Глобална анализа 2010. Коментари уз 2. и 3. домаћи задатак

Други домаћи задатак

(1) (а) За сферу треба знати и метод из Примера 7 на стр. 67, али је најлакше позвати се на тврђења на стр. 84 у „Анализи на многострукостима”. За илустрацију и нетривијалније примене овог тврђења, погледати нпр. доказ Тврђења 1 на 103. страни и Тврђења 2 и 3 на 104. Решити задатке 2 и 3 на 105. страни. За торус: погледати Задатак 16 на 72. страни и Пример 16 на стр. 111.
(б) Погледати пример 17 на стр. 111.
(в) Идеја слична као под (б), уочити погодно дејство групе на скупу; погледати и задатке на стр. 114–115.

(2) Да ли скуп регуларних вредности мора да буде отворен?

(3) Да ли скуп критичних тачака може да буде густ? Ако може, какав је његов комплемент?

(4) Пошто је тврђење локалног карактера, можемо локално да применимо Теорему о рангу.

(5) Лако је видети да је дијагонала $\Delta \subset N \times N$ глатка подмногострукост. График пресликавања f,

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x) \mid x \in M\} \subset M \times N,$$

може се представити као

$$\Gamma(f) = (f \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta),$$

где је

$$f \times \mathrm{id} : M \times N \to N \times N, \quad (x, y) \mapsto (f(x), y).$$

Да ли је $f \times \mathrm{id}$ трансверзално на Δ?

(6) Да ли је пресек графика пресликавања f и g подмногострукост у $M \times N$ ако је f трансверзално на g?

(7) Ако се R и S секу трансверзално, доказати да је

$$\nu(R \cap S) = \nu R \oplus \nu S.$$

Да ли важи обрнуто?

(8) Пошто је тврђење (а) локалног карактера, можемо да применимо Теорему о рангу из $\mathbb{R}^n$ (у свакој локалној карти) и одатле закључимо (а). Остала тврђења су општа топологија. У вези са (д) прелистати стр. 91–95 у „Анализи на многострукостима”.

(9) Искористити чињеницу да ако је A матрица са непрекидним елементима, скуп $\det A > 0$ је отворен.

Трећи домаћи задатак

(1) Погледати Пример 2 на стр. 208 и довести га у везу са (б). Као тест разумевања ове физичке интерпретације, решити Задатак 6 на 209. страни.

(2) Погледати стр. 82.

(3) Диференцирати по t и применити Теорему о јединствености решења.

(4) Погледати стр. 144.

(5) Као и Пример 8 на 96. страни, овај задатак је (мало нетривијалнија) манифестација последице некомпактности на продужење решења (Тврђење 2 на 96. страни).

(6) Овај задатак је илустрација тзв. **метода карактеристика** у теорији парцијалних диференцијалних једначина. Приметимо да се овде говори само о егзистенцији решења.

Коментар о јединствености: Доказати **Гронвалову неједнакост**: ако су

$$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$$

непрекидне ненегативне функције и

$$f(t) \le A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds, \quad A \ge 0, \tag{✠}$$

тада је

$$f(t) \le A\exp\Big(\int_a^t g(s)\,ds\Big) \tag{$\mathbf{\Gamma}$}$$

за $t \in [a, b)$.

[Упутство: претпоставити прво да је $A > 0$. Тада је

$$h(t) := A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds > 0,$$

па је

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f(t)g(t)}{h(t)} \le g(t),$$

јер је по претпоставци (✠) $f(t) \le h(t)$. Одатле интеграцијом завршити доказ за случај $A > 0$. Ако је $A = 0$, заменити A са ε *за произвољно* $\varepsilon > 0$ и закључити да је h, а самим тим и f, једнако нули.]

Нека су f_1, f_2 два решења и нека је

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|^2\,dx.$$

Доказати да, под одређеним претпоставкама о f_1, f_2, важи

$$\frac{dE}{dt} \le \lambda E$$

за погодно изабрану константу λ. На основу Гронвалове неједнакости ($\mathbf{\Gamma}$) закључити $E = 0$, тј. $f_1 = f_2$. Споменуте „одређене претпоставке” (које омогућавају рачунање $\frac{dE}{dt}$) дефинишу класу функција у којој можемо да говоримо о јединствености решења.

(7) Погледати стр. 95–99.