Глобална анализа 2010. **Четврти домаћи задатак**

(1) (а) Нека су $F, G \subset \mathbb{S}^n$ затворени дисјунктни подскупови, такви да ни један од њих не раздваја сферу на компоненте повезаности. Доказати да ни $F \cup G$ не раздваја сферу на компоненте повезаности.
(б) Нека су $U, V \subset \mathbb{S}^n$ отворени и повезани подскупови, такви да је $U \cup V = \mathbb{S}^n$. Доказати да је $U \cap V$ повезан.

(2) Нека је M компактна многострукост без границе. Доказати да идентичко пресликавање $\mathrm{id} : M \to M$ није хомотопно константном пресликавању. Да ли исто важи без претпоставке о компактности многострукости M? Да ли исто важи ако је M компактна, а $\partial M \neq \emptyset$?

(3) Нека је $SX := \mathbb{S}^1 \wedge X := \mathbb{S}^1 \times X / \mathbb{S}^1 \vee X$ суспензија простора X и $Sf : SX \to SY$ суспензија пресликавања $f : X \to Y$.
(а) Доказати да је $S\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$.
(б) Доказати да је $\deg f = \deg Sf$.
(в) Индукцијом по n доказати **Хопфову теорему:** *Пресликавања $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ су хомотопски еквивалентна ако и само ако имају исти степен.*
(г) Нека је $F : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ дифеоморфизам цилиндра који је идентитет на кругу $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, а ротација за 2π на кругу $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ (нпр. $F(\theta, t) = (\theta + 2t\pi, t)$). Доказати да F индукује дифеоморфизам $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ торуса и да је $\deg f = \deg \mathrm{id}$, али није $f \simeq \mathrm{id}$ (упоредити овај резултат са (в)).

(4) Нека је $A \subset B \subset X$. Доказати да инклузија $\imath : A \hookrightarrow B$ индукује изоморфизам $H_k(A; \Lambda) \cong H_k(B; \Lambda)$ за свако k ако и само ако индукује изоморфизам $H_k(X, A; \Lambda) \cong H_k(X, B; \Lambda)$ за свако k.

(5) Нека је $A \subset X$ и нека је A ретракт простора X. Доказати да је $H_k(X; \Lambda) \cong H_k(A; \Lambda) \oplus H_k(X, A; \Lambda)$. Ако је A деформациони ретракт простора X, доказати да је $H_k(X, A; \Lambda) = 0$.

(6) Нека је X путно повезан и $\epsilon : C_0(X; \Lambda) \to \Lambda$ хомоморфизам дефинисан са $\sum \lambda_j s_j \mapsto \sum \lambda_j$ за сингуларне симплексе s_j и коефицијенте $\lambda_j \in \Lambda$ и нека је $\widetilde{H}_k(X; \Lambda)$ хомологија ланчастог комплекса

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_k(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X; \Lambda) \xrightarrow{\epsilon} \Lambda$$

(тзв. *редукована хомологија* простора X).
(а) Доказати да је $\widetilde{H}_k(X; \Lambda) = H_k(X; \Lambda)$ за $k > 0$ и $\widetilde{H}_0(X; \Lambda) = 0$.
(б) Доказати да је $H_k(X, *; \Lambda) = \widetilde{H}_k(X; \Lambda)$.

(7) Нека је X CW – комплекс. Доказати:
(а) Ако $A \subset X$ нема две тачке у истој отвореној ћелији, онда је A затворен и дискретан.
(б) Сваки компактан подскуп $K \subset X$ је садржан у коначној унији отворених ћелија.
(в) Свака затворена ћелија у X је садржана у коначном подкомплексу.
(г) Сваки компактан подскуп $K \subset X$ је садржан у коначном подкомплексу.