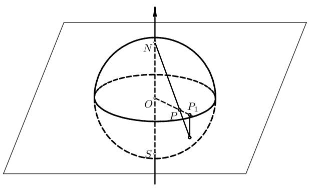
17. Клајнов модел хиперболичке геометрије

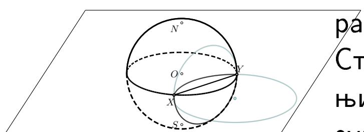
Представићемо укратко, још један познат модел хиперболичке геометрије, Клајнов диск модел $\mathbb{K}$. Тачке овог модела су такође тачке унутрашњости јединичног круга којег такође називамо **апсолутом**.



Сам модел $\mathbb{K}$ се од Поенкареовог диск модела може добити једноставном геометријском конструкцијом. Нека је $\mathcal{S}^2$ јединична сфера еуклидског простора са центром у координатном почетку. Тада је апсолута пресек сфере $\mathcal{S}^2$ и равни $x_3 = 0$.

Стереографском пројекцијом π, јужна хемисфера $\mathcal{S}^2_- = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 < 0\}$ слика се у унутрашњост апсолуте, док је сама апсолута инваријантна у овој пројекцији. Нека је π_1 ортогонална пројекција простора на раван $x_3 = 0$.

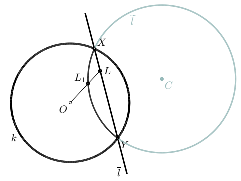
Њена рестрикција на $\mathcal{S}^2_-$ је бијекција којом се $\mathcal{S}^2_-$ слика у унутрашњост апсолуте. Зато $\pi_1 \circ \pi^{-1}$ слика унутрашњост апсолуте у себе.
Клајнов диск модел је слика Поенкареовог диск модела у бијекцији $J = \pi_1 \circ \pi^{-1}$.



Праве Клајновог модела $\mathbb{K}$ су слике h-правих Поенкареовог диск модела. h-права је уопштени круг еуклидске равни ортогоналан на апсолуту. Стереографска пројекција слика углове у њима једнаке углове, а уопштене кругове еуклидске равни у кругове сфере $\mathcal{S}^2$, и при том је апсолута инваријантна.
Зато је слика уопштеног круга $\widetilde{l}$ ортогоналног на апсолуту, круг сфере ортогоналан на апсолуту, који тада припада равни простора паралелној x_3-оси.

При том, тачке h-праве се сликају у тачке јужне хемисфере, па је слика једне h-праве l, у стереографској пројекцији, полукруг ортогоналан на апсолуту.

Даље, ортогоналном пројекцијом π, полукругови јужне хемисфере се сликају у еуклидске отворене дужи, јер припадају равнима нормалним на $x_3 = 0$. Ако су X и Y бесконачно далеке тачке h-праве l, тада је њена слика, права у Клајновом моделу $\mathfrak{l}$, отворена еуклидска дуж XY, а тачке X и Y сматрамо бесконачно далеким тачкама хиперболичке праве $\mathfrak{l}$.



Уочимо, при том, уколико је $\widetilde{l}$ еуклидски круг и C његов центар, права XY је полара тачке C у односу на апсолуту. Слично, ако је $\widetilde{l}$ права тада је права XY полара бесконачно далеке тачке. Праву XY означавамо тада са $\overline{l}$.

Ако су $z = x_1 + \imath x_2$ координате тачке Поенкареовог диск модела, тачка $\pi^{-1}(x_1, x_2)$ има координате X, Y, Z

$$X = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad Y = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad Z = -\sqrt{1 - X^2 - Y^2}.$$

Зато су координате $\omega = \overline{x}_1 + \imath \overline{x}_2$ одговарајуће тачке Клајновог модела дате са

$$\overline{x}_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \quad \overline{x}_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1},$$

односно $\omega = \frac{2}{|z|^2+1} z$.
Обратно,

$$x_1 = \frac{X}{1 - Z} = \frac{\overline{x}_1}{1 + \sqrt{1 - \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2}}, \quad x_2 = \frac{Y}{1 - Z} = \frac{\overline{x}_2}{1 + \sqrt{1 - \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2}},$$

односно $z = \frac{1}{1+\sqrt{1-|\omega|^2}} \omega$.

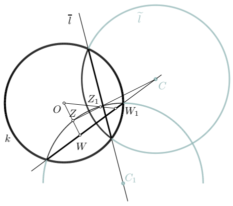
Изоморфизам два модела не пресликава углове у њима подударне углове.
Нека су $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$, два круга са центрима C_1 и C_2, који дефинишу h-праве l_1 и l_2 Поенкареовог диск модела са бесконачно далеким тачкама X_1, Y_1, односно X_2 и Y_2.
Они су нормални ако и само ако центар једног припада радикалној оси за други круг и круг k, односно ако и само ако $C_2 \in X_1Y_1$, или еквивалентно $C_1 \in X_2Y_2$. Слично важи уколико је бар једна од h-правих одређена еуклидском правом. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Права Клајновог модела $\mathfrak{l}_1$ нормална на праву $\mathfrak{l}_2$ ако и само ако права $\overline{l_1}$ садржи пол праве $\overline{l_2}$.

h-рефлексије у Клајновом моделу.

Нека је l h-права Поенкареовог диск модела и $\mathfrak{l}$ њена слика у Клајновом моделу. Нађимо рефлексију у односу на праву $\mathfrak{l}$ Клајновог модела односно пресликавање $S_{\mathfrak{l}} = J \circ S_l \circ J^{-1}$.
h-праве се h-рефлексијом сликају у h-праве. Зато $S_{\mathfrak{l}}$ слика отворене тетиве апсолуте у отворене тетиве апсолуте и "чува" колинеарност тачака.



Сетимо се да се пресликавање равни које "чува" колинеарност назива **колинеација** и да је свака колинеација пројективно пресликавање. Зато је $S_{\mathfrak{l}}$ рестрикција једног пројективног пресликавања $\mathcal{P}$ равни, које при том слика апсолуту k у себе.

Тачке основице су инваријантне за рефлексију. Дакле, тачке $\mathfrak{l}$, а самим тим и $\bar{l}$ су инваријантне за $\mathcal{P}$, па је права $\bar{l}$ оса пресликавања $\mathcal{P}$.
h-праве нормалне на основицу h-рефлексије су инваријантне за ту рефлексију. Зато, ако је $\mathfrak{p}$ права Клајновог модела нормална на $\mathfrak{l}$, односно ако $\bar{p}$ садржи пол праве $\bar{l}$, онда је $\mathfrak{p}$ инваријантна за $S_{\mathfrak{l}}$. Зато је $\bar{p}$ инваријантна за $\mathcal{P}$, па је пол праве $\bar{l}$ центар пресликавања. Зато је $\mathcal{P}$ хиперболичка хомологија.

Нека се тачка A модела $\mathbb{K}$ слика путем рефлексије $S_{\mathfrak{l}}$ у тачку A_1, нека је C пол праве $\bar{l}$ и нека AA_1 сече $\bar{l}$ у L. Тада су C и L инваријантне за пресликавање, а тачке A и A_1 се сликају једна у другу.

Пројективно пресликавање "чува" дворазмеру, па је $(C, L, A_1, A)^{-1} = (C, L, A, A_1) = (C, L, A_1, A)$ односно $(C, L, A_1, A) = -1$. Зато је $H(C, L, A, A_1)$. Хомологија са овом особином је **хармонијска** хомологија. Свака хармонијска хомологија је инволутивно пресликавање.
Обратно, ако је $\mathcal{P}$ хармонијска хомологија, где су оса и центар, редом, пол и полара у односу на k, слика k у себе, а $\mathcal{P}|_{\mathbb{K}}$ је једна рефлексија модела.
Зато је група изометрија хиперболичке равни подгрупа групе пројективних трансформација за које је, при том, круг k инваријантан.

Важи и обрнуто, односно рестрикција сваког пројективног пресликавања $\mathcal{P}$ за које је круг k инваријантан, на $\mathbb{K}$ је једна изометрија модела.

Сетимо се и да су произвољне две конике пројективно еквивалентне. Зато важи следеће тврђење.

Теорема

Група изометрија хиперболичке равни изоморфна је подгрупи пројективних пресликавања равни у којима је дата коника инваријантна.