometrijsko mesto tačaka čiji je zbir (apsolutna vrednost razlike) rastojanja od dve fiksne tačke konstantan jeste elipsa (hiperbola). Geometrijsko mesto tačaka, koje su podjednako udaljene od fiksne tačke i fiksne prave, je parabola.*

Dokaz. Dokažimo prvo da je skup svih tačaka ravni kojima je zbir (apsolutna vrednost razlike) rastojanja od dve fiksne tačke F_1 i F_2 jednaka $2\,a$, elipsa (hiperbola). Postavimo koordinatni sistem tako da je središte duži F_1F_2 koordinatni početak O, (Slika 43) da se x_1 osa poklapa sa pravom F_1F_2 i da je osa x_2 normalna na osu x_1 i sadrži tačku O. Ako tačka F_1 ima koordinate $(c, 0)$ u ovako izabranom koordinatnom sistemu onda tačka F_2 ima koordinate $(-\,c, 0)$. Neka je $X(x_1, x_2)$ tačka iz traženog skupa onda imamo,

$$\left| \sqrt{(x_1+c)^2 + x_2^2} \pm \sqrt{(x_1-c)^2 + x_2^2} \right| = 2\,a,$$

pa se odavde, jednostavnim sređivanjem, koristeći formula (63) i njihove posledice, dobijaju kanonske jednačine elipse (i hiperbole), što znači da je traženo geometrijsko mesto tačaka elipsa (ili hiperbola).

Za drugo tvrđenje izaberimo koordinatni sistem (Slika 42) tako da je osa x_1 prava, normalna na datu pravu d i sadrži tačku F, koordinatni početak neka je tačka O na osi x_1 koja je podjednako udaljena od prave d i tačke F i neka je x_2 osa prava normalna na osu x_1 koja prolazi kroz O. Ako F ima koordinate $(l/2, 0)$ u ovako izabranom koordinatnom sistemu, onda je $x_1 = -\,l/2$ jednačina prave d. Sve tačke podjednako udaljene od F i d zadovoljavaće jednačinu

$$\left(x_1 + \frac{l}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{l}{2}\right)^2 + x_2^2,$$

odakle se sređivanjem dobija kanonska jednačina parabole. □

14. Zadaci

2.41. Pokažite da je vektorski proizvod tri vektora x, y i $z \in \mathcal{V}^3$ dat formulom

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)\, y - (y \cdot z)\, x\,.$$

2.42. Koristeći formulu iz prethodnog zadatka pokažite da vektorski proizvod nije asocijativan, tj. da postoje tri vektora (nađite neke konkretne vektore) x, y i $z \in \mathcal{V}^3$ takve da je

$$(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z),$$

a zatim pokažite da važi sledeća zamena za asocijativnost:

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = \mathbf{0}\,,$$

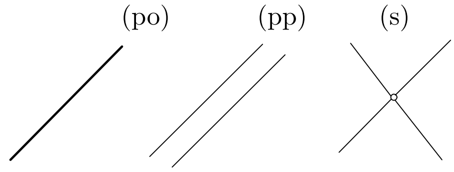
koja se zove Jacobijev identitet [44].

2.43. Odnos dve prave u ravni. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u ravni mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

(po) da se podudaraju,

(pa) da su paralelne i ne seku se,

(s) da se seku.



Slika 44. Položaj dve prave u ravni

Odrediti u kojem se od tri položaja nalaza dve prave l i k u ravni, na osnovu poznavanja njihovih jednačina:

$$l \ldots\ldots \quad a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + c_1 = 0, \qquad p \ldots\ldots \quad b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2 = 0. \tag{64}$$

Rešenje. Da bismo dali odgovor na ovo pitanje uvedimo sledeće oznake: $\tilde{n}_1 = (a_1, a_2, 0)$, $\bar{n}_1 = (a_1, a_2, c_1)$, $n_1 = (a_1, a_2)$ odnosno $\tilde{n}_2 = (b_1, b_2, 0)$, $\bar{n}_2 = (b_1, b_2, c_2)$ i $n_2 = (b_1, b_2)$. Sada lako zaključujemo:

(po) $l = p$ akko su vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ proporcionalni, tj. ako je $\bar{n}_1 = \lambda\, \bar{n}_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

(pa) $l \parallel p$ akko su vektori n_1 i n_2 proporcionalni, a vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ nisu proporcionalni, tj. $n_1 = \lambda\, n_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq \mathbf{0}$.

(s) $l \neq p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko vektori n_1 i n_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $\tilde{n}_1 \times \tilde{n}_2 \neq \mathbf{0}$.

2.44. Neka su date prave l i p u ravni svojim jednačinama u eksplicitnom obliku

$$l \ldots\ldots \quad x_2 = k_1\, x_1 + t_1, \qquad p \ldots\ldots \quad x_2 = k_2\, x_1 + t_2. \tag{65}$$

Odredite ugao između pravih l i k.

Rešenje. Koristeći geometrijsku interpretaciju da je $k_1 = \tan\theta_1$ i $k_2 = \tan\theta_2$, kao i činjenicu da ugao između pravih l i p mora biti u intervalu $[0, \pi/2]$, dobijamo da je

$$\tan\angle(l, p) = |\tan(\theta_2 - \theta_1)| = \left|\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1\, \tan\theta_2}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\, k_2}\right|$$

2.45. Odnos dve ravni. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve ravni mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

(po) podudaraju se,

(pa) ne seku se,

(s) seku se, ali se ne podudaraju, tada je njihov presek prava.

Odrediti u kojem se od tri položaja nalaza dve ravni π i σ ako znamo njihove opšte jednačine:

$$\pi \ldots \quad a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + c_1 = 0, \qquad \sigma \quad b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + b_2\, x_2 + c_2 = 0. \tag{66}$$

Rešenje. Ako uvedemo oznake: $\bar{n}_1 = (a_1, a_2, a_3, c_1)$, $n_1 = (a_1, a_2, a_3)$ odnosno $\bar{n}_2 = (b_1, b_2, b_3, c_2)$ i $n_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Sada lako zaključujemo:

[44] Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804–1851, nemački matematičar.

(po) $\pi = \sigma$ akko su vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ proporcionalni, tj. ako je $\bar{n}_1 = \lambda\, \bar{n}_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

(pa) $l \parallel p$ akko su vektori n_1 i n_2 proporcionalni, a vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ nisu proporcionalni, tj. $n_1 = \lambda\, n_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\bar{n}_1 \neq \mu\, \bar{n}_2 \neq \mathbf{0}$, za svaki $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$.

(s) $\pi \neq \sigma$ i $\pi \cap \sigma \neq \emptyset$ akko vektori n_1 i n_2 nisu proporcionalni, tj. ako je vektor $n = n_1 \times n_2 \neq \mathbf{0}$. Tada je $\pi \cap \sigma = p$ prava koja je određena vektorom pravca n i jednom tačkom preseka ravni π i σ koju dobijamo kao neko rešenje sistema jednačina (66).

2.46. Odnos ravni i prave u prostoru. Iz Euklidovih aksioma takođe sledi da prava l i ravan π u prostoru mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

(po) $l \subseteq \pi$, tj. prava l je podskup ravni π,

(pa) $l \cap \pi = \emptyset$, tj. l i π se ne seku,

(s) seku se u jednoj tački.

Neka su date jednačine ravni π i prave l,

$$\pi \ldots \quad a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + b = 0, \qquad l \ldots \quad \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}\,. \tag{67}$$

Dati karakterizaciju sva tri moguća položaja ravni i prave u terminima njihovih jednačina.

Rešenje. Neka je $n = (a_1, a_2, a_3)$ vektor normale ravni π i $s = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektor pravca prave l. Da bismo opisali jedan od gore pomenuta tri slučaja potrebno je ispitati presek prave l i ravni π. Evantualne tačke preseka moraju zadovoljavati obe od jednačine (67). Tako dobijamo,

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\,(y_1 + \lambda\,\xi_1) + a_2\,(y_2 + \lambda\,\xi_2) + a_3\,(y_3 + \lambda\,\xi_3) + b \\ &= \lambda\,(a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + a_3\,\xi_3) + a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + a_3\,y_3 + b. \end{aligned} \tag{68}$$

Sada iz (67) lako zaključujemo:

(po) $l \subseteq \pi$ akko za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ jednačina (67) ima rešenje, tj. ako su ispunjeni uslovi,

$$(1) \quad 0 = a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + a_3\,\xi_3 \qquad\qquad (2) \quad a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + a_3\,y_3 + b = 0.$$

Uslov (1) predstavlja normalnost vektora n i s, tj. $0 = n \cdot s$.

(pa) $l \cap \pi = \emptyset$ akko jednačina (67) nema rešenja, tj. ako su ispunjeni uslovi,

$$(1) \quad 0 = a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + a_3\,\xi_3 \qquad (2) \qquad\qquad a_1\,y_1 + a_2\,y_2 + a_3\,y_3 + b \neq 0.$$

Kao i u prethodnom slučaju (1) predstavlja normalnost vektora n i s.

(s) $l \cap \pi$ je jedna tačka akko jednačina (67) ima tačno jedno rešenja, tj. ako je $0 \neq n \cdot s = a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + a_3\,\xi_3$.

2.47. Odnos dve prave u prostoru. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u prostoru mogu biti u jednom od četri položaja:

(po) podudaraju se,

(pa) paralelne su i ne seku se,

(s) seku se,

(m) mimoilazne su, tj. ne seku se i nisu paralelne.

Neka su prave l i p date svojim jednačinama,

$$l \ldots\ldots \quad \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}\,, \qquad p \ldots\ldots \quad \frac{x_1 - z_1}{\eta_1} = \frac{x_2 - z_2}{\eta_2} = \frac{x_3 - z_3}{\eta_3}\,.$$

Dati karakterizaciju svih mogućih položaja ravni i prave u terminima njihovih jednačina.

Rešenje. Da bismo dali odgovor koji od četiri slučaja nastupa potrebno je opisati presek ove dve prave, tj. naći rešenje sistema(u λ i μ) jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda\,\xi_1 = z_1 + \mu\,\eta_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda\,\xi_2 = z_2 + \mu\,\eta_2 \\ x_3 &= y_3 + \lambda\,\xi_3 = z_3 + \mu\,\eta_3 \end{aligned} \qquad \text{ili ekvivalentno} \qquad \begin{aligned} \lambda\,\xi_1 - \mu\,\eta_1 &= z_1 - y_1 \\ \lambda\,\xi_2 - \mu\,\eta_2 &= z_2 - y_2 \\ \lambda\,\xi_3 - \mu\,\eta_3 &= z_3 - y_3\,. \end{aligned} \tag{69}$$

Sistem (69) ima više jednačina nego nepoznatih, pa njegovo rešenje tražimo tako što nađemo rešenje sistema (ako postoji) koji se sastoji od prve dve jednačine, a zatim proverimo da li dobijeno rešenje zadovoljava i treću jednačinu. Ako uvedemo oznake, $s_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $s_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, imamo:

(po) $l = p$ akko su vektori s_1 i s_2 proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 = \mathbf{0}$, i sistem (69) ima barem jedno rešenje[45]

(pa) $l \parallel p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko su vektori s_1 i s_2 proporcionalni, i sistem (69) nema rešenja.

(s) $l \neq p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko vektori s_1 i s_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 \neq \mathbf{0}$, i sistem (69) ima tačno jedno rešenje.

(m) $l \neq p$ i $l \cap p = \emptyset$ akko vektori s_1 i s_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 \neq \mathbf{0}$, i sistem (69) nema rešenja.

[45] Iz geometrijskih razloga jasno je da ako sistem (69) ima barem jedno rešenje ima beskonačno rešenja.

GLAVA 3

Nizovi

1. Limes niza

3.1. Definicija. Niz realnih brojeva (kraće niz) je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Broj $a(n) \equiv a_n$ je n-ti član niza. Za niz koristimo oznake (a_n) ili $\{a_n\}$. Pri tome razlikujemo niz $\{a_n\}$ od skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, jer u nizu[1] svaki član ima tačno određeno mesto na kojem se nalazi, što nije slučaj kod skupa, jer u skupu nije bitan redosled elemenata[2].

Nizove obično zadajemo: popisivanjem elemenata $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.)$, formulom opšteg člana $(a_n = n + 1)$ ili rekurentnom relacijom$(a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_0 = a_1 = 1)$.

Primer. Ako je niz zadat formulom, lako se može zapisati popisivanjem elemenata. Obratno je obično teže. Npr. niz

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \text{je} \quad 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \ldots,$$

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je monoton (rastući, opadajući, strogo rastući, strogo opadajući) ako je takav posmatran kao funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Slično, kažemo da je niz ograničen ako je $\operatorname{Im} a$ ograničen podskup u $\mathbb{R}$, tj. ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi, $|a_n| \leq M$. Analogno se definiše pojam ograničenosti niza

odozdo: $\quad (\exists\, m \in \mathbb{R})\, (\forall\, n \in \mathbb{N}),\ $ tako da je $m \leq a_n$

odozgo: $\quad (\exists\, M \in \mathbb{R})\, (\forall\, n \in \mathbb{N})\ $ tako da je $a_n \leq M$.

Primer. Niz sa opštim članom $a_n = \frac{1}{n}\, (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ je monoton (strogo opadajući) i ograničen jer je

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n\,, \qquad \text{i jer je} \qquad |a_n| \leq 1\,.$$

S druge strane, niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n}\, (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots)$ nije monoton,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} > -\frac{1}{2n+1} = a_{2n+1} < a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2}\,,$$

ali je ograničen jer je $|a_n| \leq 1$. Postoje nizovi koji nisu monotoni i koji nisu ograničeni, takav je npr. niz $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$[3]

[1] Niz možemo shvatiti kao uređenu $\mathbb{N}$-torku.
[2] tj. skupovi $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ su međusobno jednaki, a jednaki su npr. i skupu $\{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1\}$.
[3] Da li možete napisati opšti član ovog niza?

3.2. Limes (granična vrednost) niza. Realan broj b je granična vrednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da za} \quad n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Za niz koji ima limes kažemo da je konvergentan ili da niz konvergira. Niz koji nema limes zove se divergentan niz, tj. kažemo da niz divergira.

Iz definicije limesa zaključujemo da konvergentni niz ima svojstvo da svaka $\varepsilon-$okolina tačke b, tj. interval $I_b^\varepsilon = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ sadrži beskonačno mnogo članova niza i da se izvan toga intervala nalazi samo konačno mnogo članova niza. Za skup $A \subseteq N$ kažemo da sadrži skoro sve članove niza $\{a_n\}$ ako skup $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ sadrži samo konačan broj elemenata članove niza $\{a_n\}$. *Dakle, ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan i ako je b njegov limes onda svaka $\varepsilon-$okolina[4] tačke b (tj. skup I_b^ε) sadrži skoro sve elemente niza $\{a_n\}$.*

Za konvergentne nizove kristimo oznake:

$$a_n \longrightarrow b, \quad \{a_n\} \longrightarrow a, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b.$$

Primer. Dokažimo da je $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada je

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

tako da možemo izabrati $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, gde $[x]$ predstavlja najveći celi broj manji od x. Npr. za $\varepsilon = 0.12$ je $n(\varepsilon) = [1/0.12] + 1 = [8.333] + 1 = 9$ pa se članovi niza $a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots$ nalaze unutar intervala $(-0.12, 0.12)$. Primetimo da je $n(\varepsilon)$ opadajuća funkcija od ε, tj. ako smanjimo ε veći broj (ali uvek konačan) članova niza ostaće izvan intervala I_b^ε. Interval I_b^ε sadrži skoro sve članove niza, tj. I_b^ε sadrži beskonačno članova konvergentnog niza, dok izvan I_b^ε uvek ima konačno članova niza a_n.

Kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema $+\infty$ ako je

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad n \geq n(M) \quad \Longrightarrow \quad a_n > M.$$

Analogno, niz $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$ ako je

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad n \geq n(M) \quad \Longrightarrow \quad a_n < -M.$$

Na primer, niz $a_n = n^3$ divergira u $+\infty$, a niz $a_n = -n$ divergira u $-\infty$.

Napomena. Primetimo da ako proširimo skup $\mathbb{R}$ sa tačkama $-\infty, \infty$[5], tada divergenciju prema $-\infty$ ili ∞ u smislu definicije limesa (prema nekom realnom broju b) postaje konvergencija u proširenom skupu $\overline{\mathbb{R}}$, tako da koristimo oznake $\lim a_n = \pm\infty$. Jedno od osnovnih svojstava konvergentnih nizova sadržano je u sledećoj teoremi.

Teorema. *Niz može imati najviše jedan limes.*

[4] bezobzira koliko je ε mali pozitivan broj, npr. $\varepsilon = 0.00000000000000001$.

[5] U čemu se tačke $-\infty, \infty$ razlikuju od ostalih tačaka skupa $\mathbb{R}$?

Dokaz. Pretpostavimo da niz $\{a_n\}$ ima dva različita konačna limesa b i $\bar{b}$. Neka je $\varepsilon = |b - \bar{b}|/2$. Tada okolina I_b^ε mora sadržavati skoro sve članove niza $\{a_n\}$, tako da se izvan okoline I_b^ε nalazi samo konačno članova niza, pa i okolina $I_{\bar{b}}^\varepsilon$ (koja je disjunktna sa okolinom I_b^ε) sadrži konačno mnogo članova niza, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\bar{b}$ limes niza $\{a_n\}$. □

2. Tačka nagomilavanja niza i podniz

3.3. Tačka nagomilavanja niza. Broj b je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako se u svakoj ε-okolini broja b nalazi beskonačno mnogo članova niza, formalno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \textit{ takav da } |a_m - b| < \varepsilon.$$

$+\infty$ *tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$ *ako*

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \textit{ takav da } a_m > M\,,$$

a $-\infty$ *je tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$ *ako*

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \textit{ takav da } a_m < -M.$$

Najveća tačka nagomilavanja niza zove se limes superior i obeležava se sa $\limsup$, a najmanja tačka nagomilavanja niza zove se limes inferior i obeležavamo ga sa $\liminf$.

Limes i tačka nagomilavanja niza. Iz definicije je jasno da je limes niza i tačka nagomilavanja niza, obratno ne važi tj. tačka nagomilavanja niza ne mora biti limes niza, kao što pokazuje primer niza: $a_n = (-1)^n$, koji ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1, ali niti jedna od njih nije limes tog niza jer izvan proizvoljne $\varepsilon-$okoline ($\varepsilon < 1$) tačke 1 (ili -1) postoji beskonačno mnogo članova niza. Ovaj primer je tipičan i pokazuje razliku između tačke nagomilavanja niza i limesa. Ta razlika se sastoji u tome što se unutar svake ε-okoline tačke nagomilavanja niza nalazi beskonačno članova tog niza, ali se i izvan te okoline može nalaziti beskonačno članova niza. Npr. u prethodnom primeru u svakoj dovoljno maloj ε-okolini $\varepsilon < 1$ tačaka 1 i -1 ima beskonačno mnogo članova niza sa (parnim odnosno neparnim indeksima). Odavde sledi da ako niz ima barem dve tačke nagomilavanja tada on nije konvergetan. Primetimo da ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada je $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Primer (a) Niz $a_n = n^2(1 - (-1)^n)$, odnosno $2, 0, 8, 0, 18, 0, \ldots$ je divergentan i ima tačke nagomilavanja 0 i $+\infty$ i važi $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = +\infty$.

(b) Primetimo da su tačke nagomilavanja niza $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$ svi prirodni brojevi jer se svaki od njih pojavljuje beskonačno mnogo puta, drugim rečima niz može imati beskonačno tačaka nagomilavanja.

3.4. Podniz. Podniz niza $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ \alpha$, gdje je $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. k-ti član podniza $a \circ \alpha$ je

$$(a \circ \alpha)(k) = a(\alpha(k)) = a_{\alpha(k)} = a_{\alpha_k}.$$

Dakle, podniz se dobije ako iz polaznog niza izbacimo beskonačan broj članova polaznog niza. Jasno, podniz je opet niz.

Primer. Podniz $\{a_{2n}\}$ niza $a_n = (-1)^n$ je konstantan niz $1, 1, 1, \ldots$, a podniz $\{a_{2n-1}\}$ istog niza je konstantan niz $-1, -1, -1, \ldots$.

3.5. Geometrijski niz. Niz

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \qquad \text{ili} \qquad q, q^2, q^3, q^4, \cdots, q^n, \cdots$$

zove se geometrijski niz. Za $|q| < 1$ niz konvergira prema nuli. Za $q = 1$ niz je konstantan, $1, 1, 1, \ldots$, i konvergira prema 1. Za $q = -1$ niz postaje $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ pa ima dve tačke nagomilavanja (1 i -1). Za $|q| > 1$ niz divergira. Posebno, za $q > 1$ niz konvergira prema $+\infty$, dok za $q < -1$ niz ima dve tačke nagomilavanja $+\infty$ i $-\infty$.

3.6. Tačke nagomilavanja niza i podniz. Kombinujući definicije podniza i tačke nagomilavanja zaključujemo:

(i1) broj b je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji (barem jedan) njegov podniz $\{a_{\alpha_k}\}$ koji konvergira prema b,

(i2) ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada za svaki njegov podniz $\{a_{\alpha_k}\}$ važi

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} a_{\alpha_k} = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n.$$

3.7. Ograničenost i konvergencija. Niz $\{a_n = (-1)^n\}$ je svakako ograničen, ali nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. Sledeća teorema pokazuje da obrat važi.

Teorema. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $a = \lim a_n$. Izaberimo, npr. $\varepsilon = 1$. Tada se članovi niza $a_{n(1)}, a_{n(1)+1}, a_{n(1)+2}, \ldots$ nalaze unutar intervala $(a-1, a+1)$. Odatle sledi da za svaki n važi:

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}, a-1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}, a+1\},$$

i dokaz je gotov. □

3.8. Monotonost i kovergencija. Ispitajmo sada odnos konvergencije nizova i podnizova sa motonošću i ograničenošću istih. U tom cilju imamo prvo sledeću jednostavnu teoremu.

Teorema 1. *Svaki niz ima monotoni podniz.*

Dokaz. Neka je dat niz $\{a_n\}$. Definišimo skup $A = \{m \in \mathbb{N} : n \geq m \Longrightarrow a_n \geq a_m\}$. Skup A može biti konačan ili beskonačan. Ako je A beskonačan tada u njemu možemo odabrati strogo rastući niz $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, odakle zbog definiciji skupa A imamo $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \cdots \leq a_{n_k} \leq \cdots$. Dakle, $\{a_{n_k}\}$ je rastući podniz niza $\{a_n\}$ i u ovom slučaju dokaz je gotov. Ako je skup A konačan, izaberimo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je veći od svih elemenata od A. Tada opet postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_2 > n_1$ i $a_{n_2} < a_{n_1}$, jer bi u suprotnom $n_1 \in A$. Jasno, opet imamo $n_2 \notin M$. Nastavljajući ovu konstruciju dolazimo do strogo rastućeg niza $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, koji je podskup skupa $\mathbb{N} \setminus M$. Takođe važi da je $a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k} > \cdots$, pa je $\{a_{n_k}\}$ strogo opadajući podniz niza $\{a_n\}$. □

Sledeća teorema veoma je važna u primenama, tj. u dokazivanjima da su neki nizovi konvergentni.

Teorema 2. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

Dokaz. Dokažimo teoremu kada je niz $\{a_n\}$ rastući. Neka je b supremum niza posmatranog kao podskup od $\mathbb{R}$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da $a_{n(\varepsilon)} > b - \varepsilon$, jer bi u suprotnom postojao $\varepsilon_0 > 0$ takav da je $a_n \leq b - \varepsilon_0$ za svako n, odakle bi sledilo da b nije supremum tog niza. Kako je niz $\{a_n\}$ rastući imamo da za $n \geq n(\varepsilon)$ važi $b \geq a_n \geq a_{n(\varepsilon)} \geq a - \varepsilon$, tj. $|a_n - b| < \varepsilon$, dakle, $\lim a_n = b$ i teorema je dokazana. Analogno se tretira slučaj kada je niz $\{a_n\}$ opadajući. $\square$

Koristeći prethodne dve teoreme dobijamo poznatu Bolzano-Weierstrassovu teoremu.

Teorema 3 (Bolzano – Weierstrass). *Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Prema Teoremi 1 svaki niz ima monoton podniz, kako je dati niz i ograničen, tada je i njegov monotoni podniz takođe ograničen pa taj podniz konvergira prema Teoremi 2. $\square$

Primetimo da u $\overline{\mathbb{R}}$ prethoda teorema glasi: Svaki niz sadrži konvergentan podniz. Ako je niz ograničen tada prema prehodnoj teoremi ima konvergentan podniz. Ako nije ograničen tada ima podniz koji konvergira prema $+\infty$ ili prema $-\infty$.

3. Broj e

3.9. Broj e. Dokažimo da je niz,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i ograničen odozgo pa je na osnovu Teoreme 2 iz prethodne tačke konvergetan. Limes tog niza obeležavamo sa e,[6] tj.

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dokažimo sada da je zadani niz ograničen odozgo:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \frac{1}{n^0}\binom{n}{0} + \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \cdots + \frac{1}{n^n}\binom{n}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.
\end{aligned}$$

Niz $\{x_n\}$ je strogo rastući (zbog očiglednih nejednakosti $1 - \dfrac{k}{n} < 1 - \dfrac{k}{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$):

[6] Broj e je transcendentan (nije nula niti jednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima) i prvih 50 cifara njegovog decimalnog zapisa su: 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\le 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Svojstva limesa

3.10. Algebarska svojstva limesa. Algebarska svojstva limesa nizova sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka su data dva konvergentna niza $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Tada važe formule:*

(i1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$,

(i2) $\lim(c\, a_n) = c \lim(a_n)$, *za proizvoljno* $c \in \mathbb{R}$,

(i3) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$,

(i4) *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $b_n \neq 0$ i ako je $\lim b_n \neq 0$, tada je* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$,

Dokaz. Dokažimo (i1). Neka je $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$, tada:

(70) $$\text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

(71) $$\text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Da bismo dokazali (i1) izaberimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe obe nejednakosti iz (70) i (71), tako da imamo

$$|(a_n - b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ iz definicije limesa sledi da je $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Za dokaz (i3), prvo primetimo,

(72) $$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \le |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|.$$

Da bismo mogli dovršiti dokaz potrebno je pogodno izabrati okoline (ε) i iskoristiti činjenicu da je konvergentan niz ograničen. To možemo uraditi na sličan način kao u dokazu svojstva (i1). Dakle, kako je niz b_n konvergentan tada postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|b_n| < M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada za $a \neq 0$ [7] imamo,

(73) $$\text{za } \frac{\varepsilon}{2M} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}\,,$$

(74) $$\text{za } \frac{\varepsilon}{2|a|} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da je za sve } n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}\,.$$

Sada izaberimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe obe nejednakosti iz (73) i (74), tako da desnu stranu od (72) možemo oceniti,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \le |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2M}|b_n| + \frac{\varepsilon}{2|a|}|a| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ iz definicije limesa sledi da je $\lim(a_n b_n) = ab = \lim a_n \lim b_n$.

Dokaz od (i2) direktno iz definicije; dokaz od (i4) je veoma sličan dokazu od (i3). □

[7] Objasnite kako tretirati slučaj ako je $a = 0$.

Primer 1. Koristeći da je $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, zaključujemo (iz prethodne teoreme) da je,

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0\,, & \text{za svaki } \alpha > 0. \\ \infty\,, & \text{za svaki } \alpha < 0. \end{cases}$$

Primer 2. Limes niza,

$$\xi_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}, \quad a_i, b_j, \in \mathbb{R}, \quad a_k, b_j \neq 0,$$

nalazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} \lim \xi_n &= \lim \frac{(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0) \cdot \frac{1}{n^m}}{(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0) \cdot \frac{1}{n^m}} = \lim \frac{(a_k n^{k-m} + a_{k-1} n^{k-m-1} + \cdots + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \frac{a_0}{n^m})}{(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m})}. \\ &= \frac{\lim(a_k n^{k-m}) + \lim(a_{k-1} n^{k-m-1}) + \cdots + \lim \frac{a_1}{n^{m-1}} + \lim(\frac{a_0}{n^m})}{\lim b_m + \lim \frac{b_{m-1}}{n} + \cdots + \lim \frac{b_1}{n^{m-1}} + \lim \frac{b_0}{n^m}} \\ &= \frac{a_k \lim n^{k-m} + a_{k-1} \lim n^{k-m-1} + \cdots + \lim a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \lim \frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1} \lim \frac{1}{n} + \cdots + b_1 \lim \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \lim \frac{1}{n^m}} = \begin{cases} 0\,, & \text{ako je } k < m, \\ \dfrac{a_k}{b_k}\,, & \text{ako je k=m}, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right) \infty\,, & \text{ako je } k > m. \end{cases} \end{aligned}$$

3.11. Limes i nejednakosti. U dokazivanju mnogih teorema i nejednakosti koristi se dobro ponašanje limesa prema nejednakostima, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema (o dva policajca). *Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da sve $n \geq n_0$ važi nejednakost $a_n \leq b_n \leq c_n$ i ako je $\lim a_n = \lim c_n = \xi$, tada je i $\lim b_n = \xi$.*

Dokaz. Iz pretpostavke da je $\lim a_n = \lim c_n = \xi$, za dati $\varepsilon > 0$ sledi da postoje (kao u formulama (70) i (71)) $n_1 \in \mathbb{N}$ i $n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ sa indeksima većim od n_1 odnosno n_2 pripadaju okolini I_ξ^ε. Primetimo da ako uzmemo $\tilde{n_0} = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ tada će svi članovi sva tri niza $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ čiji su indeksi veći od $\tilde{n_0}$ pripadati okolini I_ξ^ε: jer važi,

$$\xi - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \xi + \varepsilon\,.$$

Time smo pokazali da za dati $\varepsilon > 0$ postoji okolina I_ξ^ε broja ξ koja sadrži gotovo sve članove niza $\{b_n\}$, pa je i $\lim b_n = \xi$. □

Primer. Pokažimo da je $\frac{\cos n}{n} \to 0$. Zaista, kako je $-1 \leq \cos n \leq 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Budući da $-\frac{1}{n} \to 0$ i $\frac{1}{n} \to 0$, tvrđenje sledi iz prethodne teoreme.

3.12. Umetnuti intervali. Neka je dat niz intervala takvih da je

$$I_1 = [a_1, b_1] \supsetneqq I_2 = [a_2, b_2] \supsetneqq \cdots \supsetneqq I_n = [a_n, b_n] \supsetneqq \ldots$$

Ovakav niz podskupova od $\mathbb{R}$ zove se niz umetnutih intervala. Osnovna osobina ovakvog niza sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema (Koši – Kantor) [8]. *Za svaki niz umetnutih intervala postoji tačka $c \in \mathbb{R}$ koja pripada svakom od intervala I_n.*

Specijalno, ako je $\lim(b_n - a_n) = 0$ tada je tačka c jedinstveno određena.

Dokaz. Primetimo da svaka dva intervala $I_n = [a_n, b_n] \supsetneqq I_m = [a_m, b_m]$ važi da je $a_m \leq b_n$ jer bi u suprotnom, tj. $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$ sledilo $I_n \cap I_m = \emptyset$, što je nemoguće. Posmatrajmo sada monotone i ograničene nizove $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Niz A je rastući i ograničen odozgo (npr. sa b_1), dok je niz B opadajući i ograničen odozdo (npr. sa a_1), pa su na osnovu gornje teoreme konvergetni, tj. važi da je $\lim a_n = a = \sup A$ i $\lim b_n = b = \inf B$. Iz nejednakosti $a_m \leq b_n$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ sledi da je $a \leq b$. Time je dokazan prvi deo teoreme jer sve tačke iz intervala $[a, b]$ pripadaju svakom od intervala I_m.

Ako je još ispunjeno da je $0 = \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$, sledi da je $a = b = c$, tj. tačka c je jedinstveno određena. □

3.13. Košijev (Cauchy) niz. Postavlja se pitanje da li je moguće zaključiti da je neki niz konvergentan ako ne poznajemo limes. Odgovor je pozitivan i dobija se posmatranjem razlike susednih članova koje po apsolutnoj vrednosti moraju da teže 0. Preciznije imamo sledeću definiciju, niz $\{a_n\}$ je niz Košijev (Cauchy) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \text{važi da je} \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

U skupu $\mathbb{R}$ pojmovi konvergentnog i Košijevog niza su ekvivalentni, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema. *Niz je konvergentan ako i samo ako je Košijev.*

Dokaz. Ako je niz konvergentan, tj. ako je $\lim a_n = b$, za $\varepsilon/2$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_0$ važi $|a_n - b| < \varepsilon/2$, odakle za svaki $k \in \mathbb{N}$ sledi,

$$|a_{n+k} - a_n| = |(a_{n+k} - b) - (a_n - b)| \leq |a_{n+k} - b| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Obrat. Skica dokaza. Prvo se na sličan način kao i kod konvergentnih nizova pokaže da je Košijev niz ograničen [9]. Prema Bolcano-Wajerštrasovoj teoremi Košijev niz $\{a_n\}$ ima konvergentan podniz. Ako sa b obeležimo taj limes, u poslednjem koraku pokazuje se da je on i limes polaznog niza. □

Primedba 1. Ova teorema ne vredi ako posmatramo nizove u polju $\mathbb{Q}$. Drugim rečima konvergencija Košijevih nizova je u vezi za aksiomom o supremumu, i pokazuje se da se skup $\mathbb{R}$ može dobiti tako što se racionalnim brojevima (polju $\mathbb{Q}$) dodaju limesi svih racionalnih Košijevih nizova.

Primedba 2. Zbog prethodne teoreme Košijevi nizovi su pogodni za dokazivanje konvergencije realnih nizova, pogotovo ako su ti nizovi monotoni (ograničeni jesu), a što se često dešava kod redova sa pozitivnim članovima.

Primer. Znamo da je niz $\{a_n = 1/n\}$ konvergentan i pokažimo koristeći samo definiciju da je i Košijev. Primetimo,

$$\left|\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon + \frac{1}{n+k}\,.$$

[8] Cauchy – Cantor

[9] Potrebno je u dokazu teoreme za konvergentne nizove zameniti b sa a_n, odnosno a_n sa a_{n+k}.

Poslednja nejednakost je sigurno ispunjena ako je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tako da možemo uzeti npr. $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

3.14. Neki važni limesi. Sada navodimo nekoliko važnih limesa,

$$\text{(i1)} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,, \quad a > 0\,, \qquad \text{(i2)} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0\,, \quad a > 1\,,$$

$$\text{(i3)} \lim_{n\longrightarrow\infty} nq^n = 0\,, \quad |q| < 1\,, \qquad \text{(i4)} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,, \quad a > 0\,,$$

$$\text{(i5)} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0\,, \quad a < 1\,, \qquad \text{(i6)} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,,$$

$$\text{(i7)} \lim_{n\longrightarrow\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1\,.$$

5. Redovi i njihova konvergencija

3.15. Red realnih brojeva. Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva, tada sumu

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m \quad (n \leq m), \qquad \text{obeležavamo simbolom} \quad \sum_{k=n}^{m} a_k\,.$$

Želimo da damo smisao izrazu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kao sumi svih članova niza $\{a_n\}$. Red realnih brojeva (kraće red) u oznaci, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum a_k$ je niz parcijalnih suma $\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$. Kažemo da red $\sum a_k$ konvergira (divergira) ako konvergira niz parcijalnih suma $\{s_n\}$. U tom smislu koristimo zapis,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Broj a_n zove se n-ti član reda, i očigledno važi da je $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$.

Primer. Geometrijski red,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{odnosno} \quad 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n \ldots.$$

Za $q = 1$ očigledno je $s_k = k$ pa je $\sum q^{n-1} = \sum 1^{n-1} = +\infty$. Iz

$$s_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}\,,$$

za $|q| < 1$ važi $q^k \to 0$ (vidi primer geometrijskog niza), pa geometrijski red konvergira i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = \frac{1}{1 - q}\,.$$

Za $q \geq 1$ je $\sum q^n = +\infty$, a za $q \leq -1$ niz $\{s_k\}$ nema limes.

Primer: Zenonov paradoks. Ahil se nalazi 1 metar iza kornjače, a 10 puta je brži. Ako krenu istovremeno, dok Ahil stigne do početnog položaja kornjače, kornjača će preći neki put do novog položaja. Kad Ahil stigne do novog položaja kornjače, kornjača će biti u novom položaju, itd. Prema tome, Ahil nikad neće stići kornjaču.

Objasnite u čemu se sastoji ovaj paradoks.

3.16. Nužan uslov konvergencije reda. Kod redova postavljaju se dva prirodna pitanja:

(1) Da li red konvergira?

(2) Ako red konvergira, koja mu je suma?

Prvi korak u odgovoru na prvo pitanje sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema. *Ako je red* $\sum a_n$ *konvergentan, onda je* $\lim a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $s = \sum a_n = \lim s_n$. Kako je $a_n = s_n - s_{n-1}$, imamo redom

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0\,,$$

i teorema je dokazana. □

Primer. Red $\sum \dfrac{1}{n}$, spada među najvažnije redove i naziva se harmonijski red. Harmonijski red ispunjava *nužan uslov konvergencije* jer je $\lim \frac{1}{n} = 0$, ali *nije konvegentan*,

tj. red je divergentan jer $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Dokažimo ovu tvrdnju. Niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ je strogo rastući, a za njegov podniz $\{s_{2^m}\}$ važi,

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + (......) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, iz $s_{2^m} > 1 + m/2$ sledi da je $\lim s_{2^m} = +\infty$, pa je i $\lim s_k = +\infty$.

Primedba. Red $\sum \dfrac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

3.17. Kriterijumi konvergencije redova. U slučajevima geometrijskog reda i harmonijskog reda odgovorili smo na pitanje da li redovi konvergiraju i našli njihove sume. Obično je lakše dati odgovor na pitanje da li red konvergira, nego mu naći sumu (ako znamo da konvergira). U slučaju redova čiji su svi članovi pozitivni [10], ispitivanje konvergencije svodi se na ispitivanje ograničenosti niza parcijalnih suma $\{s_n\}$, jer je niz parcijalnih suma monoton i ograničen, pa na osnovu Teoreme 2 iz **3.8** red konvergira.

[10] Redovi sa pozitivnim članovima.

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima, tj. $a_n, b_n > 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$, red $\sum b_n$ nazivamo **majorantom reda** $\sum a_n$, a red $\sum a_n$ **minorantom reda** $\sum b_n$. Sada dajemo nekoliko kriterijuma konvergencije redova sa pozitivnim članovima.

Teorema. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima. Tada važe sledeći kriterijumi konvergencije:*

(i1) *Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.*

(i2) *Neka je $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = r$. Ako je*

- (a) $0 < r < +\infty$, *tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;*
- (b) $r = 0$ *i red* $\sum a_n$ *divergira, tada i red* $\sum b_n$ *divergira;*
- (c) $r = 0$ *i red* $\sum b_n$ *konvergira, tada i red* $\sum a_n$ *konvergira;*
- (d) $r = +\infty$ *i red* $\sum a_n$ *konvergira, tada i red* $\sum b_n$ *konvergira;*
- (e) $r = +\infty$ *i red* $\sum b_n$ *divergira, tada i red* $\sum a_n$ *divergira.*

(i3) *Dalamberov kriterijum. Neka je $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.*

(i4) *Košijev kriterijum. Neka je $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$. Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.*

(i5) *Rabeov kriterijum. Neka je $\lim n \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q$. Ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.*

(i6) *Gausov kriterijum. Neka postoji $n_0 \in N$, $s > 1$ i $M > 0$ takvi da je*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = q + \frac{\alpha}{n} + \frac{f(n)}{n^s}\,, \qquad \text{za } n \geq n_0,$$

*gde je $|f(n)| \leq M$ za sve $n \geq n_0$, tada red $\sum a_n$ **konvergira**, ako je $q > 1$ ili ako je $q = 1$ i $\alpha > 1$, i **divergira** ako je $q < 1$ ili $q = 1$ i $\alpha \leq 1$.*

Dokaz. Dokažimo prvu varijantu poredbenog kriterijuma (i1), dok dokaze ostalih tvrdnji izostavljamo.

Neka red $\sum a_n$ ima konvergentnu majorantu $\sum b_n = b$ i neka je $a_n \leq b_n$. Niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ reda $\sum a_n$ ograničen je odozgo, $s_k \leq b$. Kako je $a_n > 0$, niz $\{s_k\}$ je i strogo rastući pa konvergira prema Teoremi 2 iz **3.8**. Druga tvrdnja je očigledna. Dokazi svih pomenutih kriterijuma zasnivaju se na poredbenom kriterijumu datog reda sa geometrijskim ili harmonijskim redom. □

Rabeov kriterijum se koristi ako Dalamberov kriterijum ne daje odgovor, tj. kada je $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$, a Gausov ako ni Rabeov kriterijum ne daje odgovor.

Primer 1. Kako je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira jer ima divergentnu minorantu $\sum \frac{1}{n}$. Istu ideju možemo primeniti i na red $\sum \frac{1}{n^p}$, koji divergira za $p < 1$.

Primer 2. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Zbog $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ važi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

sledi da $\lim s_k = 1$. Red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ takođe konvergira jer ima konvergentnu majorantu $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Tada konvergira i red

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \sum \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sada zbog poredbenog kriterijuma red $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p \geq 2$.

Primer 3. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \frac{n}{3^n}$ koristeći Dalamberov kriterijum.

Red konvergira po Dalamberovom kriterijumu jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Red konvergira i po Košijevom kriterijumu jer je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Primer 4. Dokazati konvergenciju reda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

koristeći Dalamberov kriterijum.

6. Apsolutna i uslovna konvergencija. Alternirani redovi

3.18. Apsolutna konvergencija. U prethodnoj tački dati su kriterijumi konvergencije za redove s pozitivnim članovima. U ovoj tački bavimo se redovima čiji članovi imaju različite predznake. U nekim slučajevima pomaže nam teorema o apsolutnoj konvergenciji.

Kažemo da je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan (ili da konvergira apsolutno) ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Primetimo, da za redove s pozitivnim članovima koje smo razmatrali u prethodnoj tački (jer je $a_n = |a_n|$) nema razlike između konvergencije i apsolutne konvergencije. Navedimo sada nekoliko osnovnih teorema o apsolutno konvergentnim redovima.

Teorema 1. *Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, tada je on i konvergentan.*

Dokaz. U dokazu koristimo činjenicu da je svaki Košijev niz konvergentan, koju primenimo na red parcijalnih suma. Kako je red $\{s_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i|\}$ konvergentan on je i Košijev, tako da $\forall \varepsilon > 0$ postoji neko n_0 takvo da za sve $n > n_0$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ sledi da je

$$|s_{n+m} - s_n| = \left| \sum_{i=0}^{n+m} |a_i| - \sum_{i=0}^{n} |a_i| \right| = \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon. \tag{75}$$

Sada posmatrajmo niz parcijalnih suma reda $\sum a_n$, tj. niz $\{p_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\}$. Koristeći nejednakost (75), kao i nejednakost mnogougla za apsolutnu vrednost

$$|p_{n+m} - p_n| = \left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon\,,$$

odakle sledi da je red $\{p_k\}$ Košijev [11], pa je i konvergentan. $\square$

Apsolutno konvergentni redovi imaju sledeće svojstvo.

Teorema 2. *Redosled sabiranja apsolutno konvergentnog reda $\sum a_n$ ne utiče na sumu reda. Preciznije, za proizvoljnu bijekciju $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ i apsolutno konvergentni red $\sum a_n$ važi da je $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.*

Primedba. Redovi koji su konvergentni, ali nisu apsolutno konvergentni zovu se uslovno konvergentni redovi. Uslovno konvergenti redovi nemaju svojstvo iz prethodne teoreme.

Primer. Primetimo da npr. redovi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots \tag{76}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots \tag{77}$$

apsolutno konvergiraju jer se njihovi redovi apsolutnih vrednosti podudaraju sa konvergentnim geometrijskim redom $\sum 1/2^{n-1}$.
Prema prethodnoj teoremi sume redova (76) jednaka su:

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots\right) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

3.19. Alternirani redovi. Pitanja konvergencije i pronalaženja suma redova čiji članovi imaju različite predznake, a koji nisu apsolutno konvergentni, je komplikovanije. Red $\sum a_n$ za koji je $\operatorname{sign} a_{n+1} = -\operatorname{sign} a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ zove se alternirani red. U slučaju alterniranog reda, imamo sledeću teoremu poznatu kao i Lajbnicov kriterijum konvergencije.

Teorema (Lajbnic). *Alternirani red $\sum a_n$ konvergira ako važi:*

(i1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ *takav da za $n \geq n_0$ sledi $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,*

(i2) $\lim a_n = 0$.

Primer. (i1) Alternirani harmonijski red

$$\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

[11] Primetimo da smo pokazali da $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takvo da za sve $n > n_0$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ sledi da je $|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon$.

konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red apsolutnih vrijednosti $\sum \frac{1}{n}$ divergira.

(i2) Alternirani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,,$$

takođe konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red $\sum \frac{1}{2n-1}$ divergira. Dakle, pomoću ovog reda moguće je izračunati numeričku vrednost broja π, iako je konvergencija vrlo spora, pa se u praksi koriste drugi redovi koji značajno brže konvergraju.

Primedba. Pokažimo da Teorema 2 iz prethodne tačke ne važi za alternirani harmonijski red, tj. da suma reda koji je konvergentan ali nije apsolutno konvergentan ovisi o redosledu sabiranja. Prvo primetimo da su i pozitivni i negativni deo alterniranog harmonijskog reda beskonačni, tj.

$$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty, \qquad \sum \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Pretpostavimo da je dat proizvoljni realni broj α (npr. $\alpha > 0$), tada uzmemo onoliko početnih pozitivnih članova reda dok njihova suma ne bude veća od α, zatim uzmemo onoliko početnih negativnih članova niza tako da ukupna suma pozitivnih i negativnih članova ne bude manja od α, zatim onoliko pozitivnih članova dok ne pređemo α, i tako dalje. Ovaj algoritam možemo ponavljati unedogled jer je svaki ostatak od pozitivnog i negativnog dela i dalje beskonačan. Dakle, suma reda biće jednaka α. Ovo je samo specijalni slučaj poznate Rimanove (Riemann) teoreme.

Teorema (Riman). *Neka je $\sum a_n$ uslovno konvergentan red i neka je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$[12], tada postoji bijekcija $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da je $\alpha = \sum a_{\sigma(n)}$.*

[12] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

GLAVA 4

Neprekidne funkcije

1. Limes funkcije

4.1. Limes funkcije. Neka je data funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Broj $a \in \mathbb{R}$ zove se limes ili granična vrednost funkcije f u tački x_0, ako je f definisana na nekoj okolini tačke x_0 (tj. na nekom intervalu $(c, d) \subseteq D$) osim možda u tački x_0,

ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *takvo da za sve* x *za koje je* $0 < |x - x_0| < \delta$ *važi* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Podsetimo se da skup $|x - x_0| < \delta$ možemo zapisati i kao okolinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I^\delta_{x_0}$ i kako u gornjoj definiciji tačka x_0 ne mora biti u domenu funkcije f uvedimo oznaku $\dot{I}^\delta_{x_0} = I^\delta_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Sada se gornji iskaz može napisati u skraćenoj formi kao:

ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *takvo da za* $x \in \dot{I}^\delta_{x_0}$ *sledi da je* $f(x) \in I^\varepsilon_a$.

Oznaka koja se koristi za limes funkcije u tački je,

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Primedba. Pojam limesa funkcije može se definisati na ekvivalentan način preko konvergencije limesa nizova: *za funkciju* f *koja je definisana na nekoj okolini tačke* x_0*, osim možda u tački* x_0*, kažemo da ima graničnu vrednost (limes)* a *u tački* x_0 *ako za svaki niz* $\{x_n\}$ *koji konvergira ka* x_0 *niz njegovih slika* $\{f(x_n)\}$ *konvergira ka* a.

Ova druga definicija limesa funkcije preko limesa nizova obično se koristi u dokazivanju da neki niz nije konvergentan, jer je dovoljno naći (samo!) jedan niz $\{x_n\}$ koji konvergira ka x_0, ali niz njegovih slika $\{f(x_n)\}$ ne konvergira ka a.

4.2. Limes sleva i sdesna. Ponekad je potrebno ispitati da li funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ima limes sleva (levi limes) ili sdesna (desni) limes. Definicija je slična kao i kod definicije limesa samo je potrebno δ-okolinu tačke x_0 zameniti u slučaju levog limesa intervalom $(x_0 - \delta, x_0)$, a u slučaju desnog limesa okolinom $(x_0, x_0 + \delta)$. Preciznije, $a \in \mathbb{R}$ zove se levi limes funkcije f u tački x_0, ako je f definisana na nekoj okolini tačke x_0 (tj. ne nekom intervalu (c, d) pri čemu je $c < x_0 < d$) osim možda u tački x_0,

ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *takvo da za sve* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$*, važi* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Oznake koje se koriste za limese funkcije sleva odnosno sdesna su:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Primer. Posmatrajmo funkciju *signum* koja je definisana na sledeći način

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x > 0\,, \\ 0, & \text{za } x = 0\,, \\ -1, & \text{za } x < 0\,. \end{cases}$$

Kako je funkcija signum konstanta na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ vidimo da je $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ i $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$. Dakle, levi limes funkcije i desni limes funkcije se razlikuju međusobno, ali se oba razlikuju i od vrednosti funkcije u posmatranoj tački jer je $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

4.3. Limes u $\overline{\mathbb{R}}$. Prirodno se nameće pitanje definisanje limesa funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, tj. kada $x \longrightarrow \pm\infty$ (u ovom slučaju domen D funkcije f mora biti neograničen sa one strane sa koje tražimo limes) ili kada $f(x) \longrightarrow \pm\infty$. Definicije ovih limesa zapravo zahtevaju razlikovanje tačaka $\pm\infty$ od ostalih tačaka skupa $\mathbb{R}$. Tako dobijamo sledeće definicije iskazane na formalnom jeziku:

(i1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, \delta > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap \dot{I}^{\delta}_{x_0} \implies f(x) > M\,.$

(i2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, \delta > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap \dot{I}^{\delta}_{x_0} \implies f(x) < -M\,.$

(i3) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \iff (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, N > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (N, +\infty) \implies |f(x) - a| < \varepsilon\,.$

(i4) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \iff (\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, N < 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies |f(x) - a| < \varepsilon\,.$

(i5) $\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, N > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) > M\,.$

(i6) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, N > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) < -M\,.$

(i7) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, N > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) > M\,.$

(i8) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall\, M > 0)\,(\exists\, N > 0)$ tako da za sve $x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) < -M\,.$

Primer 1. Primetimo prvo da se za limese tipa (i1) i (i2) iz gornje liste mogu posmatrati levi i desni limesi funkcije. Tako npr. za funkciju $f(x) = 1/x$ važi,

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Primer 2. Funkcija $f(x) = 1/x$ je primeri za limese tipa (i3) i (i4), jer je

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0_+\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0_-\,.$$

Oznake 0_- i 0_+ znače da se 0 približavamo preko negativnih odnosno pozitivnih brojeva.

Primer 3. Funkcija $f(x) = e^x$ je primer za limese tipa (i4) i (i5) jer je

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

Primetimo da je funkcija $g(x) = -e^x$ je primer za limese tipa (i6), funkcija $h(x) = e^{-x}$ je primer za limese tipa (i7), dok je funkcija $i(x) = -e^{-x}$ primer za limese tipa (i8).

2. Svojstva limesa funkcija

4.4. Svojstva limesa funkcije. Kao što je i za očekivati limesi funkcija u tački i limesi nizova imaju mnoge slične osobine. Dokazi tih osobina su takođe vrlo slični. Tako imamo sledeće teoreme.

Teorema 1. *Ako postoji* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *tada je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva različita limesa funkcije f u tački x_0, tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} f(x) = b, a < b$. Tada za $\varepsilon = (b-a)/4$, postoje $\delta_a > 0$ i $\delta_b > 0$ takvi da kada je

$$\text{(a)}\quad x \in I_{x_0}^{\delta_a} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_a^{\varepsilon}, \qquad \text{(b)}\quad x \in I_{x_0}^{\delta_b} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_b^{\varepsilon}\,.$$

Sada za $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$ sledi da je $f(x) \in I_a^{\varepsilon}$ i $f(x) \in I_b^{\varepsilon}$, tj. $f(x) \in I_a^{\varepsilon} \cap I_b^{\varepsilon} = \emptyset$, što je nemoguće i dokaz je gotov. □

Teorema 2. *Neka funkcije f i g imaju limese kada $x \to x_0$. Tada važi*

(i1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$

(i2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (c\,f)(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)\,,$

(i3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$

(i4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\,,$ *ako je* $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Dokaz je analogan kao i kod nizova samo je potrebno malo izmeniti frazeologiju:

.... $(\exists\, n_0)\,(\forall\, n \geq n_0) \implies |a_n - b| < \varepsilon$ kod nizova potrebno je zameniti sa,

.... $(\exists\, \delta)\,(\forall\, x \in D)\, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$, kod funkcija.

Napomena. Ista svojstva, kao u prethodnoj teoremi, važe i za levi $(x \to x_{0\_})$ i desni $(x \to x_{0+})$ limes.

Teorema 3 ('dva policajca'). *Neka je* $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = a = \lim_{x\to x_0} g(x)$. *Ako postoji* $\delta > 0$ *takvo da je za neku funkciju h ispunjeno*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\,,$$

tada je $\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.

Dokaz. Analogan onom kod nizova. □

Teorema 4. *Neka je $f : D \longrightarrow E$ i $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dve funkcije. Ako su ispunjeni sledeći uslovi,*

(i1) *postoji* $\displaystyle\lim_{y_0\to y} g(y)$, (i2) *ako za svaku okolinu* $\dot{I'}_{y_0} = \dot{I}_{y_0} \cap E$ *tačke* $y_0 \in E$ *koja ne sadrži* y_0 *postoji isto takva okolina tačke* $x_0 \in D$, $\dot{I'}_{x_0} = \dot{I}_{x_0} \cap D$ *tako da je* $f(\dot{I'}_{x_0}) \subseteq \dot{I'}_{y_0}$.

tada postoji i $\lim\limits_{x_0 \to x} (g \circ f)(x)$ *i važi formula:*

$$\lim_{x_0 \to x} (g \circ f)(x) = \lim_{y_0 \to y} g(y), \qquad \text{gde je } y = f(x).$$

4.5. Jedan važan limes. Pokažimo da je $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Koristimo Teoremu 3 iz prethodne tačke, primenjenu na funkcije $f(x) = \sin x$, $g(x) = \tan x$ i $h(x) = x$. Dobro je poznato da za $\pi/2 > x > 0$ važi,

(78) $\qquad \sin x < x < \tan x, \qquad$ ili nakon delenja sa $\sin x > 0$

(79) $\qquad 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}, \qquad$ ili nakon uzimanja recipročnih vrednosti

(80) $\qquad 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x\,.$

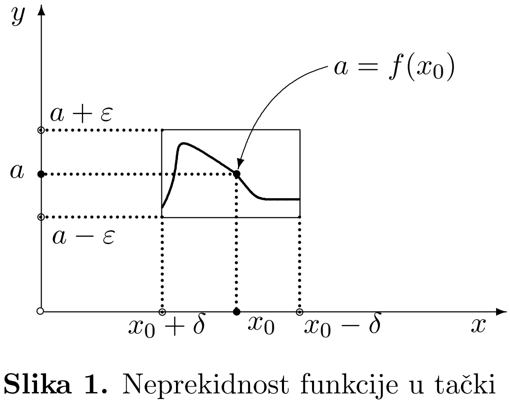
Kako su sve tri funkcije $\sin x, x$ i $\tan x$ neparne za $x \in (-\pi/2, 0)$ važiće nejednakosti (79), jer za $x < 0$ dobijamo suprotne nejednakosti od onih u (78), ali nakon množenja sa $\sin x < 0$ dobijamo nejednakosti (79). Kako je $\lim\limits_{h \to 0} 1 = \lim\limits_{h \to 0} \cos x$, iz prethodne teoreme i nejednakosti (80) sledi tvrdnja.

3. Neprekidnost

4.6. Neprekidne funkcije. Posmatramo funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, gde je $D \subseteq \mathbb{R}$, koja je definisana u nekoj okolini I_a tačke a. Opisno govoreći funkcija f neprekidna je u tački $a \in D$ ako se njene vrednosti $f(x)$ približavaju vrednosti $f(a)$ kada se x približava tački a. Preciznije imamo sledeću definiciju.

Funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna je u tački $a \in D$, ako $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, \delta > 0)$ $(\forall\, x \in D)$ takav da iz $D \supseteq |x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Geometrijska interpretacija limesa funkcije f (čiji domen sadrži neku okolinu tačke a) u tački a sastoji se u tome da postoji neki pravougaonik $[a-\delta, a+\delta] \times [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$ koji sadrži grafik funkcije f restringovan na segment $[a-\delta, a+\delta]$, tj. sadrži skup $f([a-\delta, a+\delta]) \subseteq [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$ (vidi Sliku 1). Pojam neprekidnosti funkcije f u tački a ekvivalentan je sa postojanjem limesa funkcije u tački a, koji je jednak vrednosti funkcije u toj tački, tj. $f(a)$. Drugim rečima funkcija f je neprekidna u tački a ako komutira sa znakom



Slika 1. Neprekidnost funkcije u tački

limesa, tj.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x\to a} x)\,.$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $E \subseteq D$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa E. Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj tački svoga domena D. Skup svih neprekidnih funkcija na skupu $E \subseteq \mathbb{R}$ obeležava se sa $C(E, \mathbb{R})$ ili kraće $C(E)$.

Primer 1. Konstantna funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a$ je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$. Jasno, sa proizvoljni $\varepsilon > 0$ može se uzeti bilo koji broj $\delta > 0$.

Primer 2. Funkcija $f(x) = x$ neprekidna je na $\mathbb{R}$.
Zaista, za proizvoljnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}$ važi da je $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ ako je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Primer 3. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.
Zaista, za proizvoljnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}$ važi da je

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\,\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|\,,$$

odakle je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.
Ovde smo koristili da je $|\sin x| \le |x|$.

4.7. Tačke prekida. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0, $I^{\varepsilon}_{x_0}$ ($I^{\varepsilon}_{x_0} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$), osim eventualno u samoj tački x_0. Funkcija f ima otklonjivi prekid u tački x_0 ako je

$$\lim_{x\to x_{0_-}} f(x) = \lim_{x\to x_{0_+}} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

pri čemu f ili nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq a$. Prekid se otklanja tako što definišemo $f(x_0) = a$.

Funkcija f ima prekid prve vrste u tački x_0 ako postoje levi i desni limesi u tački x_0 koji su konačni i različiti.

Funkcija f ima prekid druge vrste u tački x_0 ako je barem jedan od levog i desnog limesa u tački x_0 beskonačan ili ne postoji.

Primer 1. Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima otklonjivi prekid u tački $x = 0$. Prekid se otklanja tako što definišemo $f(0) = 0$, jer je $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, i tako dobijamo neprekidnu funkciju na čitavom $\mathbb{R}$.

Funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste. Zaista, u toj tački postoje levi i desni limes koji su konačni, ali različiti.

Funkcija $1/x$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$, jer su levi i desni limes beskonačni.

Primer 2. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ima prekid druge vrste u tački $x = 0$, jer kada $x \to 0_+$ limes zdesna ne postoji (u svakom, ma kako malom, intervalu oko nule $f(x)$ poprimi sve vrednosti između -1 i 1).

Primer 3. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ima u svakoj tački prekid druge vrste, jer u svakoj ma kako maloj okolini bilo kojeg realnog broja r ima beskonačno mnogo racionalnih i iracionalnih brojeva, pa npr. za $\varepsilon = 1/2$ neće postojati $\delta > 0$ tako da za svako $x \in I_r^\delta$ važi da je $|f(x) - f(r)| < 1/2$. Drugim rečima za svako $\delta > 0$ postojaće u okolini I_r^δ broj r_δ takav da je $|f(r_\delta) - f(r)| = 1 > 1/2$.[1]

4.8. Lokalna svojstva neprekidnih funkcija. Lokalna svojstva funkcija odnose se na ponašanja funkcija u nekoj maloj okolini tačaka iz domena funkcije, npr. sama neprekidnost funkcije u tački je lokalno svojstvo. Najvažnija svojstva neprekidnih funkcija sadržaj su sledeće teoreme.

Teorema. *Neka je $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna u tački $x_0 \in D$. Tada važe sledeća svojstva:*

(i1) *Funkcija f je ograničena u nekoj okolini tačke x_0.*

(i2) *Ako je $f(x_0) \neq 0$, tada postoji okolina I_{x_0} tačke x_0 u kojoj funkcija ne menja znak.*

(i3) *Ako je $g : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna na nekoj okolini tačke x_0 u kojoj je i f neprekidna. Tada su i funkcije*

(a1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,$

(a2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,,$

(a3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *(ako je $g(x) \neq 0$),*

definisane u nekoj okolini tačke x_0 i neprekidne u x_0.

(i4) *Ako je funkcija $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u tački $y_0 \in E$ pri čemu je $f : D \longrightarrow E$, $f(x_0) = y_0$ i f je neprekidna u tački x_0, tada je i kompozicija $(g \circ f)$ definisana na D i neprekidna je u tački x_0.*

Dokaz. (i1) sledi direktno iz definicije.

(i2) Neka je npr. $f(x_0) > 0$, tada za $\varepsilon = f(x_0)/2$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in I_a^\delta$ važi da je $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, tj.

$$0 < f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon = \frac{3}{2}\, f(x_0)\,.$$

Dakle, na okolini I_a^δ funkcija f je pozitivna, tj. ima isti znak kao i u tački $f(x_0)$. Slično, se tretira i slučaj kada je $f(x_0) < 0$.

(i3) sledi iz svojstava limesa Teoreme 2 iz tačke **4.4** i činjenice da ako je funkcija neprekidna u tački x_0 da onda primena limesa i dejstva funkcije komutiraju.

(i4) slično kao u dokazu (i3), tj.

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} (g(f(x))) = \lim_{y \to y_0} (g(y)) = g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)\,. \qquad \square$$

[1] Ako je $r \in \mathbb{Q}$ tada izaberemo da je r_δ iracionalan i obratno.

Važna primedba. Svojstva (i3) i (i4) iz prethodne teoreme znatno pojednostavljuju praktično nalaženje limesa funkcija. Jedna od osnovnih ideja u rešavanju raznih problema (a pogotovo matematičkih) jeste svođenje polaznog problema na već rešeni. U ovom kursu ta ideja se provodi na sledeći način [2]: prvo se po definiciji nađu osnovni i važni limesi (vidi tačku **3.14**), a zatim se iskoriste svojstva limesa (izvoda, integrala) iz ove teoreme i njoj analognih za izračunavanje komplikovanijih limesa (izvoda, integrala).

Primer 1. Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, pri čemu su koeficijenti $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, je neprekidna u svakoj tački skupa $\mathbb{R}$, jer je funkcija $g(x) = x$ neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$, pa prvo primena (a2) iz (i3) prethodne teoreme daje da je $a_m x^m$ neprekidna, a zatim primena svojstva (a1) iz iste teoreme daje da je $f(x)$ neprekidna.

Primer 2. Racionalna funkcija $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, je neprekidna na čitavom domenu tj. gde je $Q(x) \neq 0$. Ovo sledi iz prethodnog primera i svojstva (i2) (a3) iz prethodne teoreme.

4. Globalna svojstva neprekidnih funkcija

4.9. Globalna svojstva neprekidnih funkcija. Globalno svojstvo funkcija je ono koje se odnosi na čitav domen funkcije.

Teorema (Bolcano-Koši). *Neka je f neprekidna na segmentu $[a, b]$ takva da je $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. brojevi $f(a)$ i $f(b)$ su suprotnih znakova), tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Podelimo segment $[a, b]$ na dva segmenta jednakih dužina $I_1 = [a, (a+b)/2]$ i $I_2 = [(a+b)/2, b]$. Ako je $f((a+b)/2) = 0$, onda smo gotovi, ako je $f((a+b)/2) \neq 0$ tada tačno jedan od segmenata I_1 i I_2 ima istu osobinu kao i polazni segment $[a, b]$, tj. proizvod vrednosti funkcije u njegovim krajevima je manji od 0. Sada sa tim segmentom ponovimo proceduru i nastavimo na isti način dalje. Tada ili u jednom od koraka nađemo tačku c (koja je središte jednog od segmenata) takvu da je $f(c) = 0$ ili dobijemo niz umetnutih segmenata $\{I_n\}$ pri čemu njihova dužina teži 0 (jer u svakom koraku podelimo prethodni segment na dva dela i tako mu prepolovimo dužinu) i svaki od njih ima osobinu da vrednosti funkcije f u njegovim krajevima ima suprotan znak. U drugom slučaju postoji jedinstvena tačka $c \in (a, b)$, vidi Teorema iz **3.12** koja se nalazi u svakom od segmenata. Iz definicije umetnutih intevala $\{I_n\}$ dobijamo dva niza levih $\{a_n\}$, odnosno desnih $\{b_n\}$ krajeva segmenata, takvih da je npr. $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ i $\lim a_n = \lim b_n = c$. Prema osobini limesa sledi da je

$$\lim f(a_n) = c \leq 0 \quad \text{i} \quad \lim f(b_n) = c \geq, 0$$

odakle sledi da je $f(c) = 0$. Dakle, u oba slučaja sledi da postoji $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$. □

Primedba. Dokaz prethodne teoreme sadrži i algoritam (metoda polovljenja segmenta) za traženje nula neprekidne funkcije $f(x)$.

Posledica. *Ako je $\phi : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i akoje $\phi(a) = A$ i $\phi(b) = B$, tada za svaki $C \in (A, B)$ postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $\phi(c) = C$.*

[2] I u traženju limesa nizove, limesa funkcija, izvoda funkcija i integrala.

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \phi(x) - C$, koja je neprekidna na intervalu I i kako je $f(a) \cdot f(b) = (A-C)(B-C) < 0$, prema prethodnoj teoremi zaključujemo da postoji $c \in I$ takav da je $0 = f(c) = \phi(c) - C$, odakle sledi tvrdnja. □

Primer. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima, tj. neka je $n = 2m-1, m \in \mathbb{N}$ i $a_n \neq 0$. Tada se za dovoljno veliko $M \in \mathbb{R}$ polinom $f(x)$ ponaša kao njegov vodeći član (koji je po apsolutnoj vrednosti veći od sume svih ostalih članova). Dakle, ako je $a_n > 0$ ($a_n < 0$) tada je za sve $x > M$ $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) i za sve $x < -M$ $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) i primena prethodne teoreme implicira egzistenciju nekog realnog broja c takvog da je $f(c) = 0$. Time smo pokazali sledeće tvrđenje: *polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima ima barem jednu realnu nulu.*

Polinom parnog stepena sa realnim koeficijentima, npr. $f(x) = x^2 + 1$, ne mora imati realnu nulu.

4.10. Teorema (Vajerštrasa o ekstremnim vrednostima). *Neka je funkcija $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. Tada je f ograničena na I, i postoje tačke iz I u kojima funkcija prima najmanju i najveću vrednost.*

Dokaz. Zbog lokalnih svojstava neprekidne funkcije Teorema (i1) iz **4.8.**, sledi da za svaku tačku $x \in I$ postoji okolina I_x takva da je na skupu $I'_x = I \cap I_x$ funkcija f ograničena. Unija svih takvih okolina I_x, $x \in I$ obrazuje otvoreno pokrivanje[3] segmenta I, pa prema lemi o konačnom pokrivanju možemo naći konačno pokrivanje segmenta I okolinama $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_k}$. Kako je funkcija ograničena na svakoj od okolina I'_j, imamo da je $m_j \le f(x) \le M_j$, $m_j, M_j \in \mathbb{R}\ \forall j = 1, 2, \ldots, k$. Time smo pokazali da za svaki $x \in I$ važi da je

$$\min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \le f(x) \le \max\{M_1, M_2, \ldots, m_M\},$$

tj. funkcija f je ograničena na I.

Za drugi deo dokaza obeležimo sa $M = \sup\{f(x), x \in I\}$ ($m = \inf\{f(x), x \in I\}$). Pretpostavimo da je za svaki $x \in I$, $f(x) < M$, jer u suprotnom nemamo šta dokazivati. Tada je funkcija $M - f(x)$ neprekidna i pozitivna na segmentu I i poprima vrednosti po volji bliske 0[4]. Posmatrajmo funkciju $1/(M - f(x))$ koja je (zbog lokalnih svojstava neprekidnih funkcija), neprekidna na segmentu I, a s druge strane je neograničena na I što je u kontradikciji sa upravo dokazanom ograničenosti neprekidne funkcije na segmentu.

Dakle, postoji tačka $x_M \in I$ takva da je $f(x_M) = M$. Analogno se pokazuje da postoji tačka $x_m \in I$ takva da je $f(x_m) = m$. □

Posledica. *Neka je funkcija $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. Tada je $f([a,b]) = [m, M]$.*

4.11. Neprekidnost i monotonost. Neka je $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je funkcija strogo rastuća ili strogo opadajuća na I onda je ona očigledno injektivna. Ali važi i obrat, jer ako pretpostavimo da nije tako tada postoje tri tačke $x_1 < x_2 < x_3$ segmenta $[a,b]$ takve da $f(x_2)$ nije između $f(x_1)$ i $f(x_3)$. U ovom slučaju ili je $f(x_3)$ između $f(x_1)$ i $f(x_2)$, ili je $f(x_1)$ između $f(x_2)$ i $f(x_3)$. Razmotrimo drugu mogućnost, tada je funkcija f neprekidna na segmentu $[x_2, x_3]$ i postoji tačka (prema **4.9** Posledica) $y \in [x_2, x_3]$ takva da je $f(y) = f(x_1)$. Dakle, pronašli smo tačku $y > x_1$

[3] Kažemo da je sistem $F = \{X\}$ skupova pokrivanje skupa Y ako je $Y \subseteq \bigcup_{X \in F} X$. Važi sledeća lema (Borel-Lebeg). *U svakom sistemu intervala koji pokrivaju segment $[a,b]$ postoji konačan podsistem koji takođe pokriva segment $[a,b]$.*

[4] Sledi iz definicije supremuma skupa A.

takvu da je $f(y) = f(x_1)$, što je u kontradikciji sa injektivnosti funkcija f. Time smo pokazali propoziciju.

Propozicija 1. *Neprekidna funkcija* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *je injektivna akko je* f *strogo monotona na segmentu* I.

Takođe dve sledeće propozicije sadrže važna svojstva neprekidnih funkcija.

Propozicija 2 (kriterijum neprekidnosti monotone funkcije). *Monotona funkcija na* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *je neprekidna ako i samo ako je* $f(I) = [f(a), f(b)]$ *(*f *rastuća) ili* $f(I) = [f(b), f(a)]$ *(*f *opadajuća).*

Propozicija 3. *Neka je funkcija* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *strogo monotona i neprekidna, tada je* $f(I) = J$*, segment (*$f(I) = [f(a), f(b)]$ *ili* $f(I) = [f(b), f(a)]$*) i inverzna funkcija* $f^{-1} : J \longrightarrow I$ *je dobro definisana i neprekidna.*

GLAVA 5

Diferencijalni račun

1. Izvod funkcije

5.1. Definicija. Neka je data funkcija $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$, tada ako postoji broj

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{81}$$

nazivamo ga izvodom funkcije f u tački x_0. Takođe tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0. Primetimo da se (81) može zapisati na ekvivalentne načine

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x)\,, \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \text{ili}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\,, \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0\,.$$

Ako uvedemo oznaku $h = x - x_0$ tada linearnu funkciju $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)h$ u h nazivamo diferencijalom funkcije f u tački x_0. Sada možemo reformulisati definiciju izvoda na sledeći način: funkcija $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački $x_0 \in (a,b)$ ako

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x,h)\,, \tag{82}$$

gde je $x \longrightarrow A(x)h$ linearna funkcija u h, i $\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h}$. Sledeće veličine igraju važnu ulogu,

$$\text{priraštaj argumenta:} \quad \triangle\, x(h) = (x+h) - x = h\,,$$

$$\text{priraštaj funkcije:} \quad \triangle\, f(x;h) = f(x+h) - f(x)\,.$$

Za diferencijal se koristi i oznaka $df(x)(h) = A(x)h = f'(x)h$, i on predstavlja linearnu aproksimaciju funkcije f u okolini tačke x. Iz definicije izvoda (vidi naredni Primer) očigledno sledi da je za $f(x) = x$ njen izvod $f'(x) = 1$, odakle nalazimo i da je

$$dx(h) = 1 \cdot h = h\,,$$

tako da ponekad kažemo da se diferencijal nezavisne promenljive podudara sa njenim priraštajem. Takođe, imamo

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \quad \text{ili} \quad df(x) = f'(x)dx\,,$$

zbog čega za izvod koristimo oznaku (Lajbnic) $\dfrac{df(x)}{dx}$. Napomenimo da je oznaku $f'(x)$ uveo Lagranž.

Ako je za funkciju f definisana f' za sve tačke nekog skupa $E \subseteq D$ tada kažemo da je f diferencijabilna na E i f' je realna funkciju na E. Ako je $E = D$ tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna funkcija.

Primedba. Iz definicije limesa sledi da za izolovane tačke skupa D (tj. takve tačke za koje postoji neka okolina I u kojoj nema drugih tačaka skupa D), izvod nije definisan iako sama funkcija može biti definisana. Sledeća teorema pokazuje da je diferencijabilnost specijalnije svojstvo od neprekidnosti.

Teorema. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 onda je ona i neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Iz definicije izvoda funkcije f u tački x_0 imamo,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0\,,$$

Drugim rečima važi da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, tj. funkcija f je neprekidna u tački x_0, vidi **4.6.** □

Primedba. Iz prethodne teoreme vidimo da je biti diferencijabilna funkcija 'bolje' svojstvo od biti samo neprekidna funkcija. Zbog toga za funkcije koje su neprekidne na skupu D kažemo da su klase $\mathcal{C}^0(D)$, a funkcije čiji je izvod neprekidan na skupu D nazivamo funkcijama klase $\mathcal{C}^1(D)$.

5.2. Primer. (a) Izvod konstantne funkcije $f(x) = c$ nalazimo iz definicije,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(b) Slično, za funkciju $f(x) = x$ nalazimo,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$$

(c) Za funkciju $f(x) = x^2$ imamo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+(h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

(d) Pokažite[1] da je $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(e) Da bismo našli izvod funkcije $f(x) = \sin x$ potrebna nam je sledeća formula

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y\,,$$

koja je posledica adicionih formula za funkcije $\sin x$ i $\cos x$. Sada nalazimo,

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin[(x+\frac{h}{2})+\frac{h}{2}]-\sin[(x+\frac{h}{2})-\frac{h}{2}]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos\left(\lim_{h\to 0}(x+\frac{h}{2})\right) = \cos x.\end{aligned}$$

(f) Analogno se dokazuje da je $(\cos x)' = -\sin x$.

[1] Indukcijom ili primenom binomne formule.

5.3. Geometrijska i mehanička interpretacija izvoda. Izvodi funkcija su neophodni u rešavanju mnogih problema u mnogim naukama kao što su: fizika, mehanika, hemija, biologija, ekonomija, i sl. *Njutn (Isaac Newton)*[2] je u XVII. veku počeo razvijati diferencijalni račun baveći se problemom određivanja brzine.

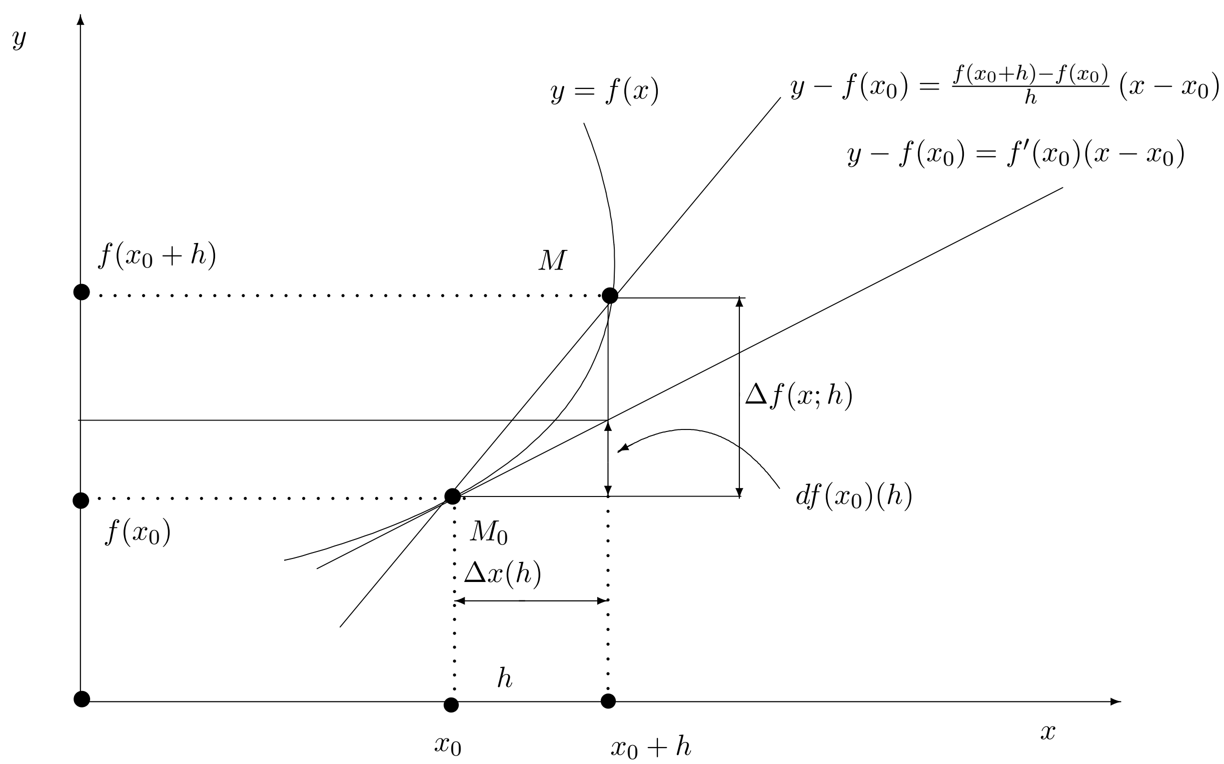
Problem brzine. Neka je formulom, $s = f(t)$, dat zakon kojem se tačka M kreće, pri čemu s označava pređeni put u nekom vremenskom trenutku t. Preciznije pretpostavljamo da je kretanje počelo u trenutku $t = 0$ i da je $f(0) = 0$. Tada tačka M do trenutka $t = t_0$ pređe put $s_0 = f(t_0)$. Prosečna brzina kojom se tačka M kretala od trenutka t_0 do trenutka $t\,(t > 0)$ jednaka je

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Jasno, ako je f diferencijabilna funkcija, tada kada $t \longrightarrow t_0$ gornji izraz teži ka trenutnoj brzini tačke M u trenutku t_0,

$$v_0 = v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Dakle, brzina predstavlja izvod puta po vremenu. Slično se može pokazati i da je ubrzanje (akceleracija) izvod brzine po vremenu.



Slika 1. Geometrijska interpretacija izvoda

[2] Isaac Newton 1642 – 1727, engleski fizičar, teorijski mehaničar, astronom i matematičar, jedan od najvećih naučnika u istoriji formulisao je između ostalog (sa Lajbnicom) osnove diferencijalnog računa.

Problem tangente. Otprilike u isto vreme (u XVII. veku) *Lajbnic (Gottfried Wilhelm Leibniz)* [3] je nezavisno od Njutna razvio osnove diferencijalnog računa rešavajući problem određivanja tangente na datu krivu u nekoj tački iste.

Neka je data kriva svojom jednačinom $y = f(x)$, gde je f diferencijabilna funkcija. Sečica (sekanta) krive $y = f(x)$ koja prolazi kroz tačke $M_0(x_0, f(x_0))$ i $M(x, f(x))$, za $x_0 \neq x$, je prava čiji je koeficijent pravca,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kada $x \longrightarrow x_0$, sečica teži tangenti krive $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$, čiji je koeficijent pravca jednak $\operatorname{tg}\alpha_0$. Dakle,

$$x \longrightarrow x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0)\ .$$

Stoga je jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački x_0,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala na krivu $y = f(x)$ u tački x_0 je prava koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, f(x_0))$ i normalna je na tangentu u toj tački. Kako za koeficijente pravaca k_1 i k_2, normalnih pravih p_1 i p_2 važi veza $k_1 \cdot k_2 = -1$ lako nalazimo jednačinu normale (uz $f'(x_0) \neq 0$),

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

5.4. Levi i desni izvod. Kako se izvod definiše preko limesa i kako smo videli ranije šta je levi odnosno desni limes funkcije u nekoj tački x znamo i šta su levi i desni izvod. Preciznije imamo,

(83) levi izvod funkcije f u tački x je broj: $f'(x_-) = \lim\limits_{h\to 0_-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

(84) desni izvod funkcije f u tački x je broj: $f'(x_+) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

ukoliko limesi na desnim stranama jednakosti (83) i (84) postoje.

Jasno, zaključujemo da izvod $f'(x)$ u tački x postoji ako i samo ako postoje levi i desni izvod i ako su oni jednaki.

Primer. Pronađimo izvod apsolutne vrednosti, tj. funkcije definisane na uobičajen način:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \ \ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funkcija $|x|$ je neprekidna, a za njen izvod važi :

$$|x|' = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \ \ 1, & x \geq 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad |x|' = \operatorname{sgn}(x)$$

[3] Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646 − 1716, nemački filozof i matematičar, zajedno sa Njutnom formulisao osnove diferencijalnog računa.

Primetimo da $|x|'$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste, i da funkcija $|x|$ ima u tački $x = 0$ levi i desni izvod koji se ne podudaraju.

2. Svojstva diferenciranja

5.5. Algebarska svojstva diferenciranja. U ovoj tački bavimo se osnovnim algebarskim svojstvima diferenciranja koja znatno olakšavaju računanje izvoda datih funkcija. Kako se izvodi definišu preko limesa za očekivati je da je izvod funkcije kompatibilan sa osnovnim algebarskim operacijama (vidi tačka **4.4** Teorema 2).

Teorema. *Neka su funkcije $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne na skupu $E \subseteq D$, tada za svaki $x \in E$ važi*

(i1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)\,,$

(i2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\,,$

(i3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,, \quad$ *ako je* $\quad g(x) \neq 0.$

Svojstvo (i2) zove se Lajbnicovo pravilo *za izvod proizvoda funkcija.*

Dokaz. Dokažimo (i3), ostala tvrđenja dokazuju se analogno[4]. Sada redom imamo,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)\,h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)\,h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,,$$

što je i trebalo pokazati. □

Posledica. *Iz veze diferencijala i izvoda, prethodna teorema može se zapisati i u terminima diferencijala. Tako uz pretpostavke prethodne teoreme imamo,*

(i1) $d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x)\,,$

(i2) $d(f \cdot g)(x) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)\,,$

(i3) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{df(x)\,g(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}\,, \quad$ *ako je* $\quad g(x) \neq 0.$

Primer. Koristeći tačku **5.2** i svojstva diferenciranja iz prethodne teoreme možemo izračunati sledeće izvode.

(a) $(x^4)' = (x^2 \cdot x^2)' = (x^2)' \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 4x^3.$

(b) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x},$

[4] Ali dokazi tvrđenja (i1) i (i2) su jednostavniji.

(c) $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5.6. Izvod kompozicije funkcija. Sledeća teorema pokazuje da se diferenciranje dobro ponaša i prema kompoziciji funkcija jer važi:

Teorema. *Neka je funkcija f diferencijabilna u tački $x \in D(f)$, a funkcija g u tački $y = f(x) \in D(g)$, tada je kompozicija $g \circ f$ diferencijabilna u tački x i važi formula:*

$$[g(f(x))]' = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x)\,. \tag{85}$$

Formula (85) je od velike važnosti jer ima veliku primenu u praksi budući je kompozicija funkcija jedan od osnovnih načina konstrukcija novih funkcija iz već poznatih.

Primer. Primenimo prethodnu teoremu, kao i ostala svojstva diferenciranja da bismo našli izvode funkcija.

(a) $[(x^3+4x^2-3x)^3]' = 3(x^3+4x^2-3x)^2(x^3+4x^2-3x)' = 3(x^3+4x^2-3x)^2(3x^2+8x-3)$.

(b) $(\cos(\sin x))' = -\sin(\sin x)(\sin x)' = \sin(\sin x)\cos x$.

5.7. Izvod inverzne funkcije. Veoma često se postavlja pitanje pronalaženja izvoda inverzne funkcije, kao i analitičkih osobina iste. Sledeća teorema i njene generalizacije (višedimenzionalne) daju odgovor na to pitanje.

Teorema. *Neka su $f : D \longrightarrow E$ i $f^{-1} : E \longrightarrow R$ $(D, E \subseteq \mathbb{R})$ uzajamno inverzne i neprekidne funkcije u tačkama $x_0 \in E$ i $y_0 = f(x_0)$. Ako je funkcija f diferencijabilna u x_0 i $f'(x_0) \neq 0$ tada je i funkcija f^{-1} diferencijabilna u tački y_0 i važi formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{86}$$

Primedba. Štaviše iz ove teoreme (i nekih drugih) sledi da svaka funkcija klase C^1 (diferencijabilna i čiji je izvod neprekidan) u okolinama tačaka u kojima se njen izvod ne poništava, ima inverznu funkciju koja je takođe klase $\mathcal{C}^1$ u odgovarajućim tačkama, tj. ako je f klase $\mathcal{C}^1$ na nekoj okolini I_{x_0} i ako je $f(x_0)' \neq 0$, tada postoji okolina I_{y_0} tačke $y_0 = f(x_0)$ takva da je $\mathcal{C}^1$ na I_{y_0} i $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$.

Primer. (a) Funkcija $y = x^2$, koja ima inverznu funkciju za $x \geq 0$ prema i prethodnoj teoremi imamo:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

Primetimo da na levoj i desnoj strani imamo funkciju od y pa možemo zameniti y s x i tako dobijamo standardni zapis,

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad x > 0$. Primetimo da tačka $x = 0$ nije u domenu ove funkcije.

(b) Funkcija $y=\sin x$ ima inverznu funkciju za $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ i važi:

$$(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

odnosno, nakon zamene y sa x,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in(-1,1).$$

funkcija $\arcsin x$ je definisana na segmentu $[-1,1]$, a njen izvod nije definisan u rubovima tog intervala.

(c) Funkcija $y=\operatorname{tg} x$ ima inverznu funkciju za $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ i važi

$$(\operatorname{arctg} y)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} x)'}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2},$$

ili nakon zamene y sa x,

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

5.8. Izvod implicitno zadate funkcije. Neka je implicitno zadata funkcija svojom jednačinom $F(x,y)=0$, njen izvod tražimo tako da jednu promenljivu (obično to je y) shvatimo kao funkciju one druge promenljive (a to je obično x, tj. $y=y(x)$) i primenimo pravila koja su data u teoremama iz tačaka **5.5.** i **5.6.**

Primer. Odrediti tangentu elipse,

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,, \tag{87}$$

u tački $(x_0,y_0)\,(-a<x_0<a)$. Pretpostavimo da je $y=y(x)$ i kako su leva i desna strana jednačine (87) jednake, jednaki su im i izvodi. Dakle,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0\quad\Longrightarrow\quad y'(x_0)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y(x_0)}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\,.$$

Sada iz jednačine tangente (vidi **5.3.**) redom nalazimo,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\quad\text{ili nakon zamene}\quad y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

nakon množenja poslednje jednakosti sa a^2y_0 dobijamo

$$a^2y\,y_0-a^2\,y_0^2=b^2\,x_0^2-b^2\,x\,x_0\quad\text{kako je}\quad\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0\quad\text{ili}\quad a^2\,y_0^2+b^2\,x_0^2=a^2\,b^2,$$

napokon dobijamo

$$a^2y\,y_0+b^2\,x\,x_0=a^2\,b^2\quad\text{ili nakon deljenja sa } a^2\,b^2\text{ dobijamo}\quad\frac{x_0\,x}{a^2}+\frac{y_0\,y}{b^2}=1\,.$$

Specijalno, odredimo tangentu na elipsu

$$F(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-1=0\,,$$

u tački $M(2, y_0 > 0)$. Sada prvo nalazimo $y_M = 5/3$, a zatim prema upravo izvedenoj formuli dobijamo jednačinu tangente,

$$1 = \frac{2\,x}{9} + \frac{5\,y}{5 \cdot 3} = \frac{2\,x}{9} + \frac{y}{3} \quad \text{ili} \quad 2\,x + 3\,y = 9.$$

Primer. Dokažite da jednačine tangenti na hiperbolu odnosno parabolu

$$\text{(h)} \;\; F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,, \qquad\qquad \text{(p)} \;\; G(x, y) = -2\,l\,x + y^2 = 0\;, l > 0,$$

u tački sa koordinatama $M(x_0, y_0)$ su:

$$\text{(h)} \;\; \frac{x_0\,x}{a^2} - \frac{y_0\,y}{b^2} - 1 = 0\,, \qquad\qquad \text{(p)} \;\; y_0\,y = l(x + x_0).$$

5.9. Izvod parametarski zadate funkcije. Ispostavlja se da je najprirodniji[5] način zadavanja funkcija u sledećem vidu,

$$x = \varphi(t), \qquad\qquad y = \psi(t), \qquad t \in D \subseteq \mathbb{R}\,,$$

koji se naziva parametarski oblik zadavanja funkcija. Izvod parametarski zadate funkcije računamo na sledeći način,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\psi(t))}{d(\varphi(t))} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Često koristimo kraći zapis $y' = \dot{y}/\dot{x}$, $\quad \dot{y} = \psi'(t)$, $\quad \dot{x} = \varphi'(t)$, gde smo sa y' obeležili izvod po nezavisnoj promenljivoj x, a $\dot{x}$ i $\dot{y}$ obeležava izvod po parametru t.

Primer. Odredimo tangentu na krivu zadatu sa

$$x = 2\cos t, \qquad\qquad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

u tački $x = 1$, $y > 0$. Gornja formula daje

$$y' = \frac{\cos t}{-2\sin t}.$$

Iz $x = 1 = 2\,\cos t$ nalazimo da je $\cos t = 1/2$ tako da je $t = \pi/3$ ili $t = -\pi/3$. Uslov $y > 0$ implicira $t = \pi/3$ i $y = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$. Dakle,

$$y'(1) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\,,$$

tako da je jednačina tražene tangente, $y = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x - 1) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[5] U smislu generalizacije u višim dimenzijama.

3. Izvodi elementarnih funkcija

5.10. Izvodi elementarnih funkcija. Jedan važan element u procesu pronalaženja izvoda jeste tabela elementarnih funkcija. Izvode svih elementarnih moguće je naći po definiciji ili korišćenjem već ranije pomenutih svojstava izvoda.

Tabela izvoda elementarnih funkcija

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$(x^r)' = r\,x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, x > 0$	$(C)' = 0$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$(\sin x)' = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in (-1,1)$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$
Eksponencijalne funkcije	Logaritamske funkcije
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 1 \neq a > 0, x \in \mathbb{R}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\,, \quad 1 \neq a > 0,\ x > 0$
$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \quad x \in (1, +\infty)$
$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}\,, \quad x \in (-1,1)$
$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$

5.11. Logaritamski izvod. Logaritamski izvod koristimo za diferenciranje funkcija oblika

$$y = h(x) = f(x)^{g(x)}. \tag{88}$$

U onim tačkama u kojima izvod postoji važi,

$$\big(f(x)^{g(x)}\big)' = f(x)^{g(x)}\bigg(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\bigg).$$

Procedura kojom nalazimo izvod ovom metodom sastoji se od tri karakteristična koraka:

(i1) logaritmiraju se obe strane jednakosti (88),
(i2) diferenciramo obe strane jednakosti dobijene u koraku (i1) pri čemu y tretiramo kao složenu funkciju[6],
(i3) sredimo dobijene formule.

Primer. Nađimo izvod funkcije $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Primenom logaritma na obe strane imamo

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x)\,,$$

a zatim diferenciranje obe strane ove jednakosti daje,

$$\frac{1}{y}\,y' = -\frac{1}{x^2}\,\ln(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot 1,$$

Sređvanjem ove jednakosti dobijamo,

$$y' = y\bigg(-\frac{1}{x^2}\,\ln(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\bigg) = \frac{1}{x}\,(1+x)^{\frac{1}{x}}\bigg(-\frac{1}{x}\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\bigg).$$

Primer. Izračunajte izvod funkcija $y = x^{x^2}$ i $y = x^{x^x}$.

5.12. Primena diferencijala: približno računanje. Kao što znamo diferencijal je najbolja linearna aproksimacija vrednosti diferencijabilne funkcije f u nekoj okolini tačke njenog domena. Zbog toga je jedna od osnovnih primena diferencijala nalaženje približnih vrednosti funkcije f u nekim tačkama.

Ako je vrednost nezavisne promenljive x određena (izmerena u nekom eksperimentu) sa pogreškom koja po apsolutnoj vrednosti ne prelazi neki broj h i ako uz tako izračunat x želimo odrediti vrednost funkcije $y = f(x)$, tada apsolutna pogreška vrednosti funkcije približno iznosi

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)h|\,, \quad \text{a relativna pogreška je} \quad \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}\,.$$

Primer. Izračunajmo približno $\sqrt[4]{84}$ koristeći činjenicu da je $\sqrt[4]{81} = 3$.

[6] kompoziciju.

Primetimo da je

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81+3} = 3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = 3\sqrt[4]{1+x}$, a zatim izaberimo $x_0 = 0$ i $h = 1/27$. Koristeći diferencijal nalazimo,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{84} = f(x_0+h) \ &\approx \ f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + \frac{3}{4}(1+x_0)^{-\frac{3}{4}}h \\ &= \ 3 + \frac{3}{4}\cdot 1 \cdot \frac{1}{27} = 3.02\dot{7}.\end{aligned}$$

Napomenimo da je tačna vrednost broja $\sqrt[4]{84}$ na četiri decimale 3.0274.

4. Izvodi višeg reda

5.13. Izvodi i diferencijali višeg reda. Neka je data funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Njen izvod (ako postoji), $f' : D' \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkcija pa je možemo pokušati diferencirati. Ako je f' diferencijabilna tada funkciju $(f')' = f''$ nazivamo drugim izvodom funkcije f. Dakle,

$$f'' \equiv (f')' : D'' \subseteq D' \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sada indukcijom nastavljamo dalje i definišemo[7] n-ti izvod funkcije f kao izvod njenog $(n-1)$-og izvoda, tj. $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. Sada je moguće posmatrati funkcije koje su $n-$ puta diferencijabilne i čiji je $n-$ti izvod neprekidna funkcija na nekom skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, koje obeležavamo sa $\mathcal{C}^n(D)$. Od posebnog su interesa funkcije klase $\mathcal{C}^\infty(D)$, tj. one koje imaju izvode svih redova i ti izvodi su neprekidni.

Primer. (a) Nađimo izvode višeg reda funkcije $y = e^{kx}$.
Sada redom nalazimo,

$$y' = e^{kx}\cdot k = ke^{kx}, \quad y'' = ke^{kx}\cdot k = k^2e^{kx}, \quad y''' = k^2e^{kx}\cdot k = k^3e^{kx},$$

i indukcijom lako nalazimo da je n-ti izvod jednak $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.
(b) Za polinom $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ lako nalazimo da je

$$y' = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \quad y'' = 6a_3x + 2a_2, \quad y''' = 6a_3, \quad y^{IV} = 0, \quad y^j = 0, \text{ za } j > 4.$$

Iz ovog primera vidimo da i u opštem slučaju polinoma $p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$, n-tog stepena vredi

$$p_n^{(n)}(x) = a_n\, n!\,, \qquad p_n^{(k)}(x) = 0, \qquad k > n.$$

Diferencijal višeg reda definišemo analogno. Neka je $y = f(x)$ dva puta diferencijabilna funkcija. Diferencijal drugog reda funkcije f je diferencijal njenog diferencijala dy, odnosno $d^2f \equiv d^2y = d(dy)$. Analogno dalje, ako je $y = f(x)$

---
[7] Ako postoje svi potrebni izvodi funkcije f.

$n-$puta diferencijabilna funkcija, tada je diferencijal n-tog reda funkcije f jednak $d^n f \equiv d^n y = d(d^{n-1})y = f^{(n)}dx^n$. Prema definicionoj formuli za diferencijal važi,

$$d^2y = d(dy) = (dy)'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Primetimo da važi da je $d(dx) = 0$. Prethodna formula i definicija diferencijala opravdavaju sledeće oznake[8]

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\,, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\,, \qquad \ldots\ldots \qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

Važna primedba. Uvedena oznaka za izvod veoma je korisna jer pomoću nje mogu se lako zapisati pravila za diferenciranje kompozicije funkcija, inverzne funkcije i parametarski zadate funkcije,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dy}{dt}}\,.$$

Primer: Drugi izvod parametarski zadate funkcije. Formulu za drugi izvod parametarski zadate funkcije dobijamo primenom prethodne formule i formule iz tačke **5.9.**, tj.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{\dot y}{\dot x}\right)}{\dot x dt} = \frac{\dfrac{(\ddot y\dot x - \dot y\ddot x)\,dt}{\dot x^2}}{\dot x dt} = \frac{\ddot y\dot x - \dot y\ddot x}{\dot x^3}\,.$$

5. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

5.14. Osnovne teoreme diferencijalnog računa I. Ako je neka funkcija diferencijabilna tada ona ima određene dobre osobine koje su posledica njene diferencijabilnosti. Zbog toga je veoma važno znati koja osnovna svojstva funkcija su posledica diferencijabilnosti što je sadržaj ove i nekoliko narednih tačaka.

Lema (Ferma[9]). *Neka je data funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ i tačka $x_0 \in D$ takva da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i1) *postoji okolina I_{x_0} tačke x_0 takva da je $I_{x_0} \subseteq D$,*

(i2) *funkcija f je diferencijabilna u tački x_0,*

(i3) *tačka x_0 je tačka u kojoj funkcija f ima ekstremalnu vrednost (minimum ili maksimum) na I_{x_0}.*

Tada je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Budući da je po pretpostavci funkcija f diferencijabilna u tački x_0 važi,

(89) $$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x_0,h)h = (f'(x_0) + \alpha(x_0,h))h\,,$$

pri čemu $\alpha(x_0,h) \longrightarrow 0$ kada $h \longrightarrow 0$ (za $x_0 + h \in I_{x_0}$). Kako je x_0 ekstremalna tačka leva strana jednakosti (89) je nenegativna ili nepozitivna za sve $x \in I_{x_0}$. Kada bi $f'(x_0) \neq 0$ za dovoljno mali h veličina $f'(x_0)+$

[8] Ove oznake je uveo Lajbnic.

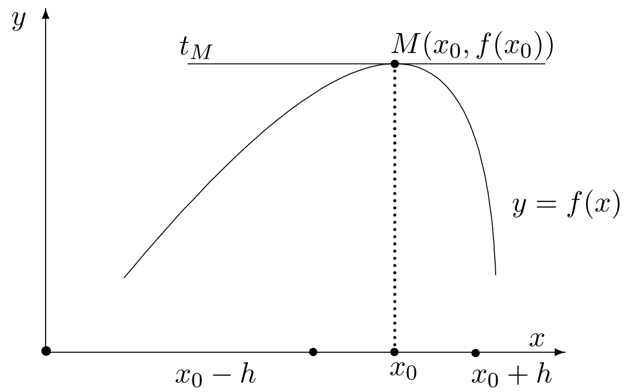
[9] Pierre de Fermat, 1601 – 1665, čuveni francuski matematičar.

$\alpha(x_0,h)$ imala bi isti znak kao i $f'(x_0)$, jer $\alpha(x_0,h) \longrightarrow 0$ kada $h \longrightarrow 0\,(x_0+h \in I_{x_0})$. Primetimo da u jednakosti (89) h može poprimiti i pozitivne i negativne vrednosti, a kako se znak izraza $f'(x_0)+\alpha(x_0,h)$ ne menja za dovoljno malo h (po apsolutnoj vrednosti), zaključujemo da će desna strana jednakosti (89) na okolinama $(x_0-\delta,x_0)$ i $(x_0,x_0+\delta)$ (za dovoljno malo δ) imati suprotne znakove (tj. funkcija f će promeniti znak pri prolasku kroz tačku x_0) što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je tačka x_0 tačka lokalnog ekstrema.

□

Primedba 1. Fermaova lema daje neophodan uslov da bi neka tačka bila ekstremalna tačka diferencijabilne funkcije.

Primedba 2. Geometrijski smisao Fermaove leme je očigledan (vidi Sliku 2.): tangenta na grafik krive u tački ekstremuma je paralelna sa Ox osom, tj. horizontalna je.



Slika 2. Fermaova teorema

Teorema 1 (Rol[10]). *Neka je data funkcija* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *za koju su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i1) *neprekidna na segmentu* $[a,b]$,

(i2) *diferencijabilna na intervalu* (a,b),

(i3) $f(a)=f(b)$.

Tada postoji tačka $c\in(a,b)$ *takva da je* $f'(c)=0$.

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ postoje tačke $x_m, x_M \in [a,b]$ u kojima ona redom poprima svoju najmanju i najveću vrednost.

(i) Ako je $f(x_m)=f(x_M)$ onda je funkcija f konstanta na $[a,b]$ pa je $f'(x)\equiv 0$ na (a,b) i dokaz je u tom slučaju gotov.

(ii) Ako $f(x_m)<f(x_M)$ i kako je, $f(a)=f(b)$, tada barem jedna od tačaka x_m i x_M pripada intervalu (a,b) i ako nju obeležimo sa c prema Fermaovoj lemi za nju će važiti da je $f'(c)=0$. □

5.15. Osnovne teoreme diferencijalnog računa II. U ovoj tački bavimo sa teoremama o srednjoj vrednosti, a koje se ponekad zovu i teoremama o konačnim priraštajima. Prva od njih Lagranžova teorema povezuje priraštaj funkcije na segmentu sa izvodom funkcije na tom segmentu.

Teorema 1 (Lagranž[11]). *Neka je data funkcija* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *za koju su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i1) *neprekidna na segmentu* $[a,b]$,

(i2) *diferencijabilna na intervalu* (a,b).

Tada postoji tačka $c\in(a,b)$ *takva da je*

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)\,. \tag{90}$$

[10] Michel Rolle, 1652 – 1719, francuski matematičar.

[11] Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813, čuveni francusko-italijanski matematičar, teorijski mehaničar, astronom,..

Dokaz. Da bismo dokazali ovu teoremu posmatramo funkciju

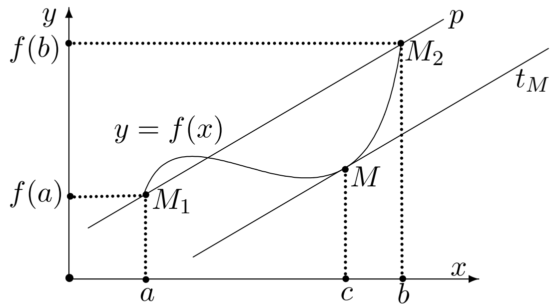
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a),$$

koja je očigledno neprekidna na segmentu $[a, b]$ (jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$), diferencijabilna na intervalu (a, b) (jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem diferencijabilnih funkcija na intervalu (a, b)) i za koju važi da je $F(a) = F(b) = f(a)$. Drugim rečima funkcija F ispunjava sve uslove Rolove teorema, tako da za nju važe i zaključci Rolove teoreme, tj. postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad\Longleftrightarrow\quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,,$$

i teorema je dokazana. □

Primedba 1. Geometrijski smisao Lagranžove teoreme: postoji neka tačka $M(c, f(c))$ pri čemu je $c \in (a, b)$, takva da je tangenta na grafik funkcije $f(x)$ u tački M paralelna sa pravom određenom tačkama $M_1(a, f(a))$ i $M_2(b, f(b))$, tj. krajnjim tačkama grafika funkcije f na segmentu $[a, b]$.



Slika 3. Lagranžova teorema

Primedba 2. Mehanički smisao Lagranžove teoreme. Ako promenljivu x shvatimo kao vreme, a $f(b) - f(a)$ kao put koji je neka materijalna čestica prešla za vreme $b - a$ krećući se po pravoj, tada Lagranžova teorema tvrdi da postoji trenutak vremena $c \in (a, b)$ u kojem materijalna čestica ima brzinu $f'(c)$ takvu da ako bi se kretala njom u svakom trenutku vremena iz $[a, b]$ (tj. kretala bi se konstantnom brzinom) ona bi prešla put $f(b) - f(a)$. Dakle, brzina $f'(c)$ predstavlja srednju (prosečnu) brzinu kretanja materijalne čestice u vremenskom segmentu $[a, b]$.

Primedba 3. Formuli (90) iz Lagranžove teoreme moguće je dati drugu formu. Npr. ako uvedemo oznaku $\vartheta \equiv \dfrac{c - a}{b - a}$, vidimo da važi $c = a + \vartheta(b - a)$, $0 < \vartheta < 1$, tako da formula (90) prima sledeći oblik,

(91) $$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Ako uvedemo oznake $a = x$ i $b = x + h$ možemo (90) prepisati kao,

(92) $$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = f'(x + \vartheta h)\,h, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Posledica 1. *Ako u svakoj tački nekog intervala* (a, b) *važi da je* $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) *tada je funkcija rastuća (opadajuća) na intervalu* (a, b).

Dokaz. Neka su x_1, x_2 tačke intervala (a, b) i neka je npr. $x_1 < x_2$. Tada je $x_2 - x_1 > 0$ a po formuli (90) važi

(93) $$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)\,, \qquad \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b),$$

odakle sledi da za $f'(\xi) > 0$ ($f'(\xi) < 0$) imamo $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ($f(x_2) - f(x_1) < 0$) ili drugim rečima da je f rastuća (opadajuća) funkcija [12]. □

Posledica 2. *Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Funkcija f je konstanta akko je $f'(x) = 0$ za sve tačke segmenta $[a, b]$ (ili (a, b)).*

Dokaz. Ako je f konstanta onda jasno sledi da je $f'(x) = 0$ za sve tačke segmenta $[a, b]$. Obratno, ako je $f'(x) \equiv 0$ na $[a, b]$ tada prema Lagranžovoj teoremi, za $x_1, x_2 \in [a, b], (x_1 < x_2)$ imamo da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0\,,$$

jer je $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ pa je $f'(\xi) = 0$. Odakle sledi da je $f(x_2) = f(x_1)$ i dokaz je gotov. □

Teorema 2 (Koši [13]). *Neka su data funkcije $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ za koje su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i1) *neprekidne na segmentu $[a, b]$,*

(i2) *diferencijabilne na intervalu (a, b).*

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)\,(g(b) - g(a))\,. \tag{94}$$

Specijalno, ako je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je i $f(a) \neq f(b)$ i važi,

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}\,. \tag{95}$$

Dokaz. Budući da funkcija,

$$F(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,,$$

zadovoljava sve pretpostavke Rolove teoreme na segmentu $[a, b]$, (neprekidnost na $[a, b]$, diferencijabilnost na (a, b) i $F(a) = F(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a)$) sledi da postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $F'(c) = 0$, tj. imamo da je

$$0 = F'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)\,(g(b) - g(a)) \iff g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Primetimo da iz Lagranžove teoreme sledi da ako je $f'(x) \neq 0$ na (a, b) tada je $f(b) \neq f(a)$ i možemo podeliti jednakost (94) sa $f'(c)(f(b) - f(a)$ i dobiti jednakost (95). □

Primedba. Primetimo da ako u Košijevoj teoremi izaberemo $g(x) = x$, tada je očigledno $g'(x) = 1$ i $g(b) - g(a) = b - a$ i dobijamo kao posledicu Lagranžovu teoremu.

6. Tejlorova formula

5.16. Tejlorova [14] formula. Primetimo da Lagranžovu formulu možemo prepisati na sledeći način,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)\,, \qquad \text{gde je } \xi \text{ između } x_0 \text{ i } x.$$

Ova formula nam s jedne strane pokazuje na koji način možemo vrednosti diferencijabilne funkcije f aproksimirati polinomom 1.−og stepena, a sa druge strane dovodi u vezu vrednosti funkcije f u okolini tačke x_0 i njene vrednosti $f(x_0)$. Postavlja se

---

[12] Pokazali smo da $x_1 < x_2 \implies f(x_2) > f(x_1)$, ako je $f'(\xi) > 0$ i $x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)$, ako je $f'(\xi) < 0$.

[13] Augustin Louis Cauchy, 1789 − 1857, čuveni francuski matematičar.

[14] Brook Taylor, 1685 − 1731, engleski matematičar.

prirodno pitanje generalizacije ove formule koje je dovelo do pojma Tejlorove formule neke funkcije. Da bismo objasnili ovu generalizaciju prvo uzmemo polinom,

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0, \qquad a_n \neq 0\,,$$

koji ima izvode proizvoljnog reda i pokušajmo ga napisati u obliku

(96) $$P_n(x) = b_n\,(x-x_0)^n + b_{n-1}\,(x-x_0)^{n-1} + \cdots + b_1\,(x-x_0) + b_0, \quad b_n \neq 0\,.$$

Primetimo da ako uvrstimo u (96) $x = x_0$ dobićemo da je $b_0 = P_n(x_0)$. Ako diferenciramo polinom P_n dat formulom (96), dobićemo

(97) $$P_n'(x) = nb_n(x-x_0)^{n-1} + (n-1)b_{n-1}(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 2b_2(x-x_0) + b_1\,,$$

i ako opet uvrstimo u formulu (97) $x = x_0$ dobijamo da je $b_1 = P_n'(x_0)$. Nastavljajući analogno dalje indukcijom nalazimo da je

(98) $$b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{tako da je:}$$

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1} + \cdots + \frac{P_n'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + P_n(x_0)\,.$$

Sada bismo istu ideju hteli da primenimo sa proizvoljnom $(n+1)-$puta diferencijabilnom funkcijom u nekoj okolini $I_{x_0} \subseteq D$ tačke $x_0 \in D$. Preciznije tada ćemo imati,

(99) $$f(x) = P_n(x;x_0) + R_n(x;x_0)\,,$$

gde je

(100) $$P_n(x;x_0) = P_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1} + \cdots + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + f(x_0)\,,$$

Teylorov polinom $n-$tog stepena funkcije f u okolini tačke x_0, a $R_n(x;x_0) = R_n(x)$, je $n-$ti ostatak. Formula (99) zove se Tejlorova formula funkcije f. Ako izaberemo $x_0 = 0$ dobijamo Makloranovu formula funkcije f, tj.

(101) $$f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(x)^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,(x)^{n-1} + \cdots + \frac{f'(0)}{1!}\,(x) + f(0) + R_n(x)\,.$$

Ova ideja imaće smisla ako pod nekim uslovima ostatak $R_n(x)$ teži ka 0 kada $x \longrightarrow x_0$. Zato je potrebno opisati $n-$ti ostatak funkcije f i ispitati kada će se to desiti. Tako imamo sledeću teoremu.

Teorema 1. *Neka je funkcija f klase $\mathcal{C}^n$ na segmentu čiji su krajevi tačke x i x_0 i neka je $(n+1)-$puta diferencijabilna u svakoj tački intervala sa krajevima x i x_0. Tada za proizvoljnu funkciju ϕ, koja je neprekidna na tom segmentu i čiji se izvod ne anulira niti u jednoj njegovoj unutrašnjoj tački, postoji tačka ξ između x i x_0 takva da je*

(102) $$R_n(x;x_0) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(\xi)\,n!}\,f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n\,.$$

Posledica 1 (Oblici ostataka). Uz pretpostavke i oznake prethodne teoreme važi.

(Ko) *Košijev oblik ostatka:*

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi)\,(x-\xi)^n\,(x-x_0)\,.$$

(La) *Lagranžov oblik ostatka:*

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^{n+1}\,.$$

Dokaz. Ako u formuli (102) stavimo $\phi(t) = x - t$ dobijamo Košijev oblik ostatka, a izbor $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$ daje Lagranžov oblik. □

7. Lopitalovo pravilo

5.17. Lopitalovo (L'Hospital) pravilo. Lopitalovo pravilo koristi se za računanje limesa neodređenih oblika,

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0\,.$$

Neodređeni oblici $0/0$ i ∞/∞ rešavaju se pomoću Lopitalovog pravila, a ostali neodređeni oblici svode na jedan od ova dva oblika.

Teorema 1 (Lopitalovo pravilo). *Neka za date funkcije $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ koje su diferencijabilne na (a,b)*[15] *i $g'(x) \neq 0$ na (a,b) za koje važi*

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \qquad (-\infty \le \alpha \le +\infty).$$

Tada u svakom od slučajeva:

$$\text{(i1)} \quad \lim_{x\to a_+} g(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \text{(i2)} \quad \lim_{x\to a_+} g(x) = \infty\,.$$

važi da je $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Analogna tvrđenja važe uz analogne pretpostavke i u slučaj kada $x \longrightarrow b_-$.

Dokaz. Kako je $g'(x) \neq 0$. prema Lagranžovoj teoremi, $g(x)$ je strogo monotona na (a,b), sledi da je $g(x) \neq 0$ na intervalu (a,b). Tako da za $x, y \in (a,b)$ prema Košijevoj teoremi postoji tačka $c \in (x,y)$ takva da je

$$(103) \qquad \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{ili ekvivalentno} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\,.$$

Pređemo li u prethodnoj relaciji na limes kada $x \to a_+$ tada pogodnim izborom y koji će takođe težiti a_+ vidimo da u oba slučaja možemo postići da je

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(y)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0\,,$$

i pri tome kako x i y teže ka a_+, i c će težiti a_+, tako da obe strane poslednje jednakosti u (103) teže ka α. I dokaz je gotov. □

Primedba. Lopitalovo pravilo može se primeniti:

(i1) kada $x \to \pm\infty$ za neodređeni oblik ∞/∞ te za limese i izvode sleva i sdesna.

[15] $-\infty \le a < b \le +\infty$

(i2) više puta uzastopno ako se nakon njegove primene ponovo dobije jedan od neodređenih oblika $0/0$ ili ∞/∞ i ako dobijene funkcije ispunjavaju uslove prethodne teoreme.

(i3) i na ostale neodređene oblike, koji se pogodnim transformacijama mogu svesti na jedan od oblika $0/0$ ili ∞/∞.

Primer. (a) Limes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ kojeg smo izračunali pre korišćenjem nekih nejednakosti i teoreme o dva policajca možemo jednostavnije izračunati primenom Lopitalovog pravila,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \Big(\frac{0}{0}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Da li je moguće izračunati limes $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ primenom Lopitalovog pravila ?

(b) Sledeći primer zahteva primenu Lopitalovog pravila dva puta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Uopštenjem ovog primera matematičkom indukcijom lako možemo zaključiti da eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 raste brže od bilo koje stepene funkcije.

(c) U ovom primeru pokazujemo neke od transformacija koje je potrebno izvršiti na polaznim funkcijama dok ne dođemo do oblika na kojem možemo primeniti prethodnu teoremu. Računamo,

$$\lim_{x\to 0_+} x^x = \big(0^0\big) = \lim_{x\to 0_+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0_+} x\ln x}.$$

Primetimo, da smo u poslednjoj jednakosti koristili neprekidnost funkcije e^x. Sada nalazimo limes u eksponentu:

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \Big(\frac{-\infty}{+\infty}\Big) = \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} x = 0.$$

Dakle, traženi limes je $\lim\limits_{x\to 0_+} x^x = e^0 = 1$.

5.18. Monotonost i izvod. Na osnovu posledice Lagranžove teoreme (vidi **5.15** Posledica 1.), predznak izvoda na nekom intervalu određuje monotonost funkcije na tom istom intervalu. Podsetimo se da za diferencijabilnu funkciju f na intervalu (a,b) važi:

(i1) funkcija f je rastuća na intervalu (a,b) akko $f'(x)\geq 0$ za svaki $x\in(a,b)$,

(i2) funkcija f je opadajuća na intervalu (a,b) akko $f'(x)\leq 0$ za svaki $x\in(a,b)$

(i3) ako je $f'(x)>0$ za svaki $x\in(a,b)$ tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a,b),

(i4) ako je $f'(x)<0$ za svaki $x\in(a,b)$ tada je funkcija f strogo opadajuća na intervalu (a,b).

Primedba. Primetimo da prve dve tvrdnje ((i1) i (i2)) važe u oba smera (akko = ako i samo ako), dok za poslednje dve tvrdnje ((i3) i (i4)) važi samo nužnost (ali ne važi dovoljnost). Sledeći primer funkcije $y = x^3$ na čitavom skupu $\mathbb{R}$ pokazuje da kod poslednje dve tvrdnje ne važi dovoljnost, jer je data funkcija strogo rastuća na $\mathbb{R}$, ali je $y'(0) = 0$.

Primer. Odredimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$. Kako je $f'(x) = 6x^2 - 6$, funkcija f raste za $6x^2 - 6 \geq 0$, tj. $x^2 - 1 \geq 0$. Nakon rešavanja ove jednostavne nejednačine zaključujemo da je f rastuća na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$. Budući da je u prethodnoj nejednakosti jednakost važi samo za $x = -1$ i $x = 1$, zaključujemo da je na tim intervalima f strogo rastuća. Analogno, funkcija f opada za $x^2 - 1 \leq 0$, tj. f je strogo opadajuća na intervalu $(-1, 1)$.

8. Ekstremne vrednosti funkcije

5.19. Ekstremne vrednosti i izvod. Podsetimo se definicije ekstremne vrednosti funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f ima lokalni minimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako postoji okolina I_c^ε tačke c takva da je f neprekidna u toj okolini i da je $f(x) > f(c)$ za svaki $x \in I_c^\varepsilon$. Funkcija f ima globalni minimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako je $f(x) \geq f(c)$ za svaki $x \in D$.

Analogno, funkcija f ima lokalni maksimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako postoji okolina I_c^ε tačke c takva da je f neprekidna u toj okolini i da je $f(x) < f(c)$ za svaki $x \in I_c^\varepsilon$. Funkcija f ima globalni maksimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako je $f(x) \leq f(c)$ za svaki $x \in D$.

Primetimo da se u definiciji lokalnih ekstrema zahteva da je vrednost funkcije u tački ekstrema strogo najmanja ili najveća na nekoj okolini tačke c. S druge strane u definiciji globalnih ekstrema dozvoljeno je da se globalni ekstrem nalazi u više tačaka (štaviše sve tačke nekog intervala mogu biti ekstremne, npr. u slučaju funkcije $\mathrm{sgn}(x)$).

Za određivanja ekstremnih vrednosti neke funkcije f važna su nam njena analitička svojstva, tj. kojoj od klasa $\mathcal{C}^k$ funkcija pripada na svom domenu (ili delu domena). Neka je izvod funkcije f neprekidan (tj. funkcija f je klase $\mathcal{C}^1$) u tački c. Kažemo da je tačka c stacionarna tačka funkcije f ako je $f'(c) = 0$. Tačka c je kritična tačka funkcije f ako je c stacionarna ili ako f nije diferencijabilna u tački c.

Primetimo da je nužan uslov [16] dat u sledećoj modifikovanoj verziji Fermaove leme: *Ako je funkcija f neprekidna u tački c i ako u njoj ima lokalni ekstrem, tada je c kritična tačka funkcije f (ako je f diferencijabilna u c tada je $f'(c) = 0$).*

Primer. (a) Funkcija $f(x) = x^4$ ima lokalni (i globalni) minimum u tački $x = 0$ i primetimo da je $f'(x) = 2x$ pa je i $f'(0) = 0$.

(b) Funkcija $f(x) = |x|$ ima lokalni (i globalni) minimum u tački $x = 0$. Primetimo da ovo nije u suprotnosti sa (modifikovanom) Fermaovom lemom jer funkcije nije diferencijabilna u tački 0.

[16] Ispunjava ga svaka tačka u kojoj funkcija ima lokalnu ekstremnu vrednost.

(c) Za funkciju $f(x) = x^3$ važi da je $f'(x) = 3x^2$ tako da je $f'(0) = 0$. Ali, $f(0)$ nije lokalni ekstrem, odakle sledi da ne vredi obrat Fermaove leme. Jednostavnije rečeno svaka kritična (stacionarna[17]) tačka ne mora bit tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

Sada ćemo se baviti dovoljnim uslovima za postojanje lokalne ekstremne vrednosti, tj. uslovima koji moraju važiti u okolini (ili u samoj tački) da bi neka kritična tačka bila i tačka lokalnog ekstrema.

Teorema 1 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 1). *Ako prvi izvod f' funkcije f menja znak u kritičnoj tački c, tada funkcija f ima lokalni ekstrem u c. Štaviše vredi:*

(i1) *ako $f' < 0$ za sve $x \in (c-\varepsilon, c)$ i $f' > 0$ za sve $x \in (c, c+\varepsilon)$ tada u tački c funkcija f ima lokalni minimum,*

(i2) *ako $f' > 0$ za sve $x \in (c-\varepsilon, c)$ i $f' < 0$ za sve $x \in (c, c+\varepsilon)$ tada u tački c funkcija f ima lokalni maksimum.*

Dokaz. (i1) Ako je $f' < 0$ za sve $x \in (c-\varepsilon, c)$ i $f' > 0$ za sve $x \in (c, c+\varepsilon)$ tada funkcija f strogo pada na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ i strogo raste na intervalu $(c, c+\varepsilon)$. Prema tome, funkcija f ima u tački c lokalni minimum. Analogno se tretira i drugi slučaj. $\square$

Kriterijum iz prethodne Teoreme 1. zahteva poznavanje ponašanja izvoda funkcije na nekoj njenoj okolini. Ako funkcija f ima bolja analitička svojstva u kritičnoj tački, tj. ako u njoj postoje izvodi viših redova, tada je moguće dobiti drugi kriterijum uz korišćenje Tejlorove formule, u kojem je potrebno znati izvode viših redova u stacionarnoj tački. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema 2 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 2). *Neka je funkcija f n puta diferencijabilna u nekoj okolini I_c tačke c. Ako je $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, i $f^{(n)}(c) \neq 0$ tada*

(n) *ako je n neparan, funkcija f nema lokalni ekstremum u tački c,*

(p) *ako je n paran, funkcija f ima u tački c ima lokalni ekstremum i to lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$, i lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$.*

Dokaz. Prema Tejlorovoj formuli imamo,

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \alpha(x)(x-c)^n = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x)\right)(x-c)^n, \tag{104}$$

gde $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to c$. Budući da $f^{(n)}(c) \neq 0$ i $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to c$ suma $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x)$ ima znak kao i $f^{(n)}(c)$ (jer je član $\alpha(x)$ zanemariv u odnosu na $f^{(n)}(c)$ u okolini I_c^δ za dovoljno malo δ) kada je x dovoljno blizu c.

(n) Ako je n neparan tada izraz $(x-c)^n$ menja znak pri prolasku x kroz c[18] i na taj način menja se znak izraza desne strane jednakosti (104), a time, naravno, i njegove leve strani, odakle onda odmah sledi da u tački c funkcija f nema ekstremum.

[17] Ako je funkcija f klase barem $\mathcal{C}^1$ na nekoj okolini tačke c.

[18] Preciznije, $(x-c)^n$ je negativno na $(c-\delta, c)$ i pozitivno na $(c, c+\delta)$ ili obratno.

(p) Ako je n paran tada sličnom analizom kao u slučaju (n) zaključujemo da izraz $(x-c)^n$ ne menja znak pri prolasku x kroz c, tako da leva strana izraza (104) neće promeniti znak, odakle sledi da u tački c funkcija f ima ekstremum, i to lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$, i lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$. $\square$

Primer. Za funkciju $f(x) = x^2$, koja ispunjava uslove Teoreme 2 u tački $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$, a $f''(0) = 2 > 0$ pa u tački $x = 0$ nalazi lokalni minimum. Teoremu 2 ne možemo primeniti na funkciju $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$, jer nije diferencijabilna u toj tački. Teoremu možemo primeniti na funkciju $f(x) = x^3$ u tački $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, i $f'''(0) = 6$, i zaključiti da f nema ekstremuma u tački $x = 0$.

9. Konveksnost i konkavnost funkcija

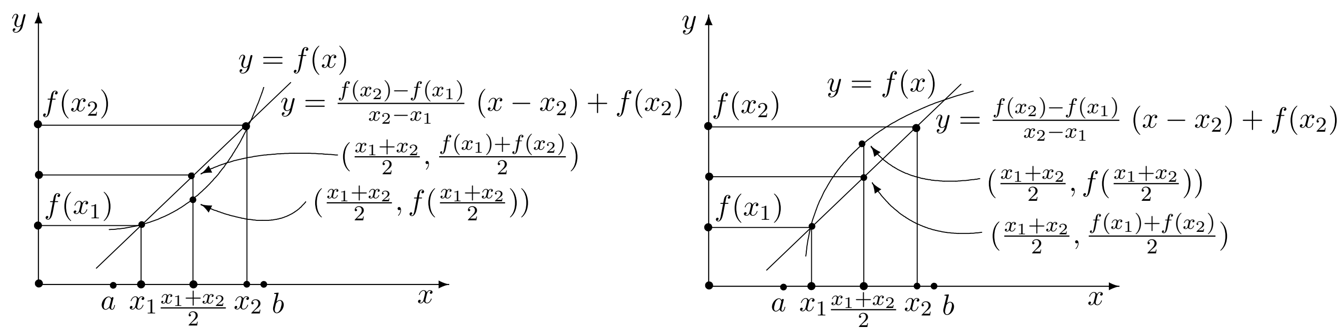
5.20. Zakrivljenost i izvod. U ovoj tački ispitujemo i opisujemo zakrivljenost (konkavnost i konveksnost) funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ u zavisnosti od njenih izvoda.
Kažemo da je funkcija f je konveksna na intervalu $(a, b) \subseteq D$ ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$ važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,.$$

Slično, funkcija f je konkavna na intervalu $(a, b) \subseteq D$ ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$ važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,.$$

U slučaju strogih nejednakosti u prethodnim nejednakostim funkcija f kažemo da je funkcija strogo konveksna odnosno strogo konkavna.



Slika 4. Konveksnost i konkavnost funkcije

Geometrijski smisao konveksnosti i konkavnosti vidi se na gornjoj slici (Slika 4), funkcija f je konveksna ako je grafik duži određene tačkama $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ iznad grafika funkcije $y = f(x)$, a funkcija f je konkavna ako je grafik duži određene tačkama $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ ispod grafika funkcije $y = f(x)$.

Konveksnost i konkavnost funkcije mogu se odrediti na osnovu znaka drugog izvoda funkcije f. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 1. *Neka je funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na intervalu $(a,b) \subseteq D$. Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a,b). Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a,b).*

Dokaz. Prema Tejlorovoj teoremi primenjenoj na tačku $c = (x_1 + x_2)/2$, i to prvo za $x = x_1$, a zatim za $x = x_2$, nalazimo

$$f(x_1) = f(c) + f'(c)(x_1 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\,(x_1 - c)^2 \tag{105}$$

$$f(x_2) = f(c) + f'(c)(x_2 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\,(x_2 - c)^2\,. \tag{106}$$

Kako je

$$x_1 - c = x_1 - \frac{x_2 + x_2}{2} = \frac{2\,x_1 - x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{2} = -(x_2 - c)\,, \tag{107}$$

sabiranjem jednakosti (105) i (106) uz korišćenje (107) konačno dobijamo,

$$f(x_1) + f(x_2) = 2\,f(c) + \frac{(x_1 - c)^2}{2}\,(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{(x_1 - c)^2}{4}\,(f''(\xi_1) + f''(\xi_2))\,. \tag{108}$$

Kako tačke $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ dobijamo da:

(i1) ako je $f''(x) > 0$ na (a,b) $\quad \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ $\quad$ tj. f je konveksna na (a,b).

(i2) ako je $f''(x) < 0$ na (a,b) $\quad \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ $\quad$ tj. f je konkavna na (a,b).

Time je dokaz završen. $\square$

Ova teorema daje samo potreban uslov, ali ne i dovoljan uslov zakrivljenosti. Na primer, funkcija $f(x) = x^4$ je konveksna na čitavom skupu $\mathbb{R}$, ali je $f''(0) = 0$. Od posebnog interesa su tačke u kojima se menja zakrivljenost, tj. neprekidna funkcija f ima prevojnu tačku c ako postoji okolina I_c^{ε} tačke c, takva da je f strogo konveksna na intervalu $(c-\varepsilon, c)$ i strogo konkavna na intervalu $(c, c+\varepsilon)$ ili obratno. Neophodan uslov za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

Teorema 2. *Ako funkcija f ima prevojnu tačku c i ako postoji $f''(c)$, tada je $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Kako $f''(c)$ postoji, iz definicije izvoda sledi da postoji i prvi izvod f' u nekoj okolini tačke c, a zatim i da je f' neprekidna u tački c. Neka funkcija f ima prevojnu tačku c i to npr. ako je strogo konveksna levo od tačke c i strogo konkavna desno od tačke c, tada je f' strogo rastuća levo od tačke c i strogo opadajuća desno od tačke c, tj. f' ima lokalni maksimum u tački c, pa prema Fermaovoj teoremi sledi da je $f''(c) = 0$. Analogno se tretira i drugi slučaj. $\square$

Prethodna teorema daje samo nužan, ali ne i dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke. Npr. za funkcije $f(x) = x^3$ i $f(x) = x^4$ važi $f''(0) = 0$, a samo prva funkcija ima prevojnu tačku $x = 0$, a druga nema. U sledećim teoremama bavimo se dovoljnim uslovima za postojanje prevojne tačke.

Teorema 3. *Neka je funkcija dva puta diferencijabilna na nekoj okolini I_c^ε tačke c, osim možda u tački c. Ako f'' menja znak pri prolasku kroz tačku c, tada je tačka c prevojna tačka funkcije f.*

Dokaz. Neka f'' menja znak u tački c, tada je prema Teorem 1 funkcija f konveksna levo od tačke c, a konkavna desno od tačke c, ili obratno, drugim rečima c je prevojna tačka funkcije f. $\square$

Primer. Za funkciju $f(x) = \tan x$ važi da je $f''(x) = (-2)\cos^{-3} x(-\sin x)$, odakle je $f''(0) = 0$. Očigledno je $f''(x) < 0$ za $-\pi/2 < x < 0$ i $f''(x) > 0$ za $0 < x < \pi/2$. Dakle, funkcija $\operatorname{tg} x$ je konkavna za $-\pi/2 < x < 0$ i konveksna za $0 < x < \pi/2$, tako da je tačka $c = 0$ prevojna tačka funkcije f.

Slično, kao i kod ispitivanja lokalnih ekstremuma, dovoljan uslov za prevojnu tačku može se dobiti korišćenjem izvoda višeg reda funkcije. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Neka je funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $\mathcal{C}^n$ na nekoj okolini, I_c, tačke c, pri čemu je $n \geq 3$ i neka je $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ i $f^{(n)}(c) \neq 0$. Ako je n neparan, tada funkcija f ima prevojnu tačku c.*

Dokaz. Analogan dokazu Teoreme 1. $\square$

Primetimo, prema **5.19** Teorema 2., ako je n paran i ako je uz to još i $f'(c) = 0$, tada funkcija f ima lokalni ekstremum u tački c i to minimum ako $f^{(n)}(c) > 0$ i maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$.

Primer. (a) Za funkciju $f(x) = x^4$ važi $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$. Kako je $f^{(4)}(0) > 0$, funkcija ima po **5.19** Teorema 2. lokalni minimum u tački $x = 0$.

(b) Za funkciju $f(x) = x^5$ važi $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, i $f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$. Kako je $n = 5$ neparan, prema prethodnoj teoremi sledi da funkcija ima prevojnu tačku u $x = 0$. U ovom slučaju radi se o *horizontalnoj prevojnoj tački*, jer je $f'(0) = 0$, pa je tangenta u prevojnoj tački paralelna sa x-osom.

(c) Za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ važi $f''(0) = 0$, i $f'''(0) = 2 \neq 0$, pa prema prethodnoj teoremi $x = 0$ je prevojna tačka. U ovom slučaju radi se o kosoj prevojnoj tački, jer je $1 = f'(0) \neq 0$, i tangenta u prevojnoj tački nije paralelna sa x-osom (gradi ugao $\pi/4$ sa x-osom).

10. Ispitivanje toka funkcija

5.21. Ispitivanje funkcija i skiciranje njihovog grafika. Ispitivanje funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ [19] je složena procedura u kojoj se primenjuje sve što smo do sada naučili o funkcijama, izvodima i sl. Ispitivanje funkcije $y = f(x)$ sastoji se od sledećih koraka:

1. Određivanje domena funkcije. Kako se obično funkcije zadaju pomoću elementarnih funkcija (kao njihove kompozicije, sume, razlike, proizvodi, količnici i sl.)

[19] Pretpostavljamo da je funkcija f barem neprekidna, a u praksi obično funkcija f ima bolja analitička svojstva, tj. ima izvode višeg reda.

potrebno je DOBRO poznavati elementarne funkcije, kao i rešavati jednačine i nejednačine u koje su sastavljene od elementarnih funkcija.

2. Parnost i neparnost. Potrebno je ispitati da li je funkcija parna ($f(-x) = f(x), \forall\, x \in D$) ili neparna ($f(-x) = -f(x), \forall\, x \in D$) na svom domenu, koji mora biti centralno simetričan s obzirom na 0 (ako domen D nije centralno simetričan tada funkcija svakako nije ni parna ni neparna). Ako je funkcija parna ili neparna na domenu D onda se ispitivanje funkcije svodi na njeno ispitivanje na skupu $\mathbb{R}_0^+ \cap D$. Većina funkcija nije ni parna ni neparna.
3. Periodičnost. Potrebno je proveriti da li je funkcija f, periodična, tj. da li postoji osnovni period[20] $T > 0$ takav da je $f(T + x) = f(x), \forall\, x \in D$. Ako je funkcija periodična onda je dovoljno da funkciju ispitamo na intervalu dužine T, jer onda znamo sve o funkciji na čitavom domenu D. Većina funkcija nije periodična.
4. Nule funkcije. Pokušavamo da odredimo tačno ili da lociramo nule jednačine $f(x) = 0$, koristeći neprekidnost i Bolcano-Košijevu teoremu (vidi tačku **4.9**)
5. Ispitivanje funkcije na rubovima domena. Ova tačka prvo podrazumeva da odredimo granice domena, kojeg smo odredili u tački 1, a zatim da odredimo asimptote: vertikalne, horizontalne i kose. Određivanje asimptota svodi se na nalaženje određenih limesa.
   (v) Vertikalne asimptote su prave čija je jednačina $x = a$, pri čemu funkcija f nije definisana u tački $a \in \mathbb{R}$, ali jeste barem u jednoj od okolina $(a-\varepsilon, a)$ ili $(a, a+\varepsilon)$, i pri tome je barem jedan od $\lim_{x\to a_+} f(x)$ i $\lim_{x\to a_-} f(x)$ jednak $\pm\infty$. Npr. funkcija $y = \tan(x)$ ima beskonačno mnogo vertikalnih asimptota i to su sve prave $x_k = \pi/2 + k\,\pi$, gdje je k proizvoljan celi broj.
   (h) Horizontalne asimptote su prave čija je jednačina $y = b$, ako postoji i ako je barem jedan od $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ jednak b. Funkcija može imati najviše dve horizontalne asimptote i to ako je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_1 \neq b_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Npr. funkcija $\arctan(x)$ za koju važi $\pi/2 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $-\pi/2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   (k) Kose asimptote postoje ako se funkcija f ponaša u beskonačnosti kao prava $y = k\,x + l$, $k \neq 0$. Ako kosa asimptota postoji kada $x \to +\infty$ tada je

$$0 \neq k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\,x).$$

   Iste formule važe ako postoji kosa asimptota kada $x \to -\infty$. Jasno, funkcija f može imati najviše dve kose asimptote. Napomenimo, da ako postoji horizontalna asimptota funkcije f kada $x \to +\infty$ tada ne postoji kosa asimptota funkcije f kada $x \to +\infty$, i obratno[21]. Isto važi i za horizontalne i kose asimptote funkcije f kada $x \to -\infty$.

[20] Najmanji pozitivan realni broj P takav da je $f(P + x) = f(x), \forall\, x \in D$

[21] Ako postoji kosa asimptota funkcije f kada $x \to +\infty$ tada ne postoji horizontalna asimptota funkcije f kada $x \to +\infty$,

6. Ekstremne vrednosti. Potrebno je naći sve lokalne ekstremne vrednosti funkcije f koristeći rezultate tačke **5.19.** Da bismo odredili lokalne ekstremume funkcije f (ako je ona diferencijabilna) potrebno je pronaći sve njene stacionarne tačke što uključuje:
   (a1) određivanje izvoda funkcije f
   (a2) određivanje domena prvog izvoda f',
   (a3) određivanje nula funkcije f', tj. potrebno je rešiti jednačinu $f'(x) = 0$,
   (a4) proveriti, korišćenjem Teorema 1. i 2. iz tačke **5.19**, koja od stacionarnih tačaka je ekstremna tačka.
7. Intervali monotonosti. Intervali monotonosti određuju se primenom **5.15** Posledica 1 na izvod funkcije f' nakon što smo ga izračunali u prethodnoj tački 6. Drugim rečima potrebno je ispitati znak funkcije f' na intervalima određenim stacionarnim tačkama (presečenim sa domenom funkcije f), koje smo izračunali u prethodnoj tački 6.
8. Prevojne tačke. Slično kao i kod traženja ekstremalnih vrednosti, za određivanje prevojnih tačaka funkcije f potrebno je:
   (a1) odrediti drugi izvod funkcije f, tj. funkciju f'',
   (a2) odrediti domen funkcije f'',
   (a3) odrediti nula funkcije f'', tj. potrebno je rešiti jednačinu $f''(x) = 0$,
   (a4) proveriti, korišćenjem Teorema 3. i 4. iz tačke **5.20**, koje od rešenja jednačine $f''(x) = 0$ je prevojna tačka funkcije f.
9. Intervali zakrivljenosti. Određivanje intervala zakrivljenosti, analogno je određivanju intervala monotonosti, samo je potrebno uraditi analogno ispitivanje funkcije f'' (umesto funkcije f'). Potrebno je ispitati znak funkcije f'' jer prema Teoremi 1 iz **5.20.** o tom znaku zavisi da li je funkcije f konveksna ($f''(x) > 0$) ili konkavna ($f''(x) < 0$) na nekom intervalu. Dakle, potrebno je ispitati znak funkcije f'' na intervalima određenim rešenjima jednačine $f''(x) = 0$ (presečenim sa domenom funkcije f), koje smo izračunali u prethodnoj tački 8.
10. Grafik funkcije. Na osnovu svih podataka dobijenih u prethodnim tačakama o funkciji f potrebno je skicirati suvislu sliku.
    Napomenimo da prilikom crtanja grafika funkcije moguće je otkriti neke pogreške u prethodnim računima, i nakon toga ih otkloniti.

5.22. Primer. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

1. Domen funkcije je $D = \mathbb{R}$.

2. Parnost. Kako je $f(-1) = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$, a $f(1) = \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1} = 1$, zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna jer za sve $x \in D$ ne važi ni da je $f(-x) = f(x)$(npr. za $x = 1$) ni da je $f(-x) = -f(x)$(npr. za $x = 1$).

3. Periodičnost. očigledno funkcija nije periodična jer polinomi stepena većeg ili jednakog 1 nisu periodične funkcije.

4. Nule funkcije. Rešimo jednačinu $y=0$. Imamo,

$$\sqrt[3]{2x^2-x^3}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^2-x^3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2(2-x)=0,$$

odakle sledi da su nule funkcije $x_1=0$ i $x_2=2$.

5. Asimptote. Funkcija *nema vertikalnih asimptota* jer je $D=\mathbb{R}$. Ispitajmo da li postoje horizontalne asimptote. Računamo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=(\pm\infty)\cdot(-1)=\mp\infty$$

odakle sledi da *funkcija nema horizontalnih asimptota* (ni u $-\infty$ ni $+\infty$). Ispitajmo da li funkcija ima kosih asimptota, tako redom imamo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1\equiv k.$$

Dalje,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-kx=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x=(+\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)=(-\infty\cdot 0)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-2/3}=\frac{2}{3}\equiv l.$$

Dakle, prava $y=-x+\frac{2}{3}$ je kosa asimptota i u $-\infty$ i u $+\infty$.

6. Ekstremalne vrednosti. Nađimo prvi izvod:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-2/3}(4x-3x^2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x(4-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}.$$

Domen funkcije f' je $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. Dakle, dve kritične tačke funkcije su $x_1=0$ i $x_2=2$. Za $x\in\mathcal{D}_{f'}$ imamo,

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}\ ,$$

odakle vidimo da je stacionarna tačka (tj. treća kritična tačka) jednaka $x_3=4/3$. Prema tome, imamo tri tačke koje zadovoljavaju nužan uslov za egzisenciju ekstremuma, tj. u kojima funkcija može imati lokalne ekstremume. Da bismo proverili koja od kritičnih tačaka jeste ekstremum koristimo Teoremu 1 iz **5.19.**, tj. proverićemo da li u kritičnim tačkama prvi izvod menja znak. Imamo tri slučaja:

(i1) za $x<0$ brojilac je pozitivan, a imenilac je negativan, tako da je $f'(x)<0$. Drugim rečima, funkcija f je strogo opadajuća na intervalu $(-\infty,0)$,

(i2) za $x\in(0,4/3)$ imenilac i brojilac su pozitivni, pa je $f'(x)>0$, tj. funkcija f je strogo rastuća na intervalu $(0,4/3)$.

(i3) za $x>4/3$ je brojilac negativan, a imenilac pozitivan, tako da je $f'(x)<0$, dakle funkcija f je strogo opadajuća na intervalu $(4/3,+\infty)$.

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da:

(i1) funkcija *ima lokalni minimum* u kritičnoj tački $x_1 = 0$ i vrednost lokalnog minimuma je $f(0) = 0$,

(i2) funkcija *ima lokalni maksimum* u kritičnoj tački $x_3 = 4/3$, i vrednost lokalnog maksimuma je $f(4/3) = 2\sqrt[3]{4}/3$,

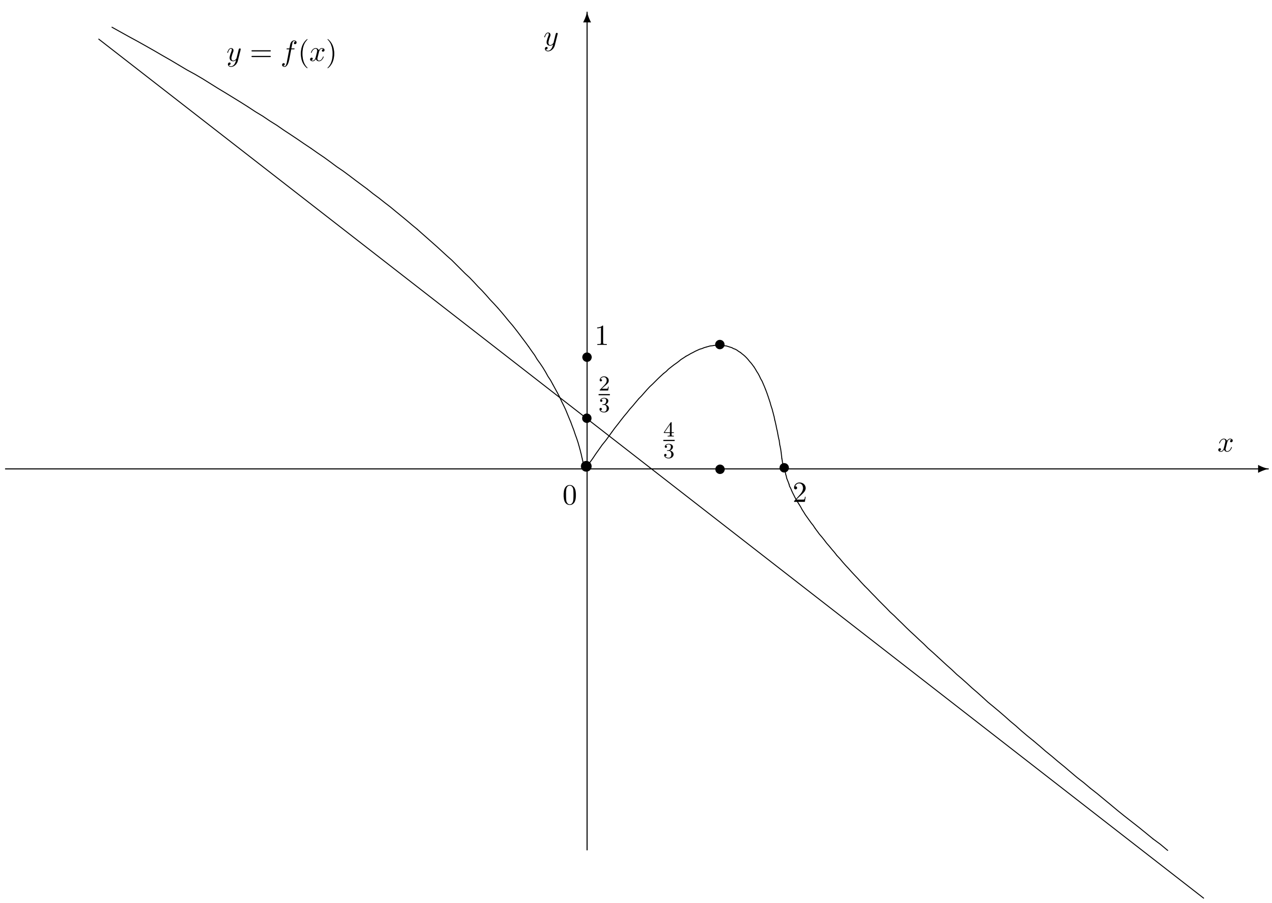
(13) funkcija *nema lokalni ekstremum* u kritičnoj tački $x_2 = 2$, jer prva izvod ne menja znak u toj tački.

Funkcija nema globalni maksimum ni globalni minimum jer je kodomen jednak $\mathbb{R}$.

7. Intervali monotonosti. Monotonost funkcije smo praktički već ispitali u prethodnoj tački: funkcija je strogo opadajuća na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(4/3, +\infty)$, a strogo rastuća na intervalu $(0, 4/3)$.

8. Prevojne tačke. Da bismo ispitali da li funkcija ima prevojnih tačaka moramo prvo izračunati drugi izvod funkcije f. Tako nalazimo,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - \frac{4-3x}{3[x(2-x)^2]^{2/3}}[(2-x)^2 + x \cdot 2(2-x)(-1)]}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(x(2-x)^2) - \frac{1}{3}(4-3x)(2-x)(2-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^8}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}\,, \end{aligned}$$



Slika 5. Grafik funkcije

odakle vidimo da je domen funkcije f'' jedna $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = D_{f'}$. Drugi izvod nema nula i jedine tačke u kojima funkcija f može imati prevojnu tačku su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Da bismo odredili da li se radi o prevojnim tačkama koristićemo Teoremu 3. iz **5.20.** Kako je znak od f'' suprotan od znaka izraza $2 - x$, sledi da za $x < 2$ je $f''(x) < 0$, a za $x > 2$ je $f''(x) > 0$. Dakle, funkcija f'' menja znak pri prolasku kroz tačku $x = 2$, tako da je ona jedina prevojna tačka funkcije f.

9. Intervali zakrivljenosti. Na ovo pitanje smo odgovorili u prethodnoj tački u kojoj smo analizirali drugi izvod funkcije f. Kako je $f''(x) < 0$, za $x < 2$, sledi da je funkcija f konkavna na intervalu $(-\infty, 2)$ i kako je $f''(x) > 0$ za $x > 2$, sledi da je funkcija f konveksna na intervalu $(2, +\infty)$.

10. Grafik funkcije. Kombinuju ci sve prethodne rezultate dobijamo grafik date funkcije koji je prikazan na Slika 5.

11. Zadaci

5.23. Ispitajte sledeće funkcije i skicirajte njihove grafike;

(i1) $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

(i2) $f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right)$,

(i3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

(i4) $f(x) = x^{2/3}(1 + x)^3$,

(i5) $f(x) = (x - 1)e^{\frac{x+1}{x-1}}$,

(i6) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 3x - 4}}$,

(i7) $f(x) = xe^{-\frac{x}{4} + \frac{3}{4x}}$.

GLAVA 6

Integralni račun

1. Neodređeni integral

6.1. Definicija. Kao što smo videli u ranijim glavama, kada imamo neku operaciju prirodno se postavlja pitanje egzistencije i nalaženja njene inverzne operacije. Diferenciranje je zapravo linearno preslikavanje[1] sa skupa, $\mathcal{C}^k(D),\ k \geq 1$, $k-$puta diferencijabilnih funkcija na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$ na skup $\mathcal{C}^{k-1}(D'), D' \subseteq D,\ k \geq 1$, tj.

$$\frac{d}{d\,x} : \mathcal{C}^k(D) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(D').$$

Preciznije, neka je $f(x) = \frac{d}{d\,x}\,F(x) = F'(x)$ na skupu D, tada kažemo da je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija (antiizvod, antiderivacija) funkcije $f(x)$ na skupu D[2]. Mi ćemo za D obično uzimati segment $[a, b]$.

Propozicija 1. *Ako su F i F_1 primitivne funkcije, funkcije f na D tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da je $F(x) = F_1(x) + C$ na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Kako je $f(x) = F'(x) = F_1'(x)$ na D, tada je $F'(x) - F_1'(x) = 0$, i na osnovu neke ranije Propozicije $F(x) - F_1(x) = C$, za neko $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Dakle, ako je F neka primitivna funkcija funkcije f na D, tada postoji čitava familija funkcija, parametrizovana skupom $\mathbb{R}$, koje su primitivne funkcije od f. I pod oznakom $\int f(x)\,dx$ podrazumevamo taj čitav skup primitivnih funkcija od f i zovemo ga **neodređeni integral** funkcije f,

$$\int f(x)\,d\,x = \{F(x) + C |\, C \in \mathbb{R}\} = \{\text{ili kraće}\} = F(x) + C, \tag{109}$$

njen neodređeni integral na (a, b).

6.2. Neka svojstva neodređenih integrala i tabela elementarnih integrala. Kako je diferenciranje inverzna operacija od traženja integrala mnoge osobine diferenciranja prenose se i na integralenje.

Propozicija 2. *Neka je F primitivna funkcija od f na D. Tada je*

(i1) $d(\int f(x)\,d\,x) = f(x)\,d\,x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d}{d\,x}(\int f(x)\,d\,x)) = f(x)$,

(i2) $\int dF(x) = F(x) + C = \int f(x)\,d\,x$.

(i3) $\int k\,f(x)\,d\,x = k\,F(x) = k\,(\int f(x)\,d\,x)$.

[1] tj. linearni operator

[2] ili kraće primitivna funkcija od f na D.

(i4) *Neka je G primitivna funkcija od g na D tada je*
$$\int (f(x) \pm g(x))d\,x = \int f(x)\,d\,x \pm \int g(x)\,d\,x = F(x) \pm G(x) + C.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz činjenice da je neodređeni integral inverzna operacija od diferenciranja. Pokažimo još npr. (i4) Iz $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ sledi da je $F+G$ primitivna funkcija od $f+g$, i primena (i2) na $F+G$ daje traženu jednakost. $\square$

Sada koristeći Tabelu izvoda elementarnih funkcija lako dobijamo sledeću tabelu elementarnih integrala.

Tabela elementarnih integrala

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}\, x^{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int a\,dx = a\,x + C,\ a \in \mathbb{R}.$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$\int \cos x = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C,$	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C,$	
Eksponencijalna funkcija	Logaritamska funkcija
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{arsh} x + C$
$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arch} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{arth} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + C$	

Primetimo da se osnovna metoda za određivanje neodređenih integrala sastoji iz sledeća dva koraka:

(i1) Koristeći znanja o izvodima napišemo tabelu osnovnih neodređenih integrala elementarnih funkcija.

(i2) Pomoću pravila (od kojih zasada znamo samo neka) i svojstava neodređenih integrala polazni neodređeni integral svodimo na poznate (zasada na one iz Tabele, a kasnije na one koje smo već izračunali).

Primeri. Izračunajmo, sledeće neodređene integrale:

(i1) $$\int x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\,dx=\int x^{1+\frac12+\frac14+\frac18+\frac1{16}}\,dx=\int x^{\frac{31}{16}}\,dx=\frac{x^{\frac{31}{16}+1}}{\frac{31}{16}+1}+C=\frac{16}{47}\,x^{\frac{47}{16}}+C.$$

(i2) $$\int\frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,dx=\int\frac{2-x+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\int\frac{2}{x^2}\,dx-\int\frac1x\,dx+\int\frac{2}{x^{\frac32}}\,dx-\int\frac{1}{x^{\frac12}}\,dx$$
$$=-\frac{2}{x}-\ln|x|-4\,x^{-\frac12}-2\,x^{\frac12}+C.$$

2. Osnovne metode integracije neodređenog integrala

6.3. Smena promenljive. U ovoj tački skup pravila neodređenog integrala obogaćujemo jednim od najvažniji pravila.

Teorema. *Neka je $F:D\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f i neka je $g:D'\longrightarrow A$ funkcija klase $\mathcal{C}^1$ na D'. Tada postoji primitivna funkcija za funkciju*

$$f(g(x))\,g'(x):D'\longrightarrow\mathbb{R}\qquad\text{i važi formula}\qquad\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=F(g(x))+C.$$

Dokaz. Iz
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(g(x))\,g'(x)\,dx\right)=f(g(x))\,g'(x)=F'(g(x))\,g'(x)=\frac{d}{dx}\left(F(g(x))+C\right),$$
sledi da je funkcija $F(g(x))+C$ primitivna funkcija od $f(g(x))\,g'(x)$. Prema tome,
$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=F(g(x))+C.$$
□

Ova teorema omogućuje da uvedemo smenu u neodređenom integralu na sledeći način
$$t=g(x)\quad\Longrightarrow\quad dt=d(g(x))=g'(x)dx,\quad\text{tako da je}$$
$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt=F(t)+C\,.$$

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale, pretpostavljajući da je $a\neq 0$, a u (i6) da je $a>0$. Napomenimo da za nalaženje nekih integrala koristimo rešenja prethodnih, npr. rezultat iz (i4) koristimo u (i5), a (i5) u (i6).

(i1) $$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\left\{\begin{array}{c}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\end{array}\right\}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$
$$=\ln\frac{1}{|\cos x|}+C\,.$$

(i2) $\displaystyle\int x^k\, e^{x^{k+1}}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x^{k+1} = t \\ (k+1)\, x^k\, dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{k+1} \cdot e^t = \frac{e^t}{k+1} + C = \frac{e^{x^{k+1}}}{k+1} + C, \quad k \in \mathbb{N}.$

(i3) $\displaystyle\int f(a\,x+b)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} a\,x+b=t \\ a\,dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int f(t)\, dt = \frac{1}{a}\, F(t) + C = \frac{1}{a}\, F(a\,x+b) + C.$

(i4) $\displaystyle\int \cos(a\,x+b)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} a\,x+b=t \\ a\,dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \cos t\, dt = \frac{1}{a}\, \sin t + C = \frac{1}{a}\, \sin(a\,x+b) + C.$

(i5) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{\cos 2\,x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

(i6) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a\, \sin t \\ dx = a\, \cos t\, dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\, \sin^2 t}\, a\, \cos t dt = \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\; a\, \cos t$

$$= a^2 \int |\cos t|\, \cos t\, dt = \begin{cases} a^2 \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2\,t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t > 0. \\ -a^2 \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2\,t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t < 0. \end{cases}$$

Napomenimo da ćemo se u slučajevima poput (i6) u daljnjem tekstu ograničavati samo na prvi slučaj [3] ($\sqrt{h(x)^2} = h(x)$, $h(x) \geq 0$), vodeći računa da postoji i drugi slučaj ($\sqrt{h(x)^2} = -h(x)$, $h(x) \leq 0$).

6.4. Parcijalna integracija. Parcijalna integracija je jedna od najvažnijih metoda integracije, koja je posledica Lajbnicove formule za izvod proizvoda funkcija. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema. *Neka su f i g diferencijabilne funkcije na D i neka postoji primitivna funkcija za $f'\, g$, tada postoji primitivna funkcija i za funkciju $f\, g'$ na D i važi formula*

$$\int f(x)\, g(x)'\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Dokaz. Iz Lajbnicove formule,

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x),$$

integracijom obe strane nalazimo

$$f(x)g(x) = \int (f(x)\, g(x))' dx = \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx,$$

odakle sledi formula. □

Ponekad se ova formula zapisuje na sledeći način,

$$\int f(x)\, d(g(x))\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, d(f(x))\, dx\,.$$

6.5. Primeri. Izračunajmo sada nekoliko tipičnih integrala metodom parcijalne integracije.

[3] radi jednostavnijeg zapisa.

(i1) $\displaystyle\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\ln x & df=\frac{1}{x}\,dx \\ dg=dx & g(x)=x \end{array} \right\} = x\,\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x(\ln x-1)+C\,.$

(i2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=x & df=dx \\ dg=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} & g(x)=-\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = -x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \mathbf{6.3}(\mathrm{i6}) =$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

(i3) $\displaystyle\int x^2\arcsin(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\arcsin(x) & df=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dg=x^2\,dx & g(x)=\frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t=1-x^2 \\ dt=-2\,x\,dx \end{array} \right\} = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6}\int\frac{1-t}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6}\left(\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt\right.$$

$$\left.+\int t^{\frac{1}{2}}\,dt\right) = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{1}{9}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C = \frac{x^3\arcsin(x)}{3} + \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\,(2+x^2)+C.$$

(i4) $\displaystyle I=\int e^x\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\sin x & df=\cos x\,dx \\ dg=e^x\,dx & g(x)=e^x \end{array} \right\} = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\cos x & df=-\sin x\,dx \\ dg=e^x\,dx & g(x)=e^x \end{array} \right\} = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x-\cos x)-I,$$

odakle sledi da je: $\quad I=\dfrac{1}{2}\,e^x(\sin x-\cos x)+C.$

(i5) $\displaystyle\int x\arcsin(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)=\arcsin(x) & df=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dg=x\,dx & g(x)=\frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2\arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= (\mathrm{i2}) = \frac{x^2\arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin(x)}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2\arcsin(x)}{2} - \frac{\arcsin(x)}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

(i6) $\displaystyle\int e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x)\,dx, \quad \alpha\,\beta\neq 0,$

(i7) $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx$

(i8) $\displaystyle\int x^n\,e^x\,dx$

3. Integracija racionalnih funkcija

6.6. Integracija racionalnih funkcija. Kao što znamo svaka racionalna funkcija ima oblik

$$(110) \qquad R(x)=\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+\cdots+b_1\,x+b_0}=A(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

pri čemu je $A(x)$ polinom stepena $n-m$ ako je $n \geq m^4$, a $P(x)/Q(x)$ je prava racionalna funkcija, tj. ona kod koje je $\partial P < \partial Q$. Svaka prava racionalna funkcija može predstaviti u vidu sume parcijalnih ralomaka tj. kao

$$(111) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_j^i}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_j^i x + C_j^i}{(x^2+p_i x+q_i)^j}\,, \quad \text{ako je}$$

$$Q(x) = b_m\,(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}$$

gde je $\alpha_1,\cdots,\alpha_k \in \mathbb{R}$, $p_1,\ldots,p_t, q_1\ldots,q_t \in \mathbb{R}$ i $p_i^2-4q_i<0$, za svako $i=1,\ldots,t$, i $m = r_1+\cdots+r_k+2\,(s_1+\ldots s_t)$.

Iz formula (110) i (111), kao iz linearnosti integrala, jasno je da se problem izračunavanja neodređenog integrala racionalnih funkcija svodi na izračunavanje neodređenih integrala parcijalnih razlomaka

$$(112) \qquad \frac{A}{(x-\alpha)^j}\,, \qquad \text{i} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+p\,x+q)^j}\,, p^2-4\,q<0.$$

Nalaženjem neodređenih integrala parcijalnih razlomaka rešeno je u sledećoj propoziciji.

Propozicija. Za neodređene integrale parcijalnih razlomaka važi:

(i1) $$\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}\,dx = \frac{A}{(1-j)(x-\alpha)^{j-1}} + K, \quad K\in\mathbb{R}, j>1,$$

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\,\ln|x-\alpha| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(i2) $$\int \frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)}\,dx = \frac{B}{2}\,\ln(x^2+p\,x+q) + \frac{2\,C-B\,p}{\sqrt{4q-p^2}}\,\arctan\frac{2\,x+p}{\sqrt{4\,q-p^2}} + K.$$

$B, C, p, q, K \in \mathbb{R}$.

(i3) Ako uvedemo oznake $I_j = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^j}$ i $J_j = \displaystyle\int \frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx$,

tada za integrale I_j i J_j vaše rekurentne veze

$$I_j = \frac{2\,x+p}{(j-1)(4\,q-p^2)(x^2+p\,x+q)^{j-1}} + \frac{2\,(2\,j-3)}{(j-1)(4\,q-p^2)}\,I_{j-1}, \quad j=1,2,\ldots$$

$$J_j = \frac{B}{2\,(1-1)(x^2+p\,x+q)^{j-1}} + (C-\frac{1}{2}\,B\,p)\,I_j, \quad j=1,2,\ldots$$

Dokaz. (i1) Slučaj $j=1$ nalazi se u tabeli, a za $j>1$ imamo

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^j}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t = x-\alpha \\ dt = dx \end{array}\right\} = A\int\frac{dt}{t^j} = \frac{A}{1-j}\,t^{-j+1} + K = \frac{A}{1-j}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{j-1}} + K\,.$$

[4] ako je $m > n$ onda je $A = 0$.

(i2) za $j=1$ primetimo da je

$$\frac{B\,x+C}{x^2+p\,x+q}=\frac{B}{2}\;\frac{2\,x+p}{x^2+p\,x+q}+\frac{C-\frac{1}{2}\,B\,p}{x^2+p\,x+q}=\frac{B}{2}\;\frac{2\,x+p}{x^2+p\,x+q}+\frac{C-\frac{1}{2}\,B\,p}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4\,q-p^2}{4}}\;,$$

tako da imamo

$$\begin{aligned}\int\frac{B\,x+C}{x^2+p\,x+q}\,dx \;&=\; \frac{B}{2}\int\frac{2\,x+p}{x^2+p\,x+q}\,dx+(C-\frac{1}{2}\,B\,p)\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4\,q-p^2}{4}}=\left\{\begin{array}{l} t=x^2+p\,x+q\\ dt=(2\,x+p)\,dx\end{array}\right\}\\ &\left\{\begin{array}{l} u=x+p/2\\ du=dx\end{array}\right\}=\frac{B}{2}\;\ln(x^2+p\,x+q)+\frac{2\,C-B\,p}{\sqrt{4\,q-p^2}}\;\arctan\frac{2\,x+p}{\sqrt{4\,q-p^2}}+K\end{aligned}$$

Nađimo sada J_j

$$\begin{aligned}J_j=\int\frac{B\,x+C}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx \;&=\; \frac{B}{2}\int\frac{2\,x+p}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx+(C-\frac{1}{2}\,B\,p)\int\frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^j}=\left\{\begin{array}{l} t=x^2+p\,x+q\\ dt=(2\,x+p)\,dx\end{array}\right\}\\ &=\frac{B}{2}\int\frac{dt}{t^j}+(C-\frac{1}{2}\,B\,p)\,I_j=\frac{B}{2\,(1-j)}\;\frac{1}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+(C-\frac{1}{2}\,B\,p)\,I_j\,.\end{aligned}$$

Na kraju nalazimo rekurentnu vezu za I_j.

$$\begin{aligned}I_{j-1}\;&=\;\int\frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}=\left\{\begin{array}{ll} f(x)=(x^2+p\,x+q)^{-j+1} & dg=dx\\ df=(-j+1)(2\,x+p)(x^2+p\,x+q)^{-j}\,dx & g(x)=x\end{array}\right\}=\\ &=\frac{x}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+(j-1)\int\frac{2\,x^2+p\,x}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx=\frac{x}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}\\ &\quad+2\,(j-1)\int\frac{x^2+p\,x+q-\frac{p}{2}\,x-q}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx=\frac{x}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+2\,(j-1)I_{j-1}\\ &\quad-\frac{(j-1)\,p}{2}\int\frac{(2\,x+p)+(\frac{4\,q}{p}-p)}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx=\frac{x}{(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+2\,(j-1)I_{j-1}+\frac{p}{2\,(x^2+p\,x+q)^{j-1}}\\ &\quad-\frac{(j-1)(4\,q-p^2)}{2}\;I_j\;,\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$I_j=\frac{2\,x+p}{(j-1)(4\,q-p^2)(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+\frac{2\,(2\,j-3)}{(j-1)(4\,q-p^2)}\;I_{j-1}\,. \qquad \square$$

6.7. Primeri. Primeri (i1)-(i4) korišćeni su u dokazu prethodne leme.

(i1) $$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1}\,dx=\left\{\begin{array}{l} x=t\,a\\ dx=a\,dt\end{array}\right\}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\;\arctan\frac{x}{a}+C\,.$$

(i2) $$\int\frac{x\,dx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\,x}{x^2+a^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l} t=x^2+a^2\\ dt=2\,x\,dx\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\;\ln(x^2+a^2)+C\,.$$

(i3) $\displaystyle\int \frac{2\,x+p}{x^2+p\,x+q}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+p\,x+q \\ dt = (2\,x+p)\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln(x^2+p\,x+q)+C, \quad p^2-4\,g<0.$

(i4) $\displaystyle\int \frac{2\,x+p}{(x^2+p\,x+q)^j}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+p\,x+q \\ dt = (2\,x+p)\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^j} = \frac{1}{(1-j)(x^2+p\,x+q)^{j-1}}+C\,.$

(i5) $\displaystyle\int \frac{x^4+3\,x^3-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(x^2+x-3+\frac{5\,x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3\,x+\int \frac{5\,x+2}{(x+1)^2}\,dx = (*)$

kako je $\displaystyle\frac{5\,x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A+A\,x+B}{(x+1)^2}$ odakle nalazimo $A+B=2,\ A=5,\ B=-3,$

tako da imamo $\displaystyle\int \frac{5\,x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{5\,dx}{x+1} - \int \frac{3\,dx}{(x+1)^2}\,dx = 5\ln|x+1| + \frac{3}{x+1}+C\,.$

i konačno $\displaystyle\int \frac{x^4+3\,x^3-1}{(x+1)^2}\,dx = (*) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3\,x+5\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+C\,.$

(i6) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x \Big)+C$

(i7) $\displaystyle\int \frac{3\,x-1}{x^2+5\,x+6}\,dx = 10\ln(3+x)-7\ln(2+x)+C.$

6.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija. Ova tačka pokazuje važnost integrala racionalnih funkcija jer se i neke klasa integrala iracionalnih funkcija pogodnim smenama svode na integrale racionalnih funkcija koje znamo da rešimo.

(i1) Neka je R racionalna funkcija u $k+1$ promenljivoj tada integral oblika

$$(113)\quad \int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}, \ldots,\ \sqrt[n_k]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}} \right) dx \qquad n_1,n_2,\ldots,n_k \in \mathbb{N}.$$

rešavamo smenom

$$t^n = \frac{a\,x+b}{c\,x+d} \quad \text{gde je } n = NZS(n_1,\ldots,n_k). \text{ Tada je}$$

$$x = \frac{b-t^n\,d}{t^n\,c-a} \quad \text{i} \quad dx = \frac{(a\,d-b\,c)\,nt^{n-1}}{(c\,t^n-a)^2}\,dt\,. \quad \text{Nakon smene integral (113) postaje}$$

$$\int R\left(\frac{b-t^n\,d}{t^n\,c-a}, t^{m_1}, t^{m_2}, \ldots, t^{m_k} \right) dx \qquad m_i = \frac{n}{n_i},\ i=1,\ldots,n.$$

Primetimo da je poslednji integral, integral racionalne funkcije (u t), time je pokazano da se ova klasa integrala iracionalnih funkcija svodi na integraciju racionalnih funkcija.

(i2) Neka je R racionalna funkcija u dve promenljive, tada se integral

(114) $$\int R\left(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\right)\,dx\,,$$

može svesti na integral racionalne funkcije jednom od Ojlerovih (Euler) smena

(a) ako je $a>0$ koristimo smenu: $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t-\sqrt{a}\,x$, iz koje nalazimo

$x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$ i $dx=\dfrac{2\,(b\,t+\sqrt{a}\,(t^2+c))}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$ odakle sledi da je integral (114)

$$\int R\left(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\right)\,dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, t\right)\frac{2\,(b\,t+\sqrt{a}\,(t^2+c))}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$$

integral racionalne funkcije.

(b) ako je $c>0$ koristimo smenu: $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=x\,t-\sqrt{c}$, iz koje nalazimo

$x=\dfrac{2\sqrt{c}\,t+b}{t^2-a}$ i $dx=-\dfrac{2\,(a\sqrt{c}+t\,(b+\sqrt{c}\,t))}{(a-t^2)^2}\,dt$ odakle sledi da je integral

(114) $$\int R\left(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\right)\,dx=$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}\,t+b}{t^2-a}, t\,\frac{2\sqrt{c}\,t+b}{t^2-a}-\sqrt{c}\right)\frac{-2\,(a\sqrt{c}+t\,(b+\sqrt{c}\,t))}{(a-t^2)^2}\,dt,$$

integral racionalne funkcije.

(c) ako je α jedan realan koren polinoma $a\,x^2+b\,x+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ tada koristimo smenu: $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t(x-\alpha)$ iz koje nalazimo

$x=\dfrac{t^2\,\alpha-a\,\beta}{t^2-a}$ i $dx=\dfrac{-2\,t\,a\,(\alpha-\beta)}{(a-t^2)^2}\,dt$ odakle sledi da je integral (114)

$$\int R\left(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\right)\,dx=\int R\left(\frac{t^2\,\alpha-a\,\beta}{t^2-a}, t(x-\alpha)\right)\frac{2\,t\,a\,(-\alpha+\beta)}{(a-t^2)^2}\,dt$$

integral racionalne funkcije.

Primer. Primeri integrala koji se rešavaju Ojlerovim smenama.

(i1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{1+x^2}=t-x, & x=\frac{t^2-1}{2\,t}\\ dx=\frac{1+t^2}{2\,t^2}\,dt & \end{array}\right\}=\int\frac{t^2+1}{2\,t^2}\,\frac{1}{t-\frac{t^2-1}{2t}}\,dt=\int\frac{t^2+1}{2\,t^2}\,\frac{2\,t}{t^2+1}\,dt$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C\,.$$

(i2) $$\int\frac{dx}{(1+x^2)(\sqrt{1-x^2})}=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{1-x^2}=t(x+1), & x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{-4\,t}{(1+t^2)^2}\,dt & \end{array}\right\}=$$

(i3) $$\int\frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{1+x+x^2}=t-x, & x=\frac{-1+t^2}{1+2\,t}\\ dx=\frac{2\,(1+t+t^2)}{(1+2\,t)^2}\,dt & \end{array}\right\}=$$

(i3) Integral oblika

$$\int x^m \, (a\, x^n + b)^p \, dx, \qquad m, n, p \in \mathbb{Q}, \; a, b \in \mathbb{R}, \tag{115}$$

poznatiji kao diferencijalni binom može se svesti na integral racionalne funkcije u sledećim slučajevima:

(a) ako je $p \in \mathbb{Z}$ i $p > 0$, tada izraz $(a\, x^n + b)^p$ razvijamo po binomnoj formuli, a ako je $p < 0$ smenom $x = t^q$ gde je $q = \text{NZS}(\text{imenilac brojeva } m \text{ i } n)$.

(b) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ integral se smenom $t^r = a\, x^n + b$ gde je $r =$ imenilac od p.

(c) $p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ integral se smenom $t^r = a + b\, x^{-n}$ gde je $r =$ imenilac od p.

Primer. Izračunajte sledeće integrale iracionalnih funkcija.

(i1)
$$\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6\, t^5 \, dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(2\, t^2 - t + 1)} = \cdots$$
$$= 6 \left(\ln|t| - \frac{1}{4} \ln|t+1| - \frac{3}{8} \ln(2\, t^2 - t + 1) - \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{4\, t - 1}{\sqrt{7}} \right) + C$$
$$= \ln \frac{x}{(x^{\frac{1}{6}} + 1)^{\frac{3}{2}} (2\, x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 1)^{\frac{9}{4}}} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\, x^{\frac{1}{6}} - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

(i2)
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 + 2\, x)^2} - \sqrt{3 + 2\, x}} = \left\{ \begin{array}{l} 3 + 2\, x = t^6, \\ dx = 3\, t^5 \, dt \end{array} \right\} = \int \frac{3\, t^2}{t - 1} \, dt = \frac{3}{2} (t-1)(t+3) + 3 \ln|t - 1| + C$$
$$= \frac{3}{2} ((3 + 2\, x)^{\frac{1}{6}} - 1)((3 + 2\, x)^{\frac{1}{6}} + 3) + 3 \ln((3 + 2\, x)^{\frac{1}{6}} - 1) + C.$$

(i3)
$$\int \sqrt{x^3 + x^4} \, dx = \int x^2 \, (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}\,, & x = \frac{1}{t^2 - 1} \\ dx = -\frac{2\, t}{(t^2 - 1)^2} \, dt. & \end{array} \right\} = -2 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^4} \, dt = \ldots$$

6.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija. Pri računanju integrala čija podintegralna funkcija sadrži sinuse i kosinuse primenjujemo adicione formule sa idejom da smanjimo stepene sinusa i kosinusa u podintegralnoj funkciji(ako je to moguće). Korisno je koristiti sledeće transformacione formule:

$$\sin(a\, x) \, \cos(b\, x) = \frac{1}{2} \, [\sin(a - b)\, x + \sin(a + b)\, x]$$
$$\sin(a\, x) \, \sin(b\, x) = \frac{1}{2} \, [\sin(a - b)\, x - \cos(a + b)\, x]$$
$$\cos(a\, x) \, \cos(b\, x) = \frac{1}{2} \, [\cos(a - b)\, x + \cos(a + b)\, x]$$

Neka je $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija u $\sin x$ i $\cos x$, tada se univerzalnom smenom:

$$\tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2\, t}{1 + t^2}\,, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \quad dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}\,, \tag{116}$$

integral $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ svodi na integral racionalne funkcije. S obzirom da se ovom smenom obično dobijaju komplikovane racionalne funkcije (tj. stepeni polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ su prilično veliki), korisno je izbeći ovu smenu ako je to ikako moguće. To je moguće sigurno u sledećim slučajevima:

(a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ili $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ tada koristimo smenu

$$\cos x = t \,(\text{ili } \sin x = t), \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}\,(\text{ili } \cos x = \sqrt{1-t^2}) \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left(\text{ili } dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

(b) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ tada koristimo smenu

$$\tan x = t, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Primer. Primeri integrala trigonometrijskih funkcija.

(i1) $$\int \sin(6\,x)\,\cos(7\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-x) + \sin(13\,x))dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos(13\,x)\right) + C.$$

(i2) $$\int \frac{dx}{2\,\sin x - \cos x + 3} = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2\,t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2\,t^2 + 2\,t + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \arctan(2\,t+1) + C = \arctan(2\,\tan\frac{x}{2} + 1) + C.$$

(i3) $$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \left\{ \begin{array}{l} \tan x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(t^2+1)}\,\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}(\arctan(t) + \ln|1+t|) - \frac{1}{4}\,\ln(1+t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2}\,(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C.$$

(i4) $$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right\} = \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

(i5) $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -sin\ x\,dx = dt \end{array} \right\} = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,dt = \ldots = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\cos^3 x} + C.$$

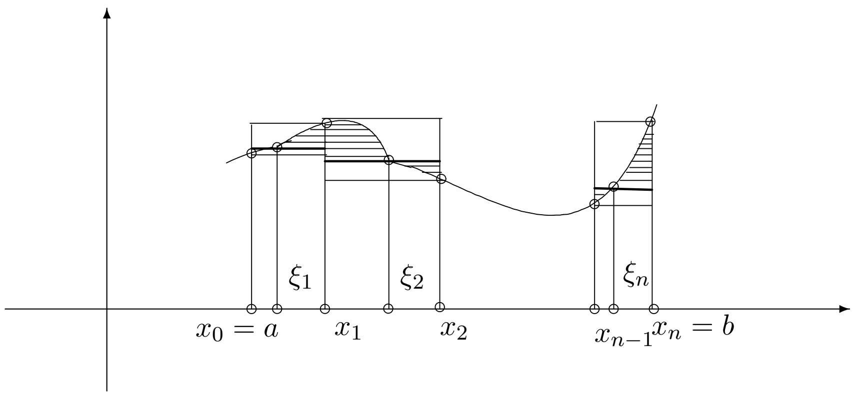
4. Određeni integral

6.10. Definicija. Neka je data neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \supseteq [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, ona je ograničena na segmentu $[a,b]$, tada je i površina lika ograničenog pravama $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i grafikom krive $y = f(x)$ (tj. površina 'ispod grafika') konačna, jer je manja od $(b-a)M$, gde je M maksimum funkcije f na $[a,b]$. Sada se postavlja prirodno pitanje kako da odredimo površinu ispod grafika krive. Ideja koju je predložio Riman [5] sastoji se u sledećem: podelimo segment $[a,b]$ na n delova tačkama

$$\{\, x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b\} = P.$$

[5] Riemann,

Sada vidimo (vidi Sliku 1) da je tražena površina jednaku zbiru površina n krivolinijskih trapeza određenih tačkama skupa P. Ako dužinu podintervala obeležimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,, (i = 1, \ldots, n)$, i neka je $\chi(P) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$ parametar podele P, i izaberimo tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n$ i definišimo skup $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Jasno je da je $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < x_n$. Ako su dužine svih intervala $[x_{i-1}, x_i]$ jednake onda kažemo da je raspodela ekvidistantna.



Slika 1. Rimanov integral

Motivisani Rimanovom idejom posmatramo funkciju, $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tada uređeni par (P, Ξ) zovemo podelom segmenta $[a, b]$, a zbir

$$\Sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\ , \tag{117}$$

nazivamo integralnom sumom funkcije f za podelu (P, Ξ). Napomenimo da u opštem slučaju funkcija f ne mora biti neprekidna na $[a, b]$.

Primetimo da integralna suma $\Sigma(f, P, \Xi)$ predstavlja aproksimaciju površine ispod grafika krive f na $[a, b]$. Postavlja se prirodno pitanje kada ta aproksimacija teži pomenutoj površini.

Za broj I kažemo da je granična vrednost integralne sume $\Sigma(f, P, \Xi)$ kada parametar podele $\chi(P) \longrightarrow 0$ i pišemo

$I = \lim\limits_{\chi(P)\longrightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi)$, ukoliko $(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tako da za svaku podelu (P, Ξ) važi

$$|\,\Sigma(f, P, \Xi) - I\,| < \varepsilon \qquad \text{kada je } \chi(P) < \delta. \tag{118}$$

Ukoliko postoji konačni $\lim_{\chi(P)\longrightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi)$ tada kažemo da je funkcija f integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu $[a, b]$. I pomenuti limes zove se o**dređeni (Rimanov) integral** funkcije f na $[a, b]$. Oznaka koja se koristi: $I = \int_a^b f(x)\,dx$, gde je $a-$donja granica, $b-$gornja granica, $f(x)-$podintegralna funkcija, $f(x)\,dx-$podintegralni izraz i $x-$integraciona promenljiva.

Teorema. *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ tada je ona i integrabilna u Rimanovom smislu.*

Digresija. Obrat ovog tvrđenja ne važi.

Skica dokaza. Kako je f neprekidna na intervalu $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a,b]$ ona dostiže svoj minimum i maksimum na $[x_{i-1}, x_i]$ i možemo definisati tkz. gornju i donju Darbuovu (Darboux) sumu za datu raspodeli $\Sigma(f, P, \Xi)$ na sledeći način:

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \qquad \text{i} \qquad \mathcal{D}_+(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \,,$$

gde je $m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x_i)$ i $M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x_i)$. Očigledno važi

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) \le \Sigma(f, P, \Xi) \le \mathcal{D}_+(\Sigma).$$

Kako se svaka raspodela $\Sigma(f, P, \Xi)$ može aproksimirati po volji tačno ekvidistantnom raspodelom $\Sigma^{\varepsilon}(f, P^{\varepsilon}, \Xi^{\varepsilon})$ [6] za neprekidnu funkciju (koja je i ravnomerno neprekidna na $[x_{i-1}, x_i]$, pa kada $n \to \infty$, $m_i \to M_i$) lako se pokazuje da je $\lim_{(P,\Xi)} \mathcal{D}_-(\Sigma) = \lim_{(P,\Xi)} \mathcal{D}_+(\Sigma)$, odakle sledi tvrdnja. $\square$

6.11. Primer. Odredimo određene integrale nekih funkcija po definiciji.

(i1) $f(x) = c$. Neka je (P, Ξ) proizvoljna podela segmenta $[a,b]$ (Slika 2), tada je

$$\Sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i$$

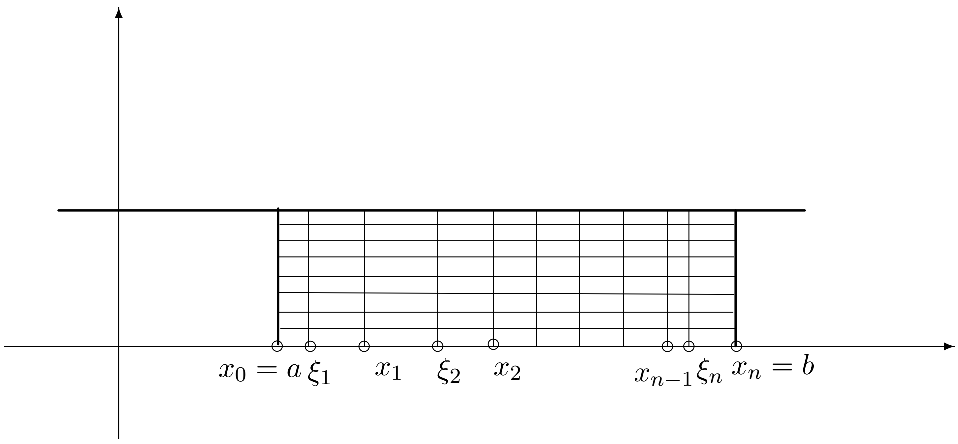
$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= c(x_n - x_0) = c(b-a).$$

Dakle, u ovom slučaju $\Sigma(f, P, \Xi)$ ne zavisi o podeli, pa niti o $\chi(P)$, i imamo da je

$$\lim_{\chi(P) \to 0} \Sigma(f, P, \Xi) = c(b-a), \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a).$$



Slika 2. Integral konstante na segmentu $[a, b]$

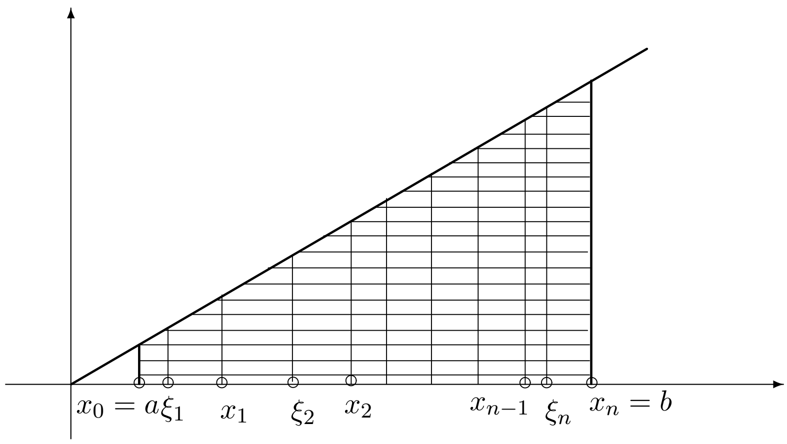
Specijalno za $c = 1$, je $\displaystyle\int_a^b dx = b - a$.

(i2) $f(x) = x$. Kako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$ možemo posmatrati ekvidistantnu podelu (Slika 3) $P = \Xi = \{\xi_i = x_i = a + i\,h, \ 0 \le i \le n\}$ gde je $h = \frac{b-a}{n}$. Dakle,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\,h = a + i\,\frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{i} \quad \Delta x_i = h.$$

Sada redom imamo na segmentu $[a, b]$,

[6] $\forall \varepsilon > 0$ postoji ekvidistantna raspodela $(P^{\varepsilon}, \Xi^{\varepsilon})$ takva da je $|\Sigma(f, P, \Xi) - \Sigma^{\varepsilon}(f, P^{\varepsilon}, \Xi^{\varepsilon})| < \varepsilon$.



Slika 3. Integral funkcije $y = x$ na segmentu $[a, b]$

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, h = h\sum_{i=1}^{n}(a + i\cdot h) = h\left(n\cdot a + h\sum_{i=1}^{n} i\right) = n\cdot h\left(a + \frac{n+1}{2}\,h\right)\\ &= n\cdot\frac{b-a}{n}\left(a + \frac{n+1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right) = a\cdot(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

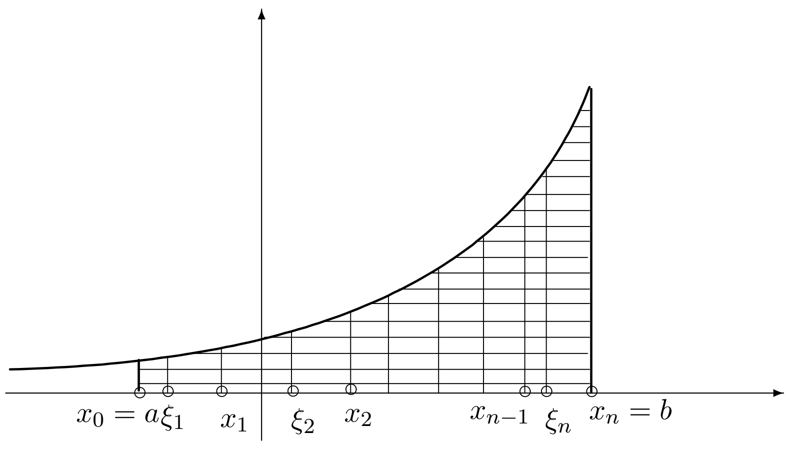
Dakle, kada $h \to 0$ tada $n \to \infty$, i imamo

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(a\cdot(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = a\cdot(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}\ .$$

(i3) $f(x) = e^x$. Kako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ možemo posmatrati ekvidistantnu podelu $P = \Xi = \{\xi_i = x_i = a + i\,h,\ 0 \le i \le n\}$ gde je $h = \frac{b-a}{n}$. Dakle,

$$x_0 = a,\quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n},\quad x_i = a + i\,h = a + i\,\frac{b-a}{n}\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n\quad \text{i}\quad \Delta x_i = h.$$

Sada redom imamo (Slika 4),



Slika 4. Integral funkcije $y = e^x$ na segmentu $[a, b]$

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+i\,h}\,h = h\cdot e^a\sum_{i=1}^{n}\left(e^h\right)^i = h\cdot e^{a+h}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^h\right)^i = h\cdot e^{a+h}\cdot\frac{e^{n\,h}-1}{e^h-1}\\ &= \frac{h}{e^h-1}\cdot e^{a+h}\cdot\left(e^{b-a}-1\right)\end{aligned}$$

Dakle, sada imamo,

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{e^h-1}\cdot e^{a+h}\cdot(e^{b-a}-1)\right) = (e^{b-a}-1)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}\cdot\lim_{h\to 0}e^{a+h} = (e^{b-a}-1)\cdot 1\cdot e^a$$
$$= e^b - e^a\,.$$

(i4) $f(x)=x^2$. Slično primeru (i2) dobija se $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

(i5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

5. Svojstva određenog integrala

6.12. Svojstva određenog integrala. Iz definicije određenog integrala, jasno je da su njegova svojstva u uskoj vezi sa osobinama suma i limesa. Malo preciznije imamo:

Teorema 1. *Neka su funkcije f i g integrabilne u Rimanovom smislu na $[a,b]$. Tada,*

(i1) $\displaystyle\int_a^b \alpha\cdot f(x) = \alpha\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \alpha\in\mathbb{R}$

(i2) $\displaystyle\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(i3) *ako je* $f(x)\geq 0,\ \forall\, x\in[a,b]$ *tada je* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

(i4) *ako je* $f(x)\geq g(x),\ \forall\, x\in[a,b]$ *tada je* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$

Dokaz.

(i1) $\displaystyle\int \alpha\cdot f(x)\,dx = \lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \alpha\cdot f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha\cdot\lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha\cdot\int f(x)\,dx\,.$

(i2) $$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)\pm g(\xi_i))\,\Delta x_i = \lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\,\Delta x_i$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(i3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\chi(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \geq 0.$

(i4) Primenimo (i3) na funkciju $\phi(x) = f(x) - q(x)$. □

Za integrabilne funkcije važi i sledeća teorema kao posledica definicije određenog integrala.

Teorema 2. *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a,b]$ tada je*

(i1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$

(i2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, pri čemu je $c \in (a,b)$.

Dokaz. Neka je data podela (P,Ξ), gde je $\{a = x_0, x, \ldots, x_n = b\} = P$ i $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Da bismo dokazali (i1) definišemo $\Delta x_i' = x_i' - x_{i-1}' = x_{n-i} - x_{n-i+1} = -\Delta x_{n-i+1}$, tako da imamo redom,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\chi(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = -\lim_{\chi(P)\to 0} \sum_{i=n}^1 f(\xi_i')\,\Delta x_i' = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(i2) Izaberimo da $c = x_k$ bude jedna od deobenih tačaka, što možemo uvek uraditi (ako nije onda je dodamo) i kako $\chi_1(P) \to 0$ i $\chi_2(P) \to 0$ kada $\chi(P) \to 0$ imamo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\chi(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\chi_1(P)\to 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{\chi_2(P)\to 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

□

6.13. Teorema o srednjoj vrednosti integrala. U ovoj tački dokazujemo jednu od osnovnih teorema za neodređene integrale.

Teorema. *Neka su $f(x)$ i $\phi(x)$ dve integrabilne funkcije na $[a,b]$ takve da je*

(1) $m \le f(x) \le M$,

(2) *$\phi(x)$ ima stalan znak na $[a,b]$*[7],

(3) $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx \neq 0$.

Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $m \le \mu \le M$ i važi da je $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot\phi(x)\,dx = \mu \int_a^b \phi(x)\,dx$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\phi(x) > 0$, tada iz $m \le f(x) \le M$ imamo, $m\cdot\phi(x) \le f(x)\cdot\phi(x) \le M\cdot\phi(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Teorema 5.12 (i4) sada implicira $\displaystyle\int_a^b m\cdot\phi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot\phi(x)\,dx \le \int_a^b M\cdot\phi(x)\,dx$ i na osnovu Teorema 5.12 (i2) zaključujemo da je: $\displaystyle m\int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx \le M\int_a^b \phi(x)\,dx$, odakle sledi tvrđenje jer je $\displaystyle\mu = \frac{\int_a^b f(x)\cdot\phi(x)\,dx}{\int_a^b \phi(x)\,dx}$.[8] □

Posledica. *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i $\phi(x)$ kao u prethodnoj teoremi, tada je*

(i1) $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \phi(x)\,dx \qquad \xi \in [a,b]$.

(i2) *ako je još $\phi(x) = 1$ tada je* $\displaystyle\mu = f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.

---

[7] tj. $\phi(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$ ili $\phi(x) < 0,\ \forall x \in [a,b]$.

[8] Primetimo da je uslov $\int_a^b \phi(x)\,dx \neq 0$, važan jer bi u suprotnom imali $\displaystyle m\cdot 0 \le \int_a^b f(x)\cdot\phi(x)\,dx \le M\cdot 0$.

Dokaz. Kako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ onda ona taj segment preslikava na segment $[m, M]$, pa postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je $\mu = f(\xi)$, gde je μ iz prethodne teoreme, odakle sledi (i1), dok je (i2) specijalni slučaj od (i1). $\square$

6. Fundamentalna teorema

6.14. Određeni integral i primitivna funkcija. Neka je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada je dobro definisana funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx, \tag{119}$$

na intervalu $[a, b]$.

Neka je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$, tj. neka je $|f(x)| \leq C\,(\in \mathbb{R})$ za sve $x \in [a, b]$, tada iz aditivnosti integrala, za $x, x + h \in [a, b]$, sledi:

$$|F(x + h) - F(x)| \leq C\,|h|\,. \tag{120}$$

Nejednakosti (120) implicira neprekidnost funkcije F na $[a, b]$. Ali važi i više,

Lema. *Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$ i ako je f neprekidna u nekoj tački $x \in [a, b]$, tada je funkcija F definisana na $[a, b]$ formulom (120) diferencijabilna u tački x, i važi formula $F'(x) = f(x)$.*

Dokaz. Kako je f neprekidna u tački x sledi da je $f(t) = f(x) + \Delta(t)$, pri čemu $\Delta(t) \to 0$ kada $t \to x$ i $t \in [a, b]$. Funkcija $\Delta(t) = f(t) - f(x)$ je integrabilna na $[a, b]$ kao razlika dve integrabilne funkcije, i neka je $M(h) = \sup_{t \in I(h)} |\Delta(t)|$, gde je $I(h) = [x, x + h] \subseteq [a, b]$. Jasno, zbog neprekidnosti funkcije f u tački x sledi da $M(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Sada imamo,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) \;&=\; \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \int_x^{x+h} (f(x) + \Delta(t))\, dt = \int_x^{x+h} f(x)\, dt \\ &+ \int_x^{x+h} \Delta(t)\, dt = f(x)h + \alpha(h)\, h \end{aligned}$$

Budući da je

$$\left| \int_x^{x+h} \Delta(t)\, dt \right| \leq \int_x^{x+h} |\Delta(t)|\, dt \leq \left| \int_x^{x+h} M(h)\, dt \right| = M(h)\,|h|,$$

zaključujemo prvo da je $\alpha(h) \leq M(h)$, a odatle da $\alpha(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Primetimo da smo pokazali da ako je f neprekidna u tački $x \in [a, b]$ tada za h takav da je i $x + h \in [a, b]$ važi

$$F(x + h) - F(x) = f(x)\, h + \alpha(h)\, h \qquad \text{pri čemu } \alpha(h) \to 0 \text{ kada } h \to 0. \tag{121}$$

Ali to znači da je funkcija $F(x)$ diferencijabilna u tački x i da je $F'(x) = f(x)$. $\square$

Neposredna posledica ove leme je sledeća Teorema.

Teorema. *Svaka neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima na tom segmentu primitivnu funkciju, koja je oblika*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx + C, \qquad \textit{gde je } C \textit{ neka konstanta.}$$

6.15. Njutn-Lajbnicova (Newton-Leibniz) formula. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ tada postoji fundamentalna veza između neodređenog i određenog integrala, koja je data sledećom teoremom.

Teorema. *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i ako je $F(x)$ njena primitivna funkcija na $[a,b]$ tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{122}$$

Prethodna formula (122) poznata je kao Njutn-Lajbnicova formula.

Dokaz. Neka je data proizvoljna podela $\{\, a = x_0, x_, \ldots, x_n = b\} = P$. Posmatrajmo intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tada Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti daje

$$\left.\begin{aligned}
&F(x_1) - F(x_0) = F'(\xi_1)(x_1 - x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0)\\
&F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi_2)(x_2 - x_1) = f(\xi_2)(x_2 - x_1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_2)(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}\right\} + \tag{123}$$

gde smo tačke $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ izabrali korišćenjem Lagranžove teoreme. Nakon sabiranja formula u (123) dobijamo

$$F(x_n) - F(x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

i nakon uzimanja limesa dobijamo: $F(b) - F(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$

□

Oznaka koja se koristi: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Primeri 1. Izračunajte sledeće integrale.

(i1) $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}\,.$ (i2) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,|\Big|_{-2}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-2| = -\ln 2.$

Primeri 2. Dokažite da je:

(i1) $\displaystyle\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, \quad b > a > 0.$

Primena teoreme o srednjoj vrednosti za integrale na funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i interval $[a,b]$ prvo daje,

$$\frac{1}{b} \le f(x) \le \frac{1}{a} \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \text{odakle je} \quad \int_a^b \frac{dx}{b} \le \int_a^b \frac{dx}{x} \le \int_a^b \frac{dx}{a}\,, \quad \text{i na kraju}$$

$$\frac{b-a}{b} \le \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}\,; \quad \text{nejednakosti su stroge jer je} \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\xi)\,(b-a), \quad \xi \in (a,b).$$

(i2) $\displaystyle\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}\,, \;\; b > a.$

Primena teoreme o srednjoj vrednosti za integrale na funkciju $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ i interval $[a,b]$, dobijamo,

$$\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+a^2} \quad \forall\, x \in (a,b) \quad \text{odakle je nakon integracije}$$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}\ ; \qquad \text{nejednakosti su stroge jer je}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = f(\xi)\,(b-a) = \frac{1}{1+\xi^2}\,(b-a), \quad \xi \in (a,b).$$

7. Osnovne metode integracije određenog integrala

6.16. Smena promenljive u određenom integralu. U ovoj tački videćemo da i za određene integrale važe analogne metode za njihovo izračunanje, kao posledica fundamentalne veze između određenog i neodređenog integrala date Njutn-Lajbnicovom formulom.

Teorema. *Neka je $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija, neprekidne funkcije $f(x)$ na $[a,b]$ i neka je $\phi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ klase $\mathcal{C}^1[\alpha,\beta]$ takva da*

(i1) *ϕ' ne menja znak na $[\alpha,\beta]$(tj. monotona je) pri čemu je $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ ako je $\phi'(t) > 0$ (ili $a = \phi(\beta)$, $b = \phi(\alpha)$ ako je $\phi'(t) < 0$).*

(i2) *funkcija $f(\phi(t))\,\phi'(t)$ je integrabilna na $[\alpha,\beta]$.*

Tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt. \tag{124}$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija od f na $[a,b]$ [9], i neka je $F(\phi(t)) = \Phi(t)$. Primetimo da je $\Phi(t)$ primitivna funkcija od $f(\phi(t))\,\phi'(t)$, jer je

$$\Phi'(t) = (F(\phi(t)))' = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,.$$

Koristeći sada Njutn-Lajbnicovu formulu s jedne strane imamo $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, dok je sa druge strane

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a)\,, \quad \text{odakle}$$

$$\text{sledi} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt\,.$$

□

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale $(n, m \in \mathbb{N})$,

$$\text{(i1)} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{lll} x = a\,\sin t & 0 \longrightarrow 0 & \phi(t) = a \sin t \ \text{ je} \\ dx = a\,\cos t\,dt & a \longrightarrow \pi/2 & \text{monotona na } [0, \pi/2] \end{array} \right\}$$

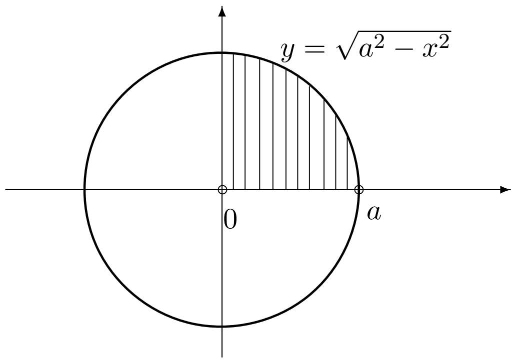
$$= \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2 - a^2\,\sin^2 t}\,a\,\cos t dt = \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)}\,a\,\cos t = a^2 \int_0^{\phi/2} \cos^2 t\,dt$$

[9] $F'(x) = f(x),\ \forall\, x$.

$$= a^2 \int_0^{\phi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin(2\,t)\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right)$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\,.$$

Geometrijski smisao. Kako je $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, odakle je $x^2 + y^2 = a^2$. Zaključujemo da naša polazna funkcija predstavlja jednačinu kruga i ustvari tražimo površinu 1/4 tog kruga (jer je to geometrijski lik (Slika 5) koji je ograničen pravama $y = 0, x = 0, x = a$ i grafikom krive funkcije $f(x)$).



Slika 5. Geometrijski smisao

(i2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x - \sin(m-n)x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\, dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x + \frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ako je $n - m \neq 0$, (jer je cos parna funkcija). Rezultat je tačan i ako je $n - m = 0$, proverite!

(i3) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

(i4) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Posledica. *Neka je $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R},\ a > 0$ integrabilna funkcija. Tada*

(i1) *ako je f parna* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$

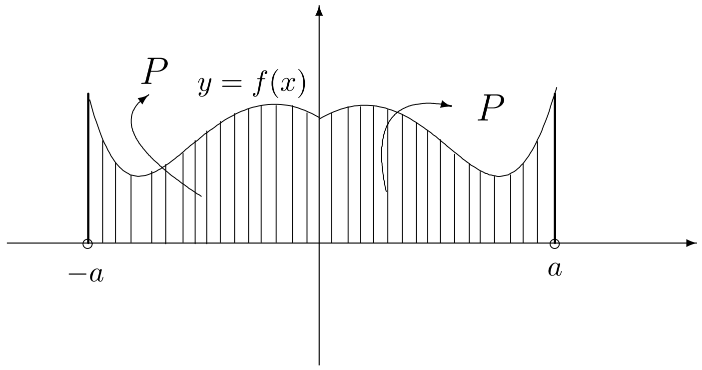
(i2) *ako je f neparna* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω. Tada za svako $a \in \mathbb{R}$, važi

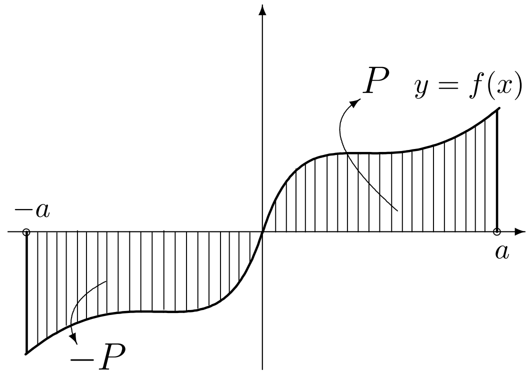
$$\int_a^{a+\omega} f(x)\, dx = \int_0^{\omega} f(x)\, dx\ .$$

Dokaz. (i1) i (i2) su jasni iz geometrijskog smisla određenog integrala kao površine omeđene pravama $y = 0$, $x = 0, x = a$ i grafikom krive $y = f(x)$.

Primetimo, iz definicije neodređenog integrala, da ta površina može biti i negativna. U slučaju (i1) figure (zbog parnosti funkcije f) čiju površinu tražimo na $[-a, 0]$ i $[0, a]$ su podudarne (Slika 6) i sa iste strane $x-$ose pa je površina njihove unije jednaka dvostrukoj površini figure na $[0, a]$. Za (i2) važe iste opservacije osim što su te dve figure (zbog neparnosti funkcije $f(x)$) podudarne (njihova unija je centralno simetrična s obzirom na koordinatni početak (Slika 7)), ali sa različitih strana $x-$ose, pa je zbir njihovih površina 0.



Slika 6. Integral i parnost funkcija



Slika 7. Integral i neparnost funkcija

U to se možemo uveriti i formalno, ako uvedemo smenu: $x = -t$, $dx = -dt$ na intervalu $[-a, 0]$. Pa imamo,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} -\int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt, & f \text{ parna} \\ -\int_{a}^{0} (-)\, f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt, & f \text{ neparna} \end{array} \right\} \quad \text{odakle je}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt, & f \text{ parna,} \\ 0, & f \text{ neparna,} \end{cases}$$

Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω. Tada prvo imamo,

$$\int_{\omega}^{a+\omega} f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{lll} t = x - \omega & \phi(t) = t + \omega & x = a + \omega \to t = a, \\ dt = dx & \text{je monotona} & x = \omega \to t = 0 \end{array} \right\} = \int_{0}^{a} f(t+\omega)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

a zatim

$$\int_{a}^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_{a}^{\omega} f(x)\,dx + \int_{\omega}^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_{a}^{\omega} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\,dx$$

i dokaz je gotov. □

6.17. Parcijalna integracija određenih integrala. Sada koristeći osnovnu vezu između određenog i neodređenog integrala datu u Njutn-Lajbnicovoj formuli i metodu parcijalne integracije za neodređene integrale dobijamo njen analogon za određene integrale. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema. *Neka su f i g funkcije klase $\mathcal{C}^1$ na (a, b). Tada važi formula*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)'\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Analogno dokazu za neodređene integrale, prvo iz Lajbnicove formule,

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$$

integracijom obe strane uz korišćenje Njutn-Lajbnicove formule nalazimo

$$f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)\,g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx,$$

odakle sledi formula. □

Primer. Izračunajmo sledeći integral,

$$\text{(i1)}\quad \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \left\{\begin{array}{ll} f = x^2 & df = 2\,x\,dx \\ dg = \sin x dx & g = -\cos x \end{array}\right\} = -x^2\, \cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = \left\{\begin{array}{ll} f = x & df = dx \\ dg = \cos x dx & g = \sin x \end{array}\right\} = 2\left(x\, \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi - 2.$$

6.18. Određeni integral i Tejlorova formula. Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna u okolini tačke a. Koristeći sada metod parcijalne integracije i Njutn-Lajbnicovu formulu možemo izvesti Tejlorovu formulu sa integralnim ostatkom

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\, dt = -\int_a^x f'(t)\,(x-t)'\, dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)\, dt = f'(a)(x-a) \\ & \quad -\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)((x-t)^2)'\, dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\, f''(t)\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\, dt \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\, f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)((x-t)^3)\, dt = \dots\dots\dots \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\, f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)}\, f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x), \end{aligned}$$

gde je

$$r_{n-1}(a;x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt \tag{125}$$

Time smo pokazali sledeće tvrđenje.

Propozicija. *Neka funkcija $f(t)$ ima na segmentu $[a,x]$ neprekidne izvode do reda n, tada važi Teylorova formula*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x)\,,$$

gde je ostatak dat formulom (125).

8. Nesvojstveni integral

6.19. Nesvojstveni integral I. U ovoj tački ćemo malo proširiti pojam Rimanovg integrala na slučaj kada neka od granica nije konačna ili ako funkcija f nije definisana u nekoj tački segmenta po kojem integralimo funkciju.

Neka je funkcija f definisana na intervalu $[a,b)$ (pri čemu b može biti i $+\infty$) i integrabilna na svakom segmentu $[a,b'] \subseteq [a,b)$. Tada veličinu

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{b-0} f(x)\, dx = \lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\, dx, \tag{126}$$

ako limes sa desne strane jednakosti postoji, nazivamo nesvojstvenim integralom Rimana ili samo nesvojstvenim integralom funkcije f na intervalu $[a,b)$. Slično definišemo i nesvojstveni integral funkcije f na intervalu $(a,b]$ (pri čemu a može biti i $-\infty$), koja je integrabilna na svakom segmentu $[a',b] \subseteq (a,b]$, formulom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{a'\to\, a+0} \int_{a'}^b f(x)\,dx\,.$$

Primetimo da ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ tada se njen integral na $[a,b]$ podudara sa njenim nesvojstvenim integralom na $[a,b]$.

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale,

(i1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$

kako je $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\gamma}\, x^{1-\gamma}\Big|_1^b & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x\Big|_1^b & \text{za } \gamma = 1. \end{array} \right\}$ tada limes $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\gamma}$ postoji samo za $\gamma > 1$ jer

imamo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\gamma}\, x^{1-\gamma}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\gamma} \left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-\gamma} - 1 \right) = \frac{1}{\gamma-1}$,

a za ostale vrednosti γ polazni integral nije definisan.

(i2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$

kako je za $a \in (0,1]$: $\displaystyle\int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\gamma}\, x^{1-\gamma}\Big|_a^1 & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x\Big|_a^1 & \text{za } \gamma = 1. \end{array} \right\}$ tada limes $\displaystyle\lim_{a\to+0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma}$ postoji samo za

$\gamma < 1$, jer imamo, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{a\to+0} \frac{1}{1-\gamma}\, x^{1-\gamma}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-\gamma} \left(1 - \lim_{a\to+0} a^{1-\gamma} \right) = \frac{1}{1-\gamma}$.

Za ostale vrednosti γ polazni integral nije definisan.

(i3) $$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left(e^x\Big|_a^0 \right) = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1\,.$$

6.20. Svojstva nesvojstvenog integala. Nesvojstveni integral definisan u prethodnoj tački ima ista algebarska svojsva kao i Rimanov integral, a koja su sadržana u **Teoremi 6.12** uz neophodne modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala. Takav rezultat se mogao očekivati jer je jedina razlika između svojstvenog i nesvojstvenog integrala u traženju određenog limesa (vidi prethodnu tačku), a sam limes funkcije ima ista svojstva kao i integral (aditivnost, homogenost, dobro se ponaša prema nejednakostima).

Štaviše, uz odgovarajuće (prirodne) modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala vidi se da važe teoreme iz **6.16** o smeni promenljive u nesvojstvenom integralu i iz **6.17** o parcijalnoj integraciji nesvojstvenog integrala.

6.21. Nesvojstveni integali II. U prethodnoj tački bavili smo se nesvojstvenim integralima kod kojih je problem bio u jednom od krajeva intervala, tj. u kojem je podintegralna funkcija bila neograničena ili nije bila definisana. Sada ćemo našu definiciju proširiti na slučaj kada postoji problem na oba kraja intervala i na slučaj ako podintegralna funkcija nije definisana (ili u okolini takve tačke je neograničena) u nekoj tački c intervala integracije $[\varpi_1, \varpi_2]$.

Dakle, posmatrajmo funkciju $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$ i f je integrabilna na segmentima $[a, a'] \subseteq [a, c)$ i $[c', b] \subseteq (c, b]$. Tada pišemo

$$\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x)\,dx = \int_{\varpi_1}^{c-0} f(x)\,dx + \int_{c+0}^{\varpi_2} f(x)\,dx \tag{127}$$

$$= \lim_{c' \to c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x)\,dx + \lim_{c'' \to c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x)\,dx\ ,$$

ako svaki od integrala sa desne strane jednakosti (127) postoji. Ako barem jedan od dva integrala ne postoji reći ćemo da nesvojstveni integral divergira.

Primer. Izračunajmo integral,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_{-1}^{0} + \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \pi\,. \tag{i1}$$

Sledeći primer pokazuje, da nekada postoji $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$ takav da barem jedan od integrala sa desne strane jednakosti (127) divergira. Kako za svako γ barem jedan od integrala

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\gamma}\,dx\ , \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma}\,dx,$$

ne postoji (ili je $+\infty$), kažemo da integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma}\,dx$ divergira za svako γ.

Glavna vrednost integrala. Posmatrajmo sada malo detaljnije integral (127), tada njegovu desnu stranu možemo malo drugačije zapisati

$$\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x)\,dx = \lim_{c' \to c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x)\,dx + \lim_{c'' \to c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x)\,dx \tag{128}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\mu \to 0} \int_{c+\mu}^{\varpi_2} f(x)\,dx\ .$$

Iz poslednjeg izraza možemo zaključiti da egzistencija limesa zavisi od odnosa $\varepsilon > 0$ i $\mu > 0$, pa limes ne mora postojati, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer. Izračunajmo integral,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x}\, dx + \lim_{\mu\to 0} \int_{\mu}^{1} \frac{dx}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon - \lim_{\mu\to 0} \ln\mu\,.$$

Iz poslednje formule vidimo da limes ne postoji jer su ε i μ proizvoljni. Ako uzmemo npr. da je $\varepsilon = \alpha\mu$, za neki $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vidimo da se poslednja relacija svodi na

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon - \lim_{\mu\to 0} \ln\mu = \lim_{\mu\to 0} \ln\alpha\,\mu - \lim_{\mu\to 0} \ln\mu = \lim_{\mu\to 0} \ln\frac{\alpha\,\mu}{\mu} = \ln\alpha.$$

Kako je prirodno uzeti da je $\varepsilon = \mu$, za ovaj izbor definišemo glavnu vrednost [10] nesvojstvenog integrala.

Dakle, ako za funkciju $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$, integral $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x)\, dx$ divergira, i neka za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoje integrali $\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx$ i $\int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x)\, dx$. Tada ako postoji

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x)\, dx \right)$$

nazivamo ga glavnom vrednosti integrala $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x)\, dx$, i pišemo,

$$\text{(129)} \qquad \text{v.p.} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x)\, dx \right).$$

Primeri. Sada u smislu ove definicije imamo sledeće primere.

(i1) $\text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0.$

(i2) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = \lim_{M\to +\infty} \left(\int_{-M}^{0} x\, dx + \int_{0}^{M} x\, dx \right) = \lim_{M\to +\infty} \left(\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2} \right) = 0.$

9. Primene određenog integrala

6.22. Primene određenog integrala. Pojam Rimanovog integrala uveden je tako što je tražena metoda za računanje površine određene klase ravanskih figura, tj. onih ravanskih figura koje su preseci (ili se na njih mogu svesti) ravanskih figura čije su stranice grafici nekih 'dovoljno dobrih' funkcija. Time je već određena osnovna primena određenog integrala kao metoda za računanje površina. Navedimo ovde još neke primene.

Primer. Odrediti površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vidi Primer (i1). u **6.16.**

[10] glavna vrednost od francuskog *valeur principal.*

Primetimo da y možemo izraziti kao funkciju od x, kao $y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[0, a]$, tako da će $\int_0^a f(x)dx$ predstavljati četvrtinu površine polazne elipse. Dakle površina elipse P biće jednaka:

$$P = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \{\text{vidi Primer (i1) u } \mathbf{6.16.}\} = 4\,\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2\pi}{4} = a\,b\,\pi\,.$$

Dužina luka krive. Neka je dato preslikavanje segmenta $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ formulom $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, za $t \in [a, b]$. Skup $\gamma([a, b])$ zove se put. Ako je $A = \gamma(a)$ i $B = \gamma(b)$, kažemo da put γ spaja tačke A i B. Tačka A zove se početak puta, a tačka B kraj puta. Put je zatvoren ako je $A = B$. Ako je preslikavanje γ bijekcija za put kažemo da je prost put ili da je parametrizovana kriva. Put je klase glatkosti k ako su takve funkcije $x(t), y(t)$ i $z(t)$, i to zapisujemo $\gamma \in \mathcal{C}^{(k)}[a, b]$. Ako je put prost i klase barem $\mathcal{C}^1$ ili je po delovima takav[11], možemo na put gledati kao na krivu u prostoru po kojoj se kretala materijalna tačka od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$. Tako da možemo govoriti o dužini, $l[t_1, t_2]$, puta kojeg je ona prešla od trenutka $a \le t_1 < t_2 \le b$. Kako je za neki mali vremenski interval Δt tačka prešla put od neke tačke X do tačke $X + \Delta x$, možemo pisati $\Delta x \approx |v(t)|\,\Delta t$, gde je $|v(t)|$ brzina tačke u trenutku t. Kako je

$$|v(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

prelaskom na limes kada $\Delta(t) \to 0$ dobijamo da je dužina luka krive od trenutka $t = a$ do $t = b$ data formulom

$$l[a, b] = \int_a^b |v(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt\,. \tag{130}$$

Primetimo da analogon prethodne formule (130) važi u slučaju kada posmatramo puteve i krive u bilo kojoj dimenziji, pa tako i u dimenziji 2. Ako je kriva data kao grafik krive $y = f(x)$ tada za parametar t možemo uzeti x i dužina luka krive je

$$l[a, b] = \int_a^b |v(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt = \quad \{t = x,\ y = f(x)\} \quad \Longrightarrow \quad l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Primer. Odrediti obim elipse date svojom kanonskom jednačinom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Uzmimo standardnu parametrizaciju elipse $x = a\,\sin t$ i $y = b\,\cos t$, $t \in [0, 2\,\pi]$, tada formula (131) postaje

$$l_{el} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\,\cos t)^2 + (-b\,\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\,\sin^2 t}\,dt = 4\,a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,\sin^2 t}\,dt$$

$$= 4\,a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\,\sin^2 t}\,dt\,. \qquad \text{Primetimo da je } e \text{ ekscentricitet elipse, jer je } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,.$$

Integral

$$E(e, t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2\,\sin^2 t}\,dt$$

[11] tj. možemo ga razbiti u konačan broj segmenata na kojem je γ diferencijabilna funkcija i njen izvod je neprekidna funkcija.

ne može se izraziti preko elementarnih funkcija i kako se javlja prilikom izračunavanja dužine elipse naziva se eliptičkim integralom druge vrste. Vrednost koju on prima za $t = \pi/2$ zavisi samo o ekscentricitetu elipse i tada koristimo oznaku $E(e) = E(e, \pi/2)$. Tako smo dobili da je obim elipse jednak $l_{ep} = 4\,a\,E(e)$.

Zapremina rotacionih tela. Neka je dat grafik neke funkcije $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ i zamislimo da grafik rotira oko x ose, tako će nastati jedno rotaciono telo, koje možemo shvatiti kao da je sastavljeno od niza malih cilindara[12] visine Δx i čija je površina baze, površina kruga poluprečnika $f(x)$. Tako da je približna zapremina ovog malog cilindra $V \approx f(x)^2\,\pi\,\Delta x$. Prelazeći na limes kada $\Delta x \to 0$ i zatim integraleći po celom segmentu $[a, b]$ dobijamo da je zapremina rotacionog tela jednaka

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,. \tag{131}$$

Primer. Odrediti zapreminu elipsoida koji nastaje rotacijom grafika elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, koji se nalazi iznad $x-$ose ($y \geq 0$).

Primetimo da y možemo izraziti kao funkciju od x, kao $y = f(x) = \dfrac{b}{a}\,\sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[-a, a]$, tako da primena formule (131) na ovaj primer daje

$$V_{el} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(\frac{b}{a}\,\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{b^2}{a^2}\,\pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2}{a^2}\,\pi \left(a^2\,x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,\pi \left(2\,a^3 - 2\,\frac{a^3}{3}\right) = \frac{4\,\pi\,b^2\,a}{3}\,.$$

Odakle dobijamo u slučaju lopte, $a = b$, poluprečnika a da je njena zapremina jednaka $\dfrac{4\,\pi\,a^3}{3}$.

[12] radi se zapravo o cilindru čije baze nisu jednake, ali za malo Δx, mi ga aproksimiramo pravim cilindrom.

Literatura

1. Zorich V. A., *Matematicheskij analiz, tom 1*, Facis, 1997.
2. Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3ed, MGH 1976.
3. Fihtengol'c G. M., *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija*, Tom 1, 8 izd., FML, 2003.
4. N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić, *Analitička geometrija*, MF, 2003,
5. Rakić Z., *Linearna algebra (materijal)*, 2005.