13. Инверзивне трансформације

Постоји једнозначна кореспонденција између тачака еуклидске равни $\mathbb{E}^2$ и скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$ у којој тачки (x_1, x_2) одговара комплексни број $z = x_1 + \imath x_2$, а кажемо да је z комплексна координата дате тачке.

Уочимо да је растојање између две тачке са координатама z_1 и z_2 једнако $|z_1 - z_2|$.

Тврђење

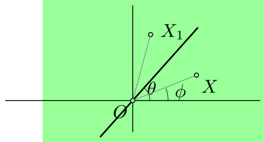
Свака изометрија еуклидске равни $\mathcal{I}$ може се записати као

$$\mathcal{I}(z) = az + b, \quad \text{или} \quad \mathcal{I}(z) = a\overline{z} + b,$$

где су $a, b \in \mathbb{C}$ и $|a| = 1$. Обратно, свака трансформација овог облика је изометрија.

Доказ. Докажимо прво да су овако задате трансформације изометрије. Ако се тачке са комплексним координатама z_1, z_2 сликају у z_1' и z_2' трансформацијом $\mathcal{I}$, тада је растојање између слика $|z_1' - z_2'| = |a||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$, па су дате трансформације изометрије.
Специјално $z \mapsto \overline{z}$ слика тачке $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$, па је у питању осна рефлексија у односу на x_1-осу, коју ћемо означавати са S_p.
Нека је $\mathcal{I}(0) = b$, а $\mathcal{I}(1) = b + a$. Тада је $|a| = 1$. Нека је је $\mathcal{J}(z) = az + b$, изометрија. Тада је и $\mathcal{J}(0) = a$, $\mathcal{J}(1) = b + a$, те су тачке 0 и 1 инваријантне у изометрији $\mathcal{J}^{-1} \circ \mathcal{I}$. Зато, ова композиција може бити или коинциденција ε, када је $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ или осна рефлексија S_p, када је $\mathcal{I} = \mathcal{J} \circ S_p$. □

Пример



Уочили смо да је трансформација $z \mapsto \overline{z}$ рефлексија у односу на x_1-осу. Ако је q права која садржи координатни почетак и одређу је угао θ са x_1-осом тада се тачка $z = |z|e^{i\phi}$ рефлексијом у односу на q слика у тачку $z' = |z|e^{\imath(2\theta-\phi)} = e^{2\imath\theta}\overline{z}$.

Пример *Ако је $b = b_1 + \imath b_2$, тада је трансформација $z \mapsto z + b$ дата са $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + b_1, x_2 + b_2)$ те је у питању транслација за вектор (b_1, b_2).*

Пример *Посматрајмо изометрију $z \mapsto az$. Како је $|a| = 1$, следи да је $a = \cos\phi + \imath\sin\phi$. Зато важи $(x_1, x_2) \mapsto (\cos\phi x_1 - \sin\phi x_2, \sin\phi x_1 + \cos\phi x_2)$, па је дата трансформација ротација око координатног почетка O за угао ϕ.*

Видимо, сада, да се свака изометрија равни може представити, када је у питању директна трансформација, као композиција ротације око тачке O и транслације, а којима, у случају индиректне трансформације претходи рефлексија у односу на x_1-осу.

Пример *Нека је $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Нека је $f(z) = kz$. Тада се (x_1, x_2) слика у (kx_1, kx_2), те је трансформација хомотетија $H_{O,k}$.*

Сетимо се да се свака сличност може представити као композиција произвољне хомотетије и неке изометрије. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Свака сличност еуклидске равни $\mathcal{S}$ може се записати као $\mathcal{S}(z) = az + b$, или $\mathcal{S}(z) = a\overline{z} + b$, где су $a, b \in \mathbb{C}$ и где је $a \neq 0$.

Тврђење

Нека је $k(S, r)$ произвољни круг еуклидске равни са центром $c = a + ib$ и полупречником r. Тада је инверзија у односу на круг k у комплексним координатама дата са:

$$\psi_k : z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z - c}} + c.$$

Доказ. Нека је $S = O$, координатни почетак. У реалним координатама је тада инверзија дата формулама $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2})$. При том је $z\overline{z} = x_1^2 + x_2^2$, па у комплексним координатама је ова трансформација дата са $z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z}}$.

Ако тачка S, са координатом c није координатни почетак, тада се транслацијом $\tau(z) = z - c$, дати круг слика у круг k_1 са центром у координатном почетку. При том ако су w и w' тачке инверзне у односу на k, оне се сликају у тачке w_1 и w_1' инверзне у односу на k_1. Зато важи $\psi_k = \tau^{-1} \circ \psi_{k_1} \circ \tau$, па добијамо тражену формулу. □

Дефиниција

Трансформација проширене еуклидске равни која је композиција коначног броја уопштених инверзија је **инверзивна трансформација**.

Свака изометрија је композиција рефлексија, па и инверзивна трансформација. Хомотетија се може представити као композиција две инверзије те је и она инверзивна трансформација, као и сличности.

Пример *Нека је $f(z) = \frac{1}{z}$. Тада трансформацију f можемо представити као композицију $f = S_p \circ \psi_k$, где је $\psi_k(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ инверзија у односу на јединични круг са центром у координатном почетку, а $S_p(z) = \bar{z}$ рефлексија у односу на x_1-осу. Дакле и f је инверзивна трансформација.*

Лако добијамо следеће тврђење.

Тврђење

Скуп свих инверзивних трансформација проширене еуклидске равни чини групу. Група сличности је подгрупа те групе.

Дефиниција

Трансформације проширене еуклидске равни дате са

$$m : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

називамо **Мебијусовим трансформацијама** или **хомографијама**. Композиција Мебијусове трансформације и рефлексије у односу на x_1-осу $m \circ S_p$

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

је **антихомографија**. Скуп свих Мебијусових трансформација означаваћемо са $\mathcal{M}_1$ а свих антихомографија са $\mathcal{M}_2$.

Свака Мебијусова трансформација је одређена одговарајућом инвертибилном комплексном матрицом

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

При том, две сразмерне матрице одређују исто пресликавање.

Тврђење

Скуп свих Мебијусових трансформација $\mathcal{M}_1$ је група.

Доказ. Директном провером добијамо да је композиција две Мебијусове трансформације $m_2 \circ m_1$ са матрицама M_1 и M_2, поново Мебијусова трансформација са матрицом $M_2 \circ M_1$, а да је инверз m_1^{-1} Мебијусова трансформација којој одговара матрица M_1^{-1}. □

Тврђење

Композиција хомографије и антихомографије је антихомографија, а композиција две антихомографије је хомографија.

Доказ. Свака антихомографија је дата са $z \mapsto m(\overline{z})$ где је m хомографија. Ако је M матрица хомографије m, тада је $\overline{m(\overline{z})} = \overline{m}(z)$ хомографија са матрицом $\overline{M}$. Нека су m_1 и m_2 две хомографије. Тада су композиције хомографије $z \mapsto m_2(z)$ и антихомографије $z \mapsto m_1(\overline{z})$ дате са

$$z \mapsto m_2(m_1(\overline{z})) = m_2 \circ m_1(\overline{z}),$$
$$z \mapsto m_1(\overline{m_2(z)}) = m_1(\overline{m_2}(\overline{z})) = m_1 \circ \overline{m_2}(\overline{z}),$$

те су у питању антихомографије.

Композиција две антихомографије $z \mapsto m_2(\overline{z})$ и $z \mapsto m_1(\overline{z})$ дата је са

$$z \mapsto m_2(\overline{m_1(\overline{z})}) = m_2(\overline{m_1}(z)) = (m_2 \circ \overline{m_1})(z),$$

па је у питању хомографија. □

Тврђење

Трансформација проширене еуклидске равни је инверзивна ако и само ако је хомографија или антихомографија.

Доказ. Покажимо да су Мебијусове трансформације инверзивне. Ако је $c = 0$, а самим тим $ad \neq 0$, трансформација је композиција изометрије, видети Тврђење 1, и хомотетије $H_{O,|a|}$, па је инверзивно пресликавање.

Нека је $c \neq 0$. Тада је

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{a}{c}d}{cz+d} = \frac{b-\frac{a}{c}d}{c}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

па добијамо композицију инверзивних пресликавања.
Како је свака антихомографија композиција хомографије и рефлексије онда је и она инверзивно пресликавање.
Покажимо сада обрнуто тврђење, односно да је свака инверзивна трансформација хомографија или антихомографија.
Изометрије добијамо за $c = 0$ и $|a| = 1$.
Инверзија у односу на круг $k(S, r)$ где је комплексна координата тачке S дата $c = a + ib$ је

$$\psi_k(z) = \frac{r^2}{\overline{z-c}} + c = \frac{c\overline{z} + (r^2 - c\overline{c})}{\overline{z} - \overline{c}},$$

па је ψ_k антихомографија.

С обзиром да свако инверзивно пресликавање добијамо као композицију инверзија и рефлексија, а унија Мебијусових трансформација и рефлексија је затворена за композиције добијамо да важи тврђење. □

Примедба *Свака инверзија у односу на круг је антихомографија, као и рефлексије у односу на праве које садрже координатни почетак. Ако права r не садржи координатни почетак, постоји транслација τ која је слика у праву q кроз O.*

Тада је $S_r = \tau \circ S_q \circ \tau^{-1}$ па је свака рефлексија антихомографија. Зато је свака Мебијусова трансформација композиција парног броја уопштених инверзија, а свака антихомографија композиција непарног броја уопштених инверзија. Називамо их редом, **директним** *и* **индиректним** *инверзивним трансформацијама.*

С обзиром на особине осних рефлексија и инверзије важи следеће тврђење.

Тврђење

а) Инвертивна пресликавања сликају уопштене кругове у уопштене кругове.
б) Инвертивна пресликавања "чувају" дворазмеру.
в) Две криве које се секу пресликавају се инвертивним пресликавањем у криве које се секу под истим углом. При том, директне инверзивне трансформације "чувају" оријентацију углова, а индиректне мењају.