АНАЛИЗА НА МНОГОСТРУКОСТИМА 2005–2006

1. Питања

♣ Постојање и јединственост решења диференцијалних једначина; глатка зависност од почетних услова (стр. 16 и стр. 95).

♣ Глатке многострукости: дефиниције и примери.
  - Карте, атлас, глатка структура (стр. 63–66)
  - Тополошка својства (стр. 70–72)
  - Регуларне криве и површи, еуклидски простори, сфере, пројективни простори, матричне групе (стр. 3–9, 10–11, 101–105)
  - Лијеве групе, дејство групе на скупу, једнопараметарске подгрупе (стр. 107–110)
  - Теорема 1 на стр. 110, Теорема 2 на стр. 111 и Теорема 3 на стр. 112; примери: Примери 25 и 26, Задаци 14–19 (стр. 114–115)
  - Глатка пресликавања (стр. 72–73)

♣ Тангентни простори и тангентна раслојења.
  - Три дефиниције тангентног вектора (стр. 73–80)
  - Пример: тангентна раван површи (стр. 25–26)
  - Комутатор и Лијев извод (стр. 80–81)
  - Фробенијусова теорема (стр. 95–99)
  - Риманова метрика, дужина криве (стр. 115–116, 342–347)

♣ Регуларне тачке и регуларне вредности. Подмногострукости.
  - Диференцијал пресликавања (стр. 81–82)
  - Регуларне и сингуларне тачке и вредности (стр. 83–84)
  - Имерзије и улагања; две врсте подмногострукости (стр. 84)
  - Теорема о имплицитној функцији и подмногострукости (Тврђење 1, стр. 84)
  - Сардова теорема (стр. 85)
  - Витнијеве теореме (Теорема 4 на стр. 89 и Теорема 5 на стр. 91)

♣ Трансверзалност.
  - Дефиниција и примери (стр. 88–89)
  - Зашто је Теорема 2 на стр. 89 уопштење Тврђења 1 на стр. 84?
  - Томова Теорема о трансверзалности (Теорема 3 на стр. 89)
  - Зашто је Томова теорема о трансверзалности уопштење Сардове?

♣ Диференцијалне форме.
  - Форме у $\mathbb{R}^n$, спољашњи производ $\wedge$, диференцијал (стр. 131–132)
  - Дуални објекти dx и $\frac{\partial}{\partial x}$; котангентно раслојење
  - Диференцијалне форме као вишелинеарна пресликавања
  - Диференцијалне форме на многострукостима
  - Диференцирање форми: спољашње, унутрашње, Лијево (стр. 151–152); Тврђење 3 на стр. 152
  - $f^* \circ d = d \circ f^*$, $d^2 = 0$
  - Симплектичке форме (стр. 219–220)

♣ Векторска раслојења (стр. 191–196).
  - Дефиниција и примери
  - Изоморфизам раслојења, операције са раслојењима
  - $f \simeq g \Rightarrow f^*E \cong g^*E$
  - Оријентабилност раслојења
  - Теорема о цевастој околини
  - Теорема о апроксимацији непрекидног пресликавања глатким

♣ Интеграција на многострукостима.
  - Смена променљивих у вишеструком интегралу на језику диференцијалних форми у $\mathbb{R}^n$
  - Оријентација многострукости – три дефиниције
  - Интеграл диференцијалне форме на многострукости (Дефиниција 4 и Тврђење 5 на стр 173; пример: Задатак 8 на стр 174)
  - Многострукост са крајем (стр. 174–175)
  - Стоксова теорема и примери из курсева Анализе (стр. 176–178)

♣ Де Рамове кохомологије.
  - Дефиниција (стр. 155)
  - Хомотопска инваријантност (стр. 157–159)
  - Кохомологије са компактним носачем (стр. 160–162)
  - Поенкареове леме (стр. 159 и 162)
  - Мајер–Вијеторисов низ (стр. 162–163)
  - Кинетова формула (Теорема 4 на стр. 167)
  - Поенкареова дуалност (стр. 182–183)
  - Појам сингуларне хомологије (стр. 180–182,461–465)

♣ Степен пресликавања.
  - Дефиниција и особине (стр. 183–184)
  - Примери (стр. 185–187)
  - Степен и интеграл: уопштење Теореме о смени променљиве у интегралу (стр. 187)

♣ Индекс пресека.
  - Дефиниција (стр. 188–189)
  - Зашто је индекс пресека уопштење степена?
  - Индекс пресека и Поенкареова дуалност (Теорема 6 на стр. 189)

♣ Томов изоморфизам и Ојлерова класа (стр. 448–455).
  - Томова и Ојлерова класа, особине; Томов изоморфизам
  - Веза са Поенкареовим дуалом и индексом пресека
  - Лефшецова теорема о фиксним тачкама
  - Еквивалентност три дефиниције Ојлерове карактеристике

♣ Елементи Морсове теорије.
  - Морсове функције и Морсова лема (стр. 154, 409)
  - Морсова хомологија (стр. 406–408, 422–429)
  - Примене у симплектичкој топологији (стр. 440–446) и Римановој геометрији (стр. 436–437, Теорема 6 на стр. 389, Последица 2 на стр. 390 и коментар иза ње, Теорема 3 на стр. 489)

♣ Праменови и Чехова кохомологија (стр. 499–506).
  - Мотивација: Митаг–Лефлеров проблем у Комплексној Анализи
  - Уопштење Мајер–Вијеторисовог низа
  - Примери и примене

2. Задаци

Напомена: Све многострукости, пресликавања, векторска поља, диференцијалне форме, криве итд. који се појављују у задацима сматрају се C^∞ глатким.

(1) У зависности од параметра $\lambda \in \mathbf{R}$ испитати који од следећих скупова су глатке многострукости:
- $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \lambda\}$
- $\{(x,y) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - y^2 = \lambda\}$
- $\{(x,y) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$
- $\{z \in \mathbf{C} \mid |z^2 - 1| = \lambda\}$.

(2) Доказати да је отворен подскуп многострукости повезан ако и само ако је путно повезан.

(3) Доказати да је крива C задата једначином $x^3 = |y|$ у $\mathbf{R}^2$ глатка многострукост са глатком структуром за коју је инклузија $C \to \mathbf{R}^2$ глатко пресликавање. Да ли је C глатка подмногострукост у $\mathbf{R}^2$?

(4) Испитати трансверзалност пресека
- xy–равни и z–осе у $\mathbf{R}^3$.
- Простора $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ и дијагонале у $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.
- Простора симетричних и простора кососиметричних матрица у простору свих квадратних матрица датог реда.
- Површи $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ у $\mathbf{R}^3$у зависности од r.

(5) Одредити интегралне криве векторског поља
- $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ у $\mathbf{R}^2$
- $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ у $\mathbf{R}^3$
- $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ у $\mathbf{R}^3$
- $x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ у $\mathbf{R}^3$

и наћи њихову параметризацију.

(6) Израчунати дужину лука следећих кривих, у односу на стандардну Риманову метрику (еуклидски скаларни производ) у $\mathbf{R}^3$:
- $x = t - \sin t$, $y = t - \cos t$, $z = 4\cos\frac{t}{2}$ између два узастопна пресека са xz–равни;
- $x^3 = 3y^2$, $2xz = 1$ између тачака пресека са равнима $y = \frac{1}{3}$, $y = 9$;
- $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$, $z = \cos 2t$ у укупној дужини.

(7) Одредити угао под којим се секу криве $u + v = 0$ и $u - v = 0$ на површи $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, у односу на Риманову метрику индуковану скаларним производом у $\mathbf{R}^3$.

(8) Дато је пресликавање
$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad (s,t) \mapsto (st, 1).$$
Израчунати $f^*(dx + dy)$ и $f^*(xdy + ydx)$.

(9) Дати су диференцијална форма и векторско поље
$$\zeta = xdx \wedge dy + y^2 dy \wedge dz, \qquad X = y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$
у $\mathbf{R}^3$. Израчунати Лијев извод $L_X\zeta$.

(10) Нека су X и Y векторска поља на многострукости M таква да свака тачка $x \in M$ има околину U, такву да је $L_X f = L_Y f$ за свако $f \in C^\infty(U)$. Доказати да је $X = Y$.

(11) Шта је геометријски смисао интеграла $\int_C y\,dx$ по затвореној глаткој кривој $C \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$?

(12) Нека је $\varphi_t : M \to M$ једнопараметарска фамилија дифеоморфизама, X векторско поље на M дефинисано са

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X(\varphi_t(x))$$

и $\psi : M \to M$ дифеоморфизам. Доказати да је $\psi_* X = X$ ако и само ако је $\psi \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi$.

(13) Нека је ψ_t једнопараметарска фамилија дифеоморфизама еуклидског простора генерисана векторским пољем X. Доказати да ψ_t чува запремину ако и само ако је $\mathrm{div}(X) = 0$. Да ли овај резултат може да се уопшти на многострукости?

(14) Нека су X и Y векторска поља у еуклидском простору. Доказати да је $\mathrm{div}[X, Y] = X(\mathrm{div}Y) - Y(\mathrm{div}X)$. Да ли то важи и на многострукостима?

(15) Нека је M затворена многострукост. Доказати формулу

$$\int_M (L_X\alpha) \wedge \beta = -\int_M \alpha \wedge (L_X\beta).$$

(16) Нека је θ затворена 1–форма на M. Доказати да је пресликавање

$$\pi_1(M) \to \mathbf{R}, \quad [\gamma] \mapsto \int_\gamma \theta$$

хомоморфизам група. Шта може да се каже о његовом језгру?

(17) Нека је G Лијева група, $g \in G$ и $L_g, R_g : G \to G$ лева и десна транслација, тј. пресликавања дефинисана са

$$L_g(x) = g \cdot x, \qquad R_g(x) = x \cdot g.$$

- Доказати да је $R_{g^{-1}} \circ L_g$ дифеоморфизам Лијеве групе G који слика јединицу у јединицу.
- Нека је $\mathfrak{g} = T_e G$ Лијева алгебра Лијеве групе G и $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ извод пресликавања $R_{g^{-1}} \circ L_g$ у јединици. Доказати да је $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ дејство групе G на $\mathfrak{g}$.

(18) Нека је $U \subset \mathbf{R}^k$ отворен скуп и $f : U \to \mathbf{R}^n$ глатко пресликавање. Доказати да је $f(U)$ скуп мере нула ако је $k < n$. Извести као последицу да је $\pi_k(\mathbf{S}^n) = 0$ за $k < n$.

(19) Нека су M и N повезане многострукости и $p, q \in N$ регуларне вредности глатког пресликавања $f : M \to N$. Доказати:
- $f^{-1}(p)$ и $f^{-1}(q)$ су кобордантне многострукости, тј. њихова дисјунктна унија је крај многострукости димензије веће за 1.
- Ако је M компактна и $\mathrm{dim}M = \mathrm{dim}N$ онда је $f^{-1}(p)$ коначан скуп.
- Ако је $\mathrm{dim}M = \mathrm{dim}N$ и ако је број тачака скупа $f^{-1}(p)$ непаран, онда је f НА.

(20) Доказати да антиподално пресликавање сфере парне димензије није хомотопно идентитету. Шта је са сферама непарне димензије?

(21) Израчунати кохомолошки прстен торуса.

(22) Израчунати површину торуса у односу на форму површине индуковану из $\mathbf{R}^3$, где је торус реализован као ротациона површ. Израчунати затим површину торуса у односу на форму површине индуковану улагањем торуса у $\mathbf{R}^4$ као Декартовог производа $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.

(23) Доказати да форма

$$\omega = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

дефинише нетривијалну класу у $H^n_{dR}(\mathbf{S}^n)$. Израчунати $\int_{\mathbf{S}^n} \omega$.

(24) Израчунати површину n–димензионе јединичне сфере и запремину n–димензионе јединичне лопте. Чему теже ове величине кад $n \to \infty$? У којој димензији су оне највеће?

(25) Нека су ψ_t и ϕ_t Хамилтонови дифеоморфизми генерисани Хамилтонијанима G и H са компактним носачем и нека су X_G и X_H њихова Хамилтонова векторска поља.
- Доказати да је $\psi_t \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_t$ ако и само ако је $\omega(X_G, X_H) = 0$.
- На примеру функција $G(p,q) = p$, $H(p,q) = q$ (или неких других) показати да једна од импликација у претходном тврђењу не важи без претпоставке о компактности носача. Шта је са другом импликацијом?

(26) Нека је $\Pi \subset TM$ дистрибуција хиперравни локално задата 1–формом ζ, као $\Pi = \ker(\zeta)$. Доказати да је Π интеграбилна (у смислу Фробенијусове теореме) ако и само ако је $\zeta \wedge d\zeta = 0$.

(27) Нека је N оријентабилна многострукост и $f : M \to N$ пресликавање које је *локални* дифеоморфизам. Доказати да је M оријентабилна.

(28) Доказати да је тангентно раслојење *сваке* многострукости M оријентабилна многострукост.

(29) Доказати да је оријентабилно раслојење над оријентабилном многострукошћу оријентабилна многострукост. Да ли постоји оријентабилно раслојење које је неоријентабилна многострукост? Да ли постоји неоријентабилно раслојење које је оријентабилна многострукост?

(30) Нека је $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ глатко пресликавање коме је 0 регуларна вредност. Доказати да је једначином $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ задата оријентабилна глатка многострукост.

(31) Нека је $\pi : \widetilde{M} \to M$ наткривање оријентисане компактне многострукости M.
- Доказати да је многострукост $\widetilde{M}$ оријентабилна и да форма запремине на M индукује канонску форму запремине на $\widetilde{M}$.
- Наћи везу између запремина многострукости M и $\widetilde{M}$ (у односу на претходно споменуте форме) у терминима њихових фундаменталних група.
- Да ли неоријентабилна многострукост може да има оријентабилно наткривање?

(32) Доказати да за компактну повезану Лијеву групу G димензије n важи $H^n_{dR}(G) = \mathbf{R}$.

(33) Доказати да је $\mathbf{R}P^3$ фибрација над $\mathbf{S}^2$ са влакном $\mathbf{S}^1$.

(34) Доказати да на сфери постоји векторско поље које није нигде нула ако и само ако је димензија сфере непаран број.

(35) Нека је ψ дифеоморфизам торуса $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ индукован дифеоморфизмом цилиндра $\mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi]$ чија је рестрикција на једну граничну кружницу идентичко пресликавање, а на другу ротација за 2π. Доказати да је ψ

пресликавање степена 1 које није хомотопски еквивалентно идентитету. Упоредити овај резултат са Хопфовом теоремом (стр. 535).

(36) Доказати да свако пресликавање $f:\mathbf{S}^n\to\mathbf{S}^n$ степена $d\neq(-1)^{n+1}$ има фиксну тачку.

(37) Нека је $f:\mathbf{S}^n\to\mathbf{S}^n$ пресликавање које није НА. Доказати да f има фиксну тачку и да постоји тачка x таква да је $f(x)=-x$.

(38) Доказати да свако пресликавање $f:\mathbf{S}^{2n}\to\mathbf{S}^{2n}$ или има фиксну тачку, или постоји тачка x таква да је $f(x)=-x$. Да ли ово важи и за сфере непарне димензије?

(39) Доказати да свако пресликавање $h:\mathbf{R}P^{2n}\to\mathbf{R}P^{2n}$ има фиксну тачку. Да ли ово важи и за пројективне просторе непарне димензије?

(40) Доказати да група која слободно и глатко дејствује на сфери парне димензије има највише два елемента.

(41) Нека је $R\to\mathbf{S}^n$ тривијално раслојење ранга 1.
- Доказати да је раслојење $T\mathbf{S}^n\oplus R$ тривијално.
- Доказати да је тангентно раслојење многострукости $\mathbf{S}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{S}^{n_k}$ $(k>1)$ тривијално ако је бар један од бројева $n_1,\ldots,n_k$ непаран.
- Да ли је $T(\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2)$ тривијално раслојење?
- Доказати да је $T\mathbf{S}^3$ тривијално раслојење.

(42) Доказати да је C^2 функција $f:M\to\mathbf{R}$ Морсова ако и само ако је њен диференцијал df трансверзалан на нулто сечење у T^*M.

(43) Нека је $f:\mathbf{S}^n\to\mathbf{R}$ Морсова функција која је инваријантна у односу на антиподално пресликавање. Доказати да за свако $k\in\{0,1,\cdots,n\}$ f има најмање две критичне тачке индекса k.

(44) Нека је M затворена глатка многострукост, X глатко векторско поље и $\phi_t:M\to M$ фамилија дифеоморфизама дефинисана као решење диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x)=X(\phi_t(x)),\quad \phi_0(x)=x.$$

- Доказати да број фиксних тачака дифеоморфизма ϕ_1 није мањи од Ојлерове карактеристике $\chi(M)$.
- Ако је уз то $X=\nabla f$ за неку Морсову функцију $f:M\to\mathbf{R}$, доказати да број фиксних тачака дифеоморфизма ϕ_1 није мањи од збира Бетијевих бројева многострукости M.

(45) Нека је M глатка многострукост димензије n, $f:M\to\mathbf{R}$ Морсова функција и $c_k(f)$ број критичних тачака функције f индекса k.
- Доказати да је $c_k(f)=c_{n-k}(-f)$.
- Доказати да је Ојлерова карактеристика затворене многострукости непарне димензије једнака нули.

(46) Нека су $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ међусобно различити позитивни бројеви.
- Доказати да је са
$$[z_0,z_1,\ldots,z_n]\mapsto\frac{\sum_{k=0}^n\lambda_k|z_k|^2}{\sum_{k=0}^n|z_k|^2}$$
добро дефинисана функција $f:\mathbf{C}P^n\to\mathbf{R}$.
- Доказати да је f Морсова и да има по једну критичну тачку индекса k за свако $k\in\{0,2,4,\ldots,2n\}$.

- Користећи ова својства функције f израчунати хомологију комплексних пројективних простора.

(47) Доказати да Морсова функција на Римановој површи рода g има најмање $2g+2$ критичних тачака. Да ли постоји Морсова функција на Римановој површи рода g која има тачно $2g+2$ тачака?

(48) Доказати да на свакој многострукости постоји Морсова функција која у различитим критичним тачкама има различите вредности.

(49) Нека је $f : M \to \mathbf{R}$ глатка функција и Φ функционал
$$\gamma \mapsto \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 + |\nabla f(\gamma)|^2\right) dt$$
на скупу глатких кривих $\gamma : \mathbf{R} \to M$ са граничним условима $\gamma(-\infty) = x$, $\gamma(+\infty) = y$.

- Доказати да је $\Phi(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{d\gamma}{dt} + \nabla f(\gamma)|^2\, dt + const$.
- Доказати да су решења градијентне једначине
$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f(\gamma), \quad \gamma(-\infty) = x, \quad \gamma(+\infty) = y$$
екстремале функционала Φ.

(50) Нека је N подмногострукост многострукости M и
$$\nu^* N = \{\zeta \in T^*M|_N \mid (\forall X \in TN)\zeta(X) = 0\}$$
(ово раслојење назива се *конормалним раслојењем* подмногострукости N). Нека је $\theta = pdq$ Лиувилова форма на T^*M и $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbf{R}$ глатка функција. Доказати да су екстремале функционала дејства
$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_0^1 \gamma^*\theta - H(\gamma(t), t)\, dt$$
на простору путева $\gamma : [0,1] \to T^*M$ са граничним условима $\gamma(0) \in O_M$, $\gamma(1) \in \nu^* N$ Хамилтонови путеви за Хамилтонијан H.