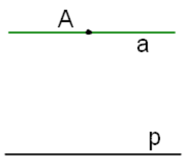
22. Плејферова аксиома

Пета група аксиома се бави питањем паралелности. На основу Лежандрових теорема наслутили смо да постоје две опције које можемо разматрати. За сваку од њих у петој групи постоји једна аксиома. У овој лекцији, пртпоставићемо да важи следећа аксиома:

V-E (Плејферова аксиома) Постоје тачка A и права p која је не садржи такве да у равни њима одређеној постоји тачно једна права a која садржи тачку A и која је дисјунктна са p.



Геометрија заснована на аксиомама прве четири групе и Плејферовој аксиоми назива се **еуклидском** или **параболичком** геометријом.

С обзиром да постоје тачка A и права p из аксиоме V-E, у њиховој равни постоји троугао чији је дефект 0 (видети 4. Лежандрову теорему). Зато је дефект сваког троугла 0 (2. Лежандрова теорема), па ће поново због 4. Лежандрове теореме особина из V-E да важи за сваку тачку и праву која је не садржи, тј. важи:

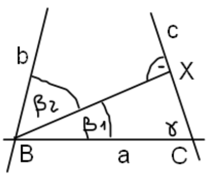
Теорема (26.1)

За сваку тачку A и праву p која је не садржи, у равни њима одређеној постоји тачно једна права a која садржи тачку A и која је дисјунктна са p.

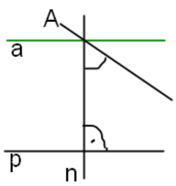
Еквиваленти V-E:
-збир унутрашњих углова произвољног троугла је π;
-збир унутрашњих углова простог равног четвороугла је 2π;
-сви углови Ламбертовог четвороугла су прави;
-углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су прави;

-свака права ортогонална на једном краку оштрог угла сече други крак;
-угао паралелности је прав;
-две праве једне равни су паралелне акко су дисјунктне;
-сваки ортогонални прамен је и параболички;
-постоје тачно две врсте праменова: конкурентни и параболички;
-свака еквидистанта је права;
-постоје тачно две врсте епицикала: кругови и праве;
-постоји круг који садржи три произвољне неколинеарне тачке.

Пети Еуклидов постулат: Ако једна права у пресеку са другим двема правама образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве се секу са оне стране са које су ови углови.
Покажимо да су 5. Еуклидов постулат и $\mathrm{V\text{-}E}$ еквивалентни.



Нека важи $\mathrm{V\text{-}E}$ и нека права a сече праве b и c у тачкама B и C тако да са исте стране образује два угла чији је збир мањи од π. Тада је бар један од тих углова оштар, нпр. γ са теменом у C, па је подножје нормале X из B на c са исте стране праве a као и дати углови. Полуправа BX разлаже угао са теменом у B на углове $\angle CBX = \beta_1$ и β_2.
Како је $\gamma + \beta_1 + \beta_2 < \pi$, а $\gamma + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ следи да је β_2 оштар. Како је угао паралелности прав, следи да b сече c са те стране праве a.



Обратно, нека важи 5. Еуклидов постулат и нека права p не садржи A. Ако је n, $A \in n$, $n \perp p$ и a, $A \in a$ и $a \perp n$, онда су a и p дисјунктне. За произвољну другу праву b, $A \in b$, b образује са n оштар угао, па се на p и b које секу n може применити 5. Еуклидов постулат и следи да се b и p секу. Дакле онда важи $\mathrm{V\text{-}E}$.

Примедба *Већ смо уочили да су индиректне изометрије (апсолутне) равни осне и клизајуће рефлексије.*

Директна изометрија равни је композиција $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$. Две праве једне еуклидске равни могу да се поклапају, да се секу и да буду дисјунктне (тј. паралелне, тј. имају заједничку нормалу).
Зато важи:

Теорема (26.6)

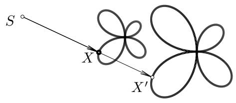
Директне изометрије еуклидске равни су коинциденција, централне ротације и транслације.
Индиректне изометрије еуклидске равни су осне и клизајуће рефлексије.

Дефиниција

Пресликавање $\mathcal{H}_{S,k}$ неке равни или простора у себе, где је S тачка домена и $k \neq 0$ реалан број је **хомотетија са коефицијентом** k ако произвољну тачку X слика у X' тако да важи:

1. S, X, X' су колинеарне;
2. $\rho(S, X') = |k|\rho(S, X)$;
3. за $X, X' \neq S$ важи: $X, X' \doteq S$ акко $k > 0$.

Дакле $\overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$.



Очигледно је (због 2.) хомотетија $\mathcal{H}_{S,k}$ сличност са коефицијентом $|k|$.

Зато је за $|k| = 1$ хомотетија изометрија (коинциденција $\mathcal{E}$ за $k = 1$ и централна симетрија $\mathcal{S}_S$ за $k = -1$).

- Хомотетија $\mathcal{H}_{S,k}$, за $|k| \neq 1$ слика произвољну праву p у p' тако да је $p||p'$ или $p = p'$;
- Свака сличност $\mathcal{P}$ може се приказати као композиција хомотетије и изометрије.

На вежбама сте се већи део времена бавили еуклидским простором и релацијама у њему, на предавањима се нећемо даље детаљније њиме бавити. Ипак скрећемо пажњу на лекције 26-29 из уџбеника посвећене еуклидском простору и посебно на теореме 26.12 (Питагорина) и 27.2 (Талесова).