Одабрана поглавља механике 2009. **Четврти домаћи задатак**

(1) Скрипта *Мини курс о симплектичким многострукостима*,

$$http://poincare.matf.bg.ac.rs/\sim milinko/skripta/simplekticke.pdf$$

задаци 30–49 и задатак 89.

(2) Нека је (P, ω) симплектичка многострукост и $\Sigma \subset P$ оријентабилна хиперповрш.

(а) Доказати да постоји глатка функција $H : P \to \mathbb{R}$ таква да је 0 њена регуларна вредност и $\Sigma \subset H^{-1}(0)$.

(б) Нека је X_H Хамилтоново векторско поље генерисано функцијом H из (а). Доказати да је

$$X_H \in T\Sigma \quad \text{и} \quad X_H \perp_\omega T\Sigma.$$

(в) Доказати да за неоријентабилну хиперповрш у P не постоји функција као у (а).

(г) Доказати да за неконтрактибилан круг S на дводимензионом торусу T не постоји глатка функција H таква да је $S = H^{-1}(0)$.

(3) Нека је X векторско поље на глаткој многострукости M, $f \in C^\infty(M)$ и $\psi : M \to M$ дифеоморфизам. Доказати да унутрашње множење (унутрашњи диференцијал) диференцијалних форми

$$\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M), \quad \iota_X\eta(Y_1, \cdots, Y_{k-1}) := \eta(X, Y_1, \cdots, Y_{k-1})$$

задовољава следећа својства:

(а) ι_X је антидиференцирање, тј. $\mathbb{R}$–линеарно је и важи

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \wedge \iota_X\beta.$$

(б) $\iota_{fX}\alpha = f\iota_X\alpha, \quad \iota_X df = Xf, \quad \psi^*\iota_X\eta = \iota_{\psi^*X}\psi^*\eta.$

(4) Нека је λ диференцијална 1–форма на M. Доказати да је вертикална транслација

$$T_\lambda : T^*M \to T^*M, \quad T_\lambda(\zeta) = \zeta + \lambda$$

симплектоморфизам ако и само ако је λ затворена форма. Доказати да је T_λ Хамилтонов дифеоморфизам ако и само ако је λ тачна форма.

(5) Нека је $\psi_t^H : T^*M \to T^*M$ фамилија Хамилтонових дифеоморфизама генерисана (у општем случају неаутономним) Хамилтонијаном H_t и нека је X_H њиме дефинисано Хамилтоново векторско поље.

(а) Нека је θ Лиувилова 1–форма на T^*M. Доказати да је форма $(\psi_t^H)^*\theta - \theta$ тачна и да важи

$$(\psi_t^H)^*\theta - \theta = dF_t, \quad \text{где је} \quad F_t = \int_0^t (\iota_{X_H}\theta - H_s) \circ \psi_s^H \, ds.$$

(б) Претпоставимо да је $L := \psi_1^H(O_M)$ сечење раслојења T^*M. Доказати да је

$$S : M \to \mathbb{R}, \quad S(q) := \int_0^1 \gamma^*\theta - H_t \circ \gamma(t) \, dt,$$

где је γ јединствено решење диференцијалне једначине

$$\dot\gamma(t) = X_H(\gamma(t)), \quad \gamma(0) \in O_M, \quad \gamma(1) \in T_q^*M$$

генеришућа функција Лагранжеве подмногострукости L.