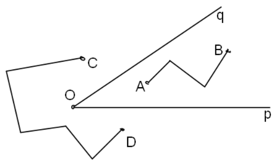
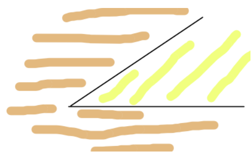
5. Угао и диедар

Дефиниција

Скуп тачака две разне полуправе једне равни са заједничким теменом O је **угаона линија** pq. Полуправе p и q су **краци**, тачка O је **теме** те угаоне линије.





Теорема (5.1)

Нека је pq угаона линија равни π. Релација повезивости парова тачака је релација еквиваленције на скупу $\pi \setminus pq$ са тачно две класе еквиваленције. **БД**

Дефиниција

Сваку од ових класа еквиваленције називамо **отвореним углом** и означавамо $\angle(pq)$. Унију једног отвореног угла и одговарајуће угаоне линије називамо **затвореним углом** и пишемо $\angle[pq]$. Уколико није од значаја да ли је угао отворен или затворен означавамо га са $\angle pq$, $\angle pOq$ или $\angle POQ$, где $P \in p$, $Q \in q$.

Дефиниција

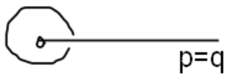
Два разна угла једне равни са заједничком угаоном линијом су међусобно **комплементни**.

Дефиниција

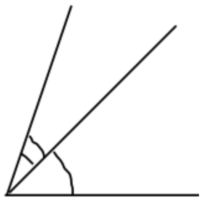
Ако специјално допустимо да се полуправе p и q поклапају (тада постоји само једна класа еквиваленције у Теореми 5.1), онда одговарајући угао називамо **пуним** углом.

Дефиниција

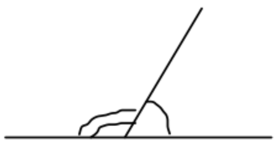
Ако су краци угла комплементне полуправе, онда је угао **опружен**. Два угла једне равни који имају заједнички крак и сем тога немају других заједничких тачака су **суседни**. Суседни углови којима су незаједнички краци комплементне полуправе су **напоредни**. Конвексни углови pq и $p'q'$ чији су краци p и p', тј. q и q' комплементне полуправе су **унакрсни**.



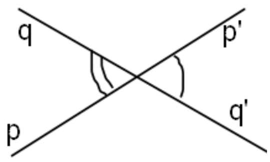
pun ugao



susedni uglovi



naporedni uglovi



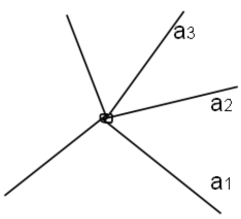
unakrsni uglovi

Теорема (5.3)

Полуправа са теменом O која припада углу са теменом O разлаже тај угао на два угла. **БД**

Теорема (5.4)

Скуп који се састоји од n разних полуправих једне равни са заједничким теменом разлаже ту раван на n отворених углова. **БД**

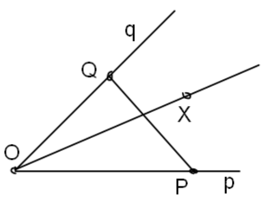


Ако кажемо да полуправе разлажу раван на углове $\angle a_1 a_2$, $\angle a_2 a_3, \ldots$ онда тиме још кажемо, крајње неформално, да читајући називе полуправих редом (у смеру казаљке на сату или обрнуто) читамо $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Сада ћемо навести важну карактеризацију тачака угла.

Теорема

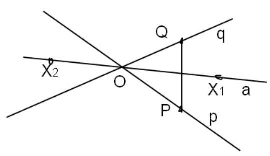
Свака тачка неке **полуправе** са теменом O припада отвореном, конвексном, неопруженом углу $\angle pOq$ ако и само ако та полуправа сече отворену дуж PQ где су $P \in p$, $Q \in q$ произвољне тачке $P, Q \neq O$. **БД**

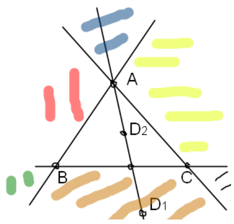


Дакле, тачка X припада отвореном, конвексном, неопруженом углу $\angle pq$ ако и само ако полуправа OX сече отворену дуж PQ где су P и Q произвољне тачке крака p и q.

Теорема (5.5)

Нека су P и Q тачке крака конвексног, неопруженог угла pOq и нека је a права равни тог угла која садржи теме O. Било која тачка праве a, сем O припада отвореном углу pq или њему унакрсном углу ако и само ако a сече (PQ). **БД**

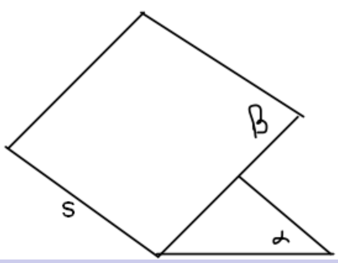




Ако су A, B, C три неколинеарне тачке, може се показати да праве AB, BC, CA разлажу раван на 7 области. Тачка D која припада некој од ових области онда припада бар једном пару унакрсних углова са теменима A, B или C.

Теорема (5.8)

(Други Пеанов став) Ако су A, B, C три неколинеарне тачке, тада тачка D припада равни ABC ако и само ако припада скупу тачака правих које садрже: тачку A и неку тачку затворене дужи $[BC]$, или тачку B и неку тачку $[CA]$, или тачку C и неку тачку $[AB]$. **БД**



Дефиниција

Скуп тачака две затворене полуравни α и β са заједничким рубом s је **диедарска површ** $\alpha\beta$. Полуравни α и β су њене **стране** или **пљосни**, а s је њена **ивица**.

Теорема (5.9)

Релација повезивости парова тачака је релација еквиваленције на скупу $S \setminus \alpha\beta$ са тачно две класе еквиваленције. **БД**

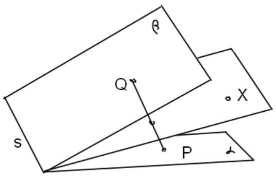
Дефиниција

Сваку од класа екв. називамо **отвореним диедром** и означавамо са $\angle(\alpha\beta)$. Унија отвореног диедра и одговарајуће диедарске површи је **затворен диедар** $\angle[\alpha\beta]$. Појмови **комплементних, пуних, суседних, напоредних** и **унакрсних** диедара се дефинишу у аналогији са одговарајућим појмовима везаним за углове.

Теорема (5.10)

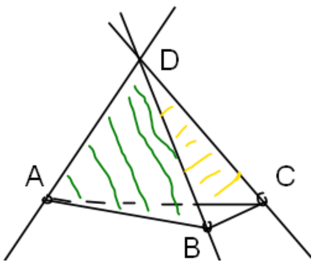
Скуп n разних полуравни са заједничком ивицом разлаже простор на n отворених диедара. **БД**

Даћемо сада и карактеризацију тачака отвореног диедра.



Теорема (5.11)

Свака тачка неке полуравни са рубом s припада отвореном, конвексном, неопруженом диедру $\alpha\beta$ са рубом s ако и само ако та полураван сече отворену дуж (PQ), где $P \in \alpha, Q \in \beta$, $P, Q \notin s$. **БД**



Ако су A, B, C, D некомпланарне тачке, онда равни њима одређене разлажу простор на 15 области, од којих свака припада бар једном пару унакрсних диедара чије пљосни припадају равнима ADB и ADC, тј. BDA и BDC, тј. CDA и CDB.

Теорема (5.12)

(Трећи Пеанов став) Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке, тада је E тачка простора S ако и само ако припада скупу тачака равни које садрже праву AD и неку тачку затворене дужи $[BC]$ или праву BD и неку тачку $[CA]$ или праву CD и неку тачку $[AB]$. **БД**