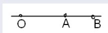
4. Полуправа, полураван, полупростор

Дефиниција

Нека су A, B, O тачке праве p и нека је $A, B \neq O$. Уколико не важи $\mathcal{B}(A, O, B)$ онда су тачке A и B **са исте стране тачке** O и пишемо $A, B \doteq O$, а у супротном A и B су **са разних страна тачке** O и пишемо $A, B \div O$.



Теорема (4.1)

Релација *са* исте стране тачке O је релација евиваленције на скупу $p \setminus \{O\}$ са тачно две класе еквиваленције.

Доказ. (Рефлексивност) Нека је $X \in p, X \neq O$. С обзиром да не важи $\mathcal{B}(X, O, X)$ јер би иначе X, O, X биле разне тачке, следи да је $X, X \doteq O$.
(Симетричност) Нека је $A, B \doteq O$, тј. $\neg\mathcal{B}(A, O, B)$. Тада $\neg\mathcal{B}(B, O, A)$, тј. $B, A \doteq O$.

(Транзитивност) Нека су $A, B, C \in p$ различите од O. Уколико се неке две од њих поклапају, тврђење тривијално важи (проверити!). Надаље можемо сматрати да су A, B, C различите. Нека је $A, B \doteq O$, $B, C \doteq O$. Дакле, $\neg\mathcal{B}(A, O, B)$ па важи или $\mathcal{B}(A, B, O)$ или $\mathcal{B}(B, A, O)$.
(ППС) Претпоставимо да $\neg A, C \doteq O$, тј. нека је $\mathcal{B}(A, O, C)$. Тада:
$\mathcal{B}(A, B, O)$ и $\mathcal{B}(A, O, C)$ повлачи $\mathcal{B}(A, B, O, C)$, а
$\mathcal{B}(B, A, O)$ и $\mathcal{B}(A, O, C)$ повлачи $\mathcal{B}(B, A, O, C)$.
Зато је $\mathcal{B}(B, O, C)$, па би тада важило $B, C \div O$. ↯
Зато ипак мора важити $A, C \doteq O$.
(Класе еквиваленције) Постоји $A \in p, A \neq O$. Такође, постоји тачка B т.д. је $\mathcal{B}(A, O, B)$. Зато је $A, B \div O$, па су њихове класе $[A] \neq [B]$.

Покажимо да не постоје друге класе сем ове две. Нека је $C \in p, C \notin [A]$. Потребно је показати да тада C припада $[B]$. $C \notin [A] \Rightarrow A, C \div O \Rightarrow \mathcal{B}(A, O, C)$. Такође важи и $\mathcal{B}(A, O, B)$. Уколико се тачке B и C поклапају, тривијално добијамо да $C \in [B]$.Уколико су различите, из $\mathcal{B}(A, O, B)$ и $\mathcal{B}(A, O, C)$ следи да је $\mathcal{B}(A, O, B, C)$ или $\mathcal{B}(A, O, C, B)$, па није $\mathcal{B}(B, O, C)$, тј. $C \in [B]$. □

Дефиниција

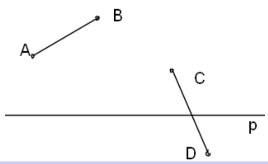
Сваку од ових класа еквиваленције називамо **отвореним полуправама**, а тачка O је њихово теме. Унија отворене полуправе и њеног темена је **затворена полуправа**. Две разне полуправе једне праве са заједничким теменом су **комплементне**.

Теорема

Скуп n разних тачака једне праве разлаже ту праву на $(n-1)$ отворену дуж и две отворене полуправе. **БД**

Дефиниција

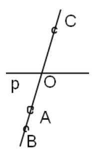
Нека су A, B и p две тачке и права равни π која их не садржи. Ако права p не сече дуж AB, онда су A и B **са исте стране** праве p и пишемо $A, B \dot{-} p$, а у супротном су **са разних страна** праве p, пишемо $A, B \div p$.



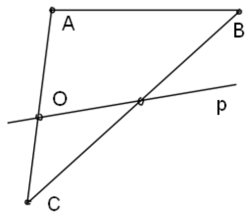
Теорема (4.3)

Релација са исте стране праве p равни π је релација еквиваленције на скупу $\pi \setminus p$, са тачно две класе.

Доказ. (Рефлексивност) Нека је $A \notin p$. С обзиром да не постоји тачка X таква да важи $\mathcal{B}(A, X, A)$, ни права p не може садржати тачке дужи са теменима A и A. Зато $A, A \dot{-} p$.
(Симетричност) Нека је $A, B \dot{-} p$. Тада p не сече дуж AB, па не сече ни дуж BA, тј. $B, A \dot{-} p$.
(Транзитивност) Нека $A, B \dot{-} p$ и $B, C \dot{-} p$. Претпоставимо да $\neg A, C \dot{-} p$, тј. нека p сече дуж AC у тачки O.



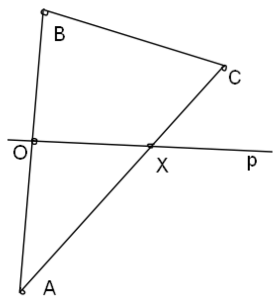
Уколико су тачке A, B, C колинеарне релација *са исте стране праве* p се за тачке праве AC своди на релацију *са исте стране тачке* O, те онда из $A, B \dot{-} O$ и $B, C \dot{-} O$ добијамо и да је $A, C \dot{-} O$, $\lightning$.



Нека су тачке A, B, C неколинеарне. Тада права p сече дуж AC у тачки O, а из $A, B \ddot{-} p$ следи да p не сече дуж AB. Тада, на основу Пашове аксиоме следи да p сече дуж BC. То би значило да $B, C \div p$, $\lightning$.

Дакле, важи да је $A, C \ddot{-} p$.

(Класе еквиваленције) Постоје тачка $O \in p$, тачка $A \notin p$ и тачка B т.д. је $\mathcal{B}(A, O, B)$. Зато је $[A] \neq [B]$. Нека је $C \notin p$ тачка те равни и нека је $C \notin [A]$, односно p сече дуж AC у некој тачки X. Уколико су тачке A, B, C колинеарне, тада је $X = O$ и $\mathcal{B}(A, O, C)$, па су $B, C \ddot{-} O$ и $B, C \ddot{-} p$.



Ако су тачке A, B, C неколинеарне, онда права p сече ивице AB и AC троугла ABC у тачкама O и X. Због последице Пашове аксиоме тада p не може сећи и ивицу BC, па је $B, C \ddot{-} p$, тј. $C \in [B]$. Зато постоје тачно две класе еквиваленције. $\square$

Дефиниција

Сваку од ових класа називамо **отвореним полуравнима**, а права p је њихова **ивица** односно **руб**. Унија отворене полуравни и њеног руба је **затворена полураван**. Две разне полуравни једне равни са заједничким рубом су **комплементне**.

Свака од отворених полуравни је повезан лик, а унија две комплементне отворене полуравни није. Дакле, две тачке из комплементних полуравни не могу се повезати полигонском линијом која не сече њихову ивицу.

Нека су A, B две тачке које не припадају равни π. Ако π не сече дуж AB онда су A и B **са исте стране равни** π и пишемо $A, B \ddot{-} \pi$, а у супротном су **са различитих страна** равни π (пишемо $A, B \div \pi$).

Релација *са исте стране* равни π је релација еквиваленције на скупу $\mathcal{S} \setminus \pi$ ($\mathcal{S}$ је простор), са тачно две класе еквиваленције. Те класе називамо **отвореним полупросторима**, π је њихов **руб**. Унија отвореног полупростора и његовог руба је **затворени полупростор**.

Два разна полупростора са истим рубом су **комплементни**.

Свака полигонска линија која повезује две тачке из комплементних полупростора сече њихов руб.