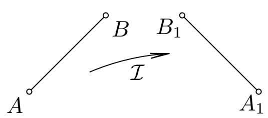
2. Изометрије у $R^n = 1, 2$

Дефиниција

Бијективно пресликавање $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назива се *изометријом* простора $\mathbb{R}^n$ уколико за произвољне две тачке $A, B \in \mathbb{R}^n$ важи $\rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)) = \rho(A, B)$. Скуп свих изометрија простора $\mathbb{R}^n$ означавамо са $Iso(\mathbb{R}^n)$.



Пример *Пресликавање* $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *дато са* $\varepsilon(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ *је изометрија тог простора. Називамо је* **коинциденција** *или* **идентитет**.

Теорема

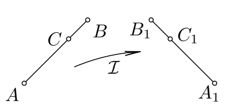
Скуп $Iso(\mathbb{R}^n)$ са операцијом композиције пресликавања чини групу.

Доказ. За сваку од аксиома групе се једноставно показује да важи коришћењем дефиниције изометрија. □

Теорема

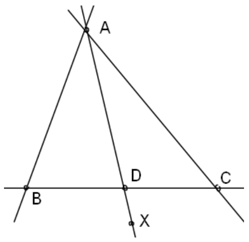
Произвољном изометријом $\mathcal{I}$ се колинеарне тачке сликају у колинеарне тачке. При том, ако је тачка B између тачака A и C, онда је и $\mathcal{I}(B)$ између тачака $\mathcal{I}(A)$ и $\mathcal{I}(C)$.

Доказ. Нека су тачке A, B, C колинеарне и нека је тачка B између тачака A и C. Тада је $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$. Зато важи и $\rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)) + \rho(\mathcal{I}(B), \mathcal{I}(C)) = \rho(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(C))$.



Како функција растојања задовољава неједнакост троугла, ово је могуће само уколико су $\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B), \mathcal{I}(C)$ колинеарне и ако је при том $\mathcal{I}(B)$ између тачака $\mathcal{I}(A)$ и $\mathcal{I}(C)$. □

Дакле, изометрије "чувају" колинеарност, па се праве сликају у праве.
Две праве које се секу у тачки X изометријом $\mathcal{I}$ сликају се у праве које се секу у тачки $\mathcal{I}(X)$.
Обратно, ако се две праве p_1 и q_1 секу у тачки X_1 онда се њихови оригинали $\mathcal{I}^{-1}(p_1)$ и $\mathcal{I}^{-1}(q_1)$ секу у тачки $\mathcal{I}^{-1}(X_1)$.



Ако су A, B, C три неколинеарне тачке равни π, произвољна тачка те равни припада некој од правих које садрже једно теме троугла ABC и секу наспрамну страну тог троугла (Други Пеанов став). Рецимо, нека тачка X, припада правој AD где је D тачка дужи BC.

Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 и X_1 слике ових тачака у изометрији $\mathcal{I}$. С обзиром да су A, B, C неколинеарне тачке следи да су неколинеране и A_1, B_1 и C_1. Нека је π_1 раван која садржи A_1, B_1, C_1. Тада тачка D_1, као слика тачке дужи BC, припада дужи B_1C_1, па припада и равни π_1. Даље, како тачка X припада правој AD, тачка X_1 припада правој A_1D_1, па припада равни π_1.
Даље, две паралелне праве, тј. компланарне и дисјунктне праве, сликају се у компланарне и дисјунктне праве, тј. у паралелне праве.
Троугао се слика у троугао чије су ивице једнаке ивицама полазног троугла, па су тада и одговарајући углови два троугла једнаки.

Последица

Изометријом еуклидског простора се дужи сликају у дужи, полуправе у полуправе, праве сликају у праве, а равни се сликају у равни.

Последица

Изометријом се паралелне праве и равни сликају у паралелне праве и равни. Изометријом се углови сликају у њима једнаке углове. Специјално, ортогоналне праве се сликају у ортогоналне праве.

Линеарни део пресликавања. Нека је $\mathcal{I}$ једна изометрија. Нека су A, B, C, D тачке такве да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Тада се средишта дужи AD и BC поклапају, нека је то тачка X. Изометријом $\mathcal{I}$ тачка X се слика у средиште дужи $\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(D)$ и у средиште $\mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C)$. Зато важи да је $\overrightarrow{\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)} = \overrightarrow{\mathcal{I}(C)\mathcal{I}(D)}$.

Дакле, изометрија $\mathcal{I}$ индукује и пресликавање векторског простора R^n у себе, означимо то пресликавање са $\overline{\mathcal{I}}$.
С обзиром да се паралелне праве, сликају у паралелне праве, колинерани вектори који их одређују, сликају се у колинеарне векторе.
При том, ако је тачка B између A и C, онда је

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = AB : BC = \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B) : \mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C) = \overrightarrow{\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)} : \overrightarrow{\mathcal{I}(B)\mathcal{I}(C)},$$

односно $\overline{\mathcal{I}}$ је хомогено пресликавање.
Произвољни вектор $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ за неке тачке P, Q и R се слика у $\overrightarrow{\mathcal{I}(P)\mathcal{I}(R)} = \overrightarrow{\mathcal{I}(P)\mathcal{I}(Q)} + \overrightarrow{\mathcal{I}(Q)\mathcal{I}(R)}$ те је пресликавање $\overline{\mathcal{I}}$ и адитивно, односно $\overline{\mathcal{I}}$ је линеарна трансформација векторског простора R^n. Називамо је **линеарним делом пресликавања** $\mathcal{I}$.

Нека је за произвољну тачку X $\mathcal{I}(X) = X'$ и посебно $\mathcal{I}(O) = O'$. Означимо са $[X]$ колону координата тачке X.
Пресликавање $\overline{\mathcal{I}}$ слика линеарно вектор $\overrightarrow{OX}$ са координатама $[X] - [O] = [X]$ у $\overrightarrow{O'X'}$ са координатама $[X'] - [O']$. Зато постоји квадратна матрица A таква да важи $[X'] - [O'] = A([X] - [O])$ односно да је

$$X' = AX + O', \tag{1}$$

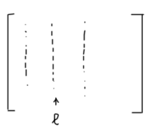
где смо са X', X, O' означили и колону координата одговарајућих тачака.
Како је $\overline{\mathcal{I}}$ бијективно, матрица A је недегенерисана.

Пример *Коинциденција је дата једначином $[X'] = [X]$, па је одговарајућа матрица линеарног пресликавања јединична E.*

Тврђење

Пресликавање дато формулом (1) је изометрија ако и само ако је A ортогонална матрица, односно ако важи $AA^t = A^tA = E$,

Доказ. Нека је са (1) дата једна изометрија.



Означимо l-ту колону матрице A са A_l. Ове колоне су слике вектора ортонормиране базе $e_1, \dots, e_n$. Зато је $A_i \circ A_j = 0$ за $i \neq j$ и $A_i \circ A_i = 1$. Самим тим $AA^t = E$.
Обратно, ако је $AA^t = E$, онда колоне матрице A представљају векторе неке ортонормиране базе у коју се слика база $e_1, \dots, e_n$, те $\overline{\mathcal{I}}$ слика векторе у векторе њима подударних норми. Како је норма вектора $\overrightarrow{AB}$ једнака $\rho(A, B)$ пресликавање $\mathcal{I}$ чува растојања, односно изометрија је. □

Последица

Нека је формулом (1) дата изометрија. Тада је $\det A \in \{-1, 1\}$.

Ако су изометрије $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ дате редом формулама $X' = A_1X + B_1$ и $X' = A_2X + B_2$ тада је њихова композиција $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ је дата формулом $X' = A_2A_1X + (A_2B_1 + B_2)$.

Дефиниција

Изометрија еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ дата формулом $X' = AX + B$ је **директна трансформација** ако је $\det A = 1$, а **индиректна** ако је $\det A = -1$.

Тврђење

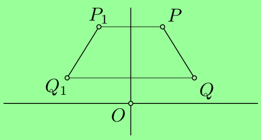
Композиција две директне или две индиректне изометрије простора $\mathbb{R}^n$ је директна изометрија. Композиција једне директне и једне индиректне изометрије је индиректна изометрија.

Доказ. Нека су A_1 и A_2 матрице изометрија $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$. Тада је $A_2 \cdot A_1$ матрица изометрије $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$. С обзиром да је $\det A_2A_1 = \det A_2 \cdot \det A_1$ тврење следи. □

Лема

Скуп свих директних изометрија простора $\mathbb{R}^n$ је подгрупа групе $Iso(\mathbb{R}^n)$.

Пример : Рефлексија у односу на осу q**.**



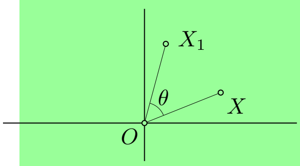
Посматрајмо у еуклидској равни x_2-осу, дату једначином $x_1 = 0$. Пресликавање које сваку тачку равни $P(x_1, x_2)$ слика у $P_1(-x_1, x_2)$ чува растојање међу тачкама, па јесте изометрија равни коју називамо рефлексијом у односу на праву $x_1 = 0$.

Пример *...За произвољну тачку P, средиште дужи PP_1 припада правој $x_1 = 0$, и ако је $P \neq P_1$ праве PP_1 и $x_1 = 0$ су ортогоналне.*
Матрица пресликавања је дата са

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и важи $\det A = -1$ *па је у питању индиректна изометрија.*

Пример Ротација око тачке O**.**



Изометрија $\mathcal{I}$ еуклидске равни таква да је $\mathcal{I}(O) = O$, док је за произвољну другу тачку X те равни оријентисани угао између $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX_1}$ подударан датом углу θ ...

Пример *...је* **ротација равни** *око тачке* O. *Вектори* $\overrightarrow{i}$ *и* $\overrightarrow{j}$ *се тада пресликавањем* $\overline{\mathcal{I}}$ *редом сликају у* $\overrightarrow{i}' = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ *и* $\overrightarrow{j}' = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$, *па је матрица* A *пресликавања дата са*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

а изометрија $\mathcal{I}$ *је дата формулом* $X' = AX$. *Очигледно је* $\mathcal{I}$ *директна трансформација.*

Пример *Изометрија еуклидског простора* $\mathbb{R}^n$ *дата формулом* $X = X + B$ *је директна изометрија коју називамо* **транслацијом**.

Теорема

Нека је A ортогонална матрица димензије n, $n \in \mathbb{N}$, односно матрица једне изометрије. Тада је постоји ортонормирана база простора R^n у којој дата изометрија има матрицу

$$\begin{bmatrix} E_i & & & & \\ & -E_j & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_l \end{bmatrix} \tag{2}$$

где су E_i и E_j јединичне матрице реда i, односно j, редом, а $R_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$ где је $i + j + 2l = n$. При том је $\det A = (-1)^j$. **БД**

Примедба *Блокови матрице* E_i *и* $-E_j$ *одговарају векторима који су сопствени за матрицу* A. *Сопствене вредности матрице* A *могу бити реалне или конјуговано комплексне.*

Примедба *Нека је* λ *једна реална сопствена вредност матрице* A *и* v *одговарајући сопствени вектор. Функција растојања је на природан начин усклађена са нормом вектора. Зато пресликавање* $\overline{\mathcal{I}}$ *слика вектор* v *у вектор исте норме, односно*

$$\|v\| = \|\overline{\mathcal{I}}v\| = \|\lambda v\|, \text{ па је } |\lambda| = 1.$$

Примедба *Матрица* A *је слична матрици (2), а при том, с обзиром да су обе матрице дате у ортонормираним базама, матрица преласка* Q *такође одговара изометрији, тј. ортогонална је. Зато важи да је* $Q^{-1} = Q^t$.

Примедба *У случају да је* $n = 1$, *матрица пресликавања има само једну координату. При том је та координата* 1 *или* -1.

Примедба *У случају да је* $n = 2$, *матрица пресликавања* A *је дата са*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

где је $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ *и* $ac + bd = 0$. *Зато постоје реални бројеви* α *и* β *такви да је* $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$ *и да при том важи* $\sin(\alpha+\beta) = 0$.
Тада је $\sin\beta = -(-1)^k \sin\alpha$, $\cos\beta = (-1)^k\cos\alpha$, *за* $k \in \mathbb{N}$...

Примедба... *За парно* k *матрица* A *пресликавања је једнака*

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

а за непарно k *има облик*

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

При том, матрица R_α *има конјуговано комплексне сопствене вредности за* $\sin\alpha \neq 0$, *а двоструку реалну* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cos\alpha \in \{-1, 1\}$, *за* $\sin\alpha = 0$. *Матрица* S_α *за сопствене вредности има* $\lambda_1 = 1$ *и* $\lambda_2 = -1$...

Примедба...*Важи и*

$$R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}, \qquad S_\alpha \cdot S_\beta = R_{\beta-\alpha},$$
$$S_\alpha \cdot R_\beta = S_{\alpha+\beta}, \qquad R_\alpha \cdot S_\beta = S_{\beta-\alpha}.$$

Дефиниција

Тачка P, права p или раван π су **инваријантне**, односно **фиксне** у трансформацији $\mathcal{I}$ ако се том трансформацијом сликају у себе, односно ако важи $\mathcal{I}(P) = P$, односно $\mathcal{I}(p) = p$, тј. $\mathcal{I}(\pi) = \pi$.

Лема

Нека је трансформација еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ (не нужно изометрија), дата формулом $X' = AX + B$. Ова трансформација има тачно једну инваријантну тачку ако и само ако $\lambda = 1$ није сопствена вредност матрице A.

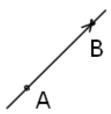
Доказ. Нека је трансформација еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ дата формулом $X' = AX + B$. Тачка P је инваријантна тачка ове трансформације ако и само ако је $P' = P$ односно ако је n-торка $[P]^t$ решење матричне једначине

$$(A - E)X = -B. \tag{3}$$

Једначина (3) има јединствено решење, ако и само ако је матрица $(A - E)$ инвертибилна, односно ако $\lambda = 1$ није сопствена вредност матрице A. □

Једначина (3) је еквивалентна једном линеарном систему једначина. Зато, ако матрица $(A - E)$ није инвертибилна онда једначина (3) или нема решења или их има бесконачно много.

Да бисмо анализирали и класификовали изометријске трансформације еуклидских простора $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ занимаће нас њихове инваријантне тачке, али и сопствени вектори. Нека трансформација $\mathcal{I}$ има бар једну инваријантну тачку A и нека има нетривијални сопствени потпростор V_1 за сопствену вредност $\lambda = 1$. Ако је B нека друга инваријантна тачка, тада се вектор $\overrightarrow{AB}$ слика у вектор $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, тј. $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, па је $\overrightarrow{AB}$ сопствени за $\lambda = 1$ и припада простору V_1.



Обрнуто, нека је $\overrightarrow{v} \in V_1$ и B таква да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Означимо $\mathcal{I}(B) = B_1$. Тада је $\overrightarrow{\mathcal{I}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB_1}$, па је $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{v}$, тј. $B = B_1$, односно и тачка B је инваријантна.

Показали смо да важи следеће тврђење.

Теорема

Нека је $\mathcal{I} : X' = AX + B$ једна трансформација (не нужно изометријска) простора R^n. Тада се скуп свих инваријантних тачака трансформације $\mathcal{I}$ се може записати у облику $\{A + \overrightarrow{v} | \overrightarrow{v} \in V_1\}$, где је A једна, фиксирана инваријантна тачка, а V_1 сопствени потпростор за $\lambda = 1$.

У случају да изометријска трансформација нема инваријантних тачака, за њено боље разумевање нам може помоћи следећа теорема.

Теорема

Нека је $\mathcal{I}$ изометрија дата формулом $X' = AX + B$, која нема инваријантних тачака. Тада постоји изометрија $\mathcal{J}$ таква да је $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{J}$, где је $\mathcal{J}$ изометрија са бар једном инваријантном тачком, а τ_v је транслација за вектор v који припада сопственом потпростору матрице A за вредност $\lambda = 1$.

Прво, с обзиром да трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака следи да $\lambda = 1$ јесте њена сопствена вредност, те је сопствени потпростор за $\lambda = 1$ нетривијалан.
Даље, матрица транслације $[\tau] = E$ је јединична матрица па је $[\mathcal{I}] = E[\mathcal{J}]$, па изометрије $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ имају исте матрице, а самим тим и исте сопствене вредности и потпросторе.